Asociované vektorové bundly

Def:

Nechť G je Lieova grupa, g její Lieova algebra, A vektorový prostor, T reprezentace G na A a t reprez. g na A.

AM je vekt. bundl asociovaný s grupový-bundlem GM a bundlem gM pokud se lokálně přenášejí struktury mezi standardními fibry G, g, A

[ve smyslu nekanonického isomorfismu

$$GU \cong G \times U \qquad gU \cong g \times U \qquad AU \cong A \times U \qquad U \subset M \;]$$

To znamená, že existuje zobrazení

$$h \in \operatorname{Sect} GM \quad \rightarrow \quad T_h \in \operatorname{Sect} A^1_1 M \qquad \text{splňující}$$

$$T_{h_1 h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2} \qquad T_{h^{-1}} = T_h^{-1} \qquad T_e = 1$$

$$m \in \operatorname{Sect} gM \quad \rightarrow \quad t_m \in \operatorname{Sect} A^1_1 M \qquad t_m{}^A{}_B = m^\varkappa t_\varkappa{}^A{}_B$$

$$t_{[m_1, m_2]} = [t_{m_1}, t_{m_2}] \qquad t_m = \frac{d}{d\varepsilon} T_{h_\varepsilon} \quad \text{kde} \quad m = \frac{Dh_\varepsilon}{d\varepsilon}$$

T nazýváme akce kalibrační grupy na AM

t nazýváme akce kalibrační algebry na AM

$t_\varkappa{}^A{}_B$ jsou generátory reprezentace na AM

Def

Akce T, resp. t na AM je konzistentní s metrickou strukturou H_{AB} na AM pokud

$$T_h{}^M{}_A T_h{}^N{}_B H_{MN} = H_{AB} \qquad t_F^\dagger = -t_F$$

Pozn:

Podobně zavedeme asociaci komplexních vekt. bundlů a konzistenci reprezentací s hermitovskou strukturou případně jinou strukt. jako např. orientace

Def: Trivializace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM

Trivializace l_α na gM a E_A na AM jsou konzistentní s asociací pokud

$C_{\mu\nu}{}^{\kappa}$ = konst — konzistence s lieovskou str. gM

$t_{\mu}{}^{A}{}_{B}$ = konst — konzistence s asociací AM, gM

v případě reprezentace konzist. s dodatečnou strukturou, požadujeme obdobně konzistenci trivializace

např. pro reprezentaci konzist. s metrikou H požadujeme též

H_{AB} = konst — konzistence s metrikou na AM

Všechny komponenty jsou vzhledem k bázi trivializace

Konstantnost je myšlena podél podkladové variety M

Lema: jednoznačnost trivializace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM
nechť G a g jsou poloprosté
t je ireducibilní reprezentace konzistentní s metrikou H
Nechť e_α a E_A jsou trivializace konzistentní s asociací s lieovskou strukturou a s metrikou
Pak volba báze e_α a konkrétních konst. koeficientů $t_\Gamma{}^A{}_B$ a H_{AB} určuje volbu báze E_A jednoznačně až na triviální volnost $E_A \to -E_A$

Důk:
nechť $E_A, \tilde{E}_A$ jsou dvě báze na AM splňující všechny podmínky výše
pak musí
$$\tilde{E}_A = E_B \Lambda^B{}_A \qquad \text{kde } \Lambda^B{}_A \text{ je ortonormální}$$
$$\Lambda_M{}^A \Lambda^M{}_B = 1\!\!1^A_B \qquad \text{kde } \Lambda_B{}^A = H_{BN} \Lambda^N{}_M H^{MA}$$
(plyne z konzistence s metrikou)
Z konzistence s asociací plyne
$$t_K{}^A{}_B = t_M{}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \Rightarrow t_K{}^A{}_B = \Lambda^A{}_M t_K{}^M{}_N \Lambda^{-1 N}{}_B \Rightarrow [t_\Gamma, \Lambda]^A{}_B = 0$$
Z ireducibility a Schurova lemma plyne
$$\Lambda^A{}_B = \lambda 1\!\!1^A_B$$
Ortonormalita Λ dává
$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \qquad \Lambda = \pm 1\!\!1$$

Poznámka:
pro věrnou reprezentaci poloprosté alg. na vekt. pr. máme plnou reducibilitu. Tj. reprezentační prostor se rozpadá na součet ireducibilních komponent.
V obecném případě tak máme volnost v trivializaci na AM danou volbou znaménka na každé ireducibilní komponentě.

Indukovaná kovariantní derivace na asociovaném bundlu

Def: Derivace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM:

$\mathcal{D}$ je derivace na gM a D je derivace na AM

$\mathcal{D}$ a D jsou konzistentní s asociací, pokud platí

$\mathcal{D}_{\underline{m}} c_{\underline{\mu}\underline{\nu}}{}^{\underline{\kappa}} = 0$ (též $\mathcal{D}_{\underline{m}} k_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = 0$) - $\mathcal{D}$ konz. s gM

$D_{\underline{m}} H_{\underline{A}\underline{B}} = 0$ - D konz s metr. na AM

$D_{\underline{m}} t_{F}{}^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} = 0$ - konzistence s asociací

Poslední podmínce je $D = \mathcal{D} \oplus D$ rozšířená derivace na bundl $g \otimes A\, M$

Pozn:

Podobnou def. lze zformulovat i pro jiné struktury na AM, např. hermitovskou strukt. $h_{\bar{A}A}$ či orientaci $\varepsilon_{A_1 A_2 \ldots}$

Lema: Jednoznačnost souřadnicové derivace

Nechť AM je vekt. bundle asociovaný s bundly GM, gM + věrné reprezentace

l_α a E_A trivializace na gM a AM konzist. s asociací

Pak souřadnicové derivace ∂ na AM je dána jednoznačně

Důk:

podle věty a poznámky dříve je báze E_A dána jednoznačně až na volbu znaménka na každé ireducibilní komponentě.

(Věrné konečnědimenz. reprezentace polojednoduché algebry je plně reducibilní bez triviální komponenty. Pro každou ireduc. komponentu máme volnost ve volbě báze pouze znaménko.)

Souřadnicová derivace ∂ na AM je dána podmínkou

$$\partial E_A = 0$$

Ta identifikuje stejnou derivaci ∂ nezávisle na volbě (konstantního) znaménka.

Lema: Konzistence souřadnicové derivace s asociací

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM

l_α, E_A trivializace na gM a AM konzistentní s asociací

Souřadnicové derivace ∂ na gM a ∂ na AM dané trivializací jsou konzistentní s asociací, tj.

$$\partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

Důk:

$$\partial l_\alpha = 0 \qquad \partial E_\alpha = 0 \qquad c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = \text{konst} \qquad H_{AB} = \text{konst} \qquad t_\mu{}^A{}_B = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

Věta: Indukování kov. der. na asociovaný bundl

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s GM, gM

t je věrné reprez. konzistentní s metrikou H na AM

$\mathcal{D}$ kov. derivace na g^M konzist. se strukturou algebry

$\Downarrow$

kov. der. D na AM konzistentní s asociací a metrikou je dána jednoznačně

Důk.

Derivace $\mathcal{D}$ a D mají splňovat

$$\mathcal{D} c = 0 \qquad D H = 0 \qquad D t = 0$$

Zvolme trivializace e_α, E_A konzist. se všemi strukt., pak

$$\partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

a ∂ na AM je dána volbou e_α jednoznačně

Nechť $A_a{}^\kappa{}_\nu = \Omega_a^\kappa c_{\kappa\nu}{}^\kappa$ je vekt. potenciál $\mathcal{D}$ vůči ∂ a $A_a{}^M{}_N$ je vekt. potenciál D vůči ∂

$$\mathcal{D} = \partial + \mathbf{A} \qquad D = \partial + \mathbb{A}$$

Platí

$$D_a t_\kappa{}^M{}_N = 0 \qquad \partial_a t_\kappa{}^M{}_N = 0$$

$\Downarrow$

$$-A_a{}^\lambda{}_\kappa t_\lambda{}^M{}_N + [A_a, t_\kappa]^M{}_N = 0$$

$\Updownarrow$

$$-\Omega_a^\nu c_{\nu\kappa}{}^\lambda t_\lambda{}^M{}_N + [A_a, t_\kappa]^M{}_N = 0 \qquad c_{\nu\kappa}{}^\lambda t_\lambda = [t_\nu, t_\kappa]$$

$\Downarrow$

$$[A_a - \Omega_a^\nu t_\nu, t_\kappa]^M{}_N = 0$$

Z věrnosti a úplné reducibility repr. plyne Schurovo lemma

$$A_a{}^M{}_N - \Omega_a^\nu t_\nu{}^M{}_N = \sum_{s} \Omega_a^{(s)} P_{(s)}{}^M{}_N$$ projektory na ireduc. komp.

Z $DH=0$ $\partial H = 0$ a konzistence t s H plyne

$$A_a^T = -A_a \qquad t_\kappa^T = -t_\kappa$$

ale projektory $P_{(s)}$ jsou symetrické $P_{(s)}^T = P_{(s)}$

$\Rightarrow \Omega_a^{(s)} = 0 \Rightarrow A_a{}^M{}_N = \Omega_a^\kappa t_\kappa{}^M{}_N \Rightarrow D = \partial + \mathbb{A}$ jednoznačné

Pozn:

Poloprostota grupy G a algebry g zaručuje, že adjoint reprezentace Ad a ad na g^{M} nesou veškerou podstatnou informaci o grupě, resp. algebře – jsou věrné nedegenerované. Navíc každé lineární operace splňující Leibnizovo pravidlo patří do reprezentace, $\mathrm{Der}\, g = \mathrm{ad}\, g$

Poloprosté grupy nepokrývají ale běžný případ, kdy grupa má invariantní komutující podgrupu, případně algebra má komutující ideál. To zahrnuje např. případ elektromagnetismu, kdy kalibrační grupa je $U(1)$. Adjoint reprezentace je poté triviální, $\mathrm{ad}=0$ jelikož závorky jsou triviální, $c=0$.

Tento případ se řeší umělou volbou nějaké netriv. věrné reprezentace G či g na kalibr. algebře g, např. zadáním generátorů $t_{\underline{K}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}}$ splňujících $[t_{\underline{K}}, t_{\underline{S}}]=0$. Tato reprezentace pak nahradí adjoint reprezentaci ve výrazech jako

$$A_{\underline{a}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}} = \mathcal{A}_{\underline{a}}^{\underline{K}}\, t_{\underline{K}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}} \qquad \text{či} \qquad F_{\underline{ab}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}} = \mathcal{F}_{\underline{ab}}^{\underline{K}}\, t_{\underline{K}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}}$$

Zkombinováno s technikou pro poloprostou algebru lze ošetřit případ redukovatelné algebry g.

Pozn:

Důkaz jednoznačnosti jak souřadnicové derivace ∂ na AM, tak indukované derivace D na AM spočívá zejména na věrnosti a reducibilitě reprezentace t. Ty umožňují použít Schurovo lemma a zredukovat volnost v definici trivializace E_A, případně volnost ve tvaru rozdílu $A_\alpha - \Omega_\alpha^k t_k$ na násobek jednotky na každé ireducibilní komponentě.

Tuto zbývající volnost jsme eliminovali použitím kompatibility s metrickou strukturou na AM.

V případě, že na asociovaném prostoru AM bude reprezentace t kompatibilní s jinou strukturou - např. s hermitovskou strukturou na komplexních bundlech - eliminace zbývající volnosti nemusí být tak přímočará. Hermitovská struktura by např. nefixovala fázi na jednotlivých ireducibilních komponentách.

Pozn:

Obecnější přístup k zachycení informace o kalibrační grupě, algebře a k definici asociovaných vektorových bundlů je založen na tzv. hlavních bundlech.

Intuitivně, hlavní bundl PM je prostor všech zobecněných bází, mezi kterými lze přecházet pomocí kalibrační transformace.

Tj. prvek fibru $E \in P_x M$ je zobecněná báze v x

Na každou bázi E lze zapůsobit transformaci $h \in G$ patřící do kalibrační grupy G

$$E \to F = Eh \quad \in P_x M$$

Naopak, každé dvě báze $E, F \in P_x M$ jsou spojeny nějakou kalibrační transformací h

Asociovaný bundl AM je definován volbou reprezentace T grupy G na standardní fibru A

Prvek $\phi \in AM$ lze chápat jako obecný objekt, který je zadaný vůči bázi $E \in PM$ pomocí souřadnice $\underline{\phi} \in A$ ze standardního fibru

$$\phi = T_E \underline{\phi}$$

přičemž pokud změníme bázi $E \to E' = Eh$, musíme změnit příslušně i souřadnici $\underline{\phi} \to \underline{\phi}' = T_{h^{-1}} \cdot \underline{\phi}$

$$\phi = T_E \underline{\phi} = T_{E'} \underline{\phi}' = T_{Eh}(T_{h^{-1}} \underline{\phi})$$

Grupový bundl GM a bundl kalibr. algebry gM lze chápat jako asociované bundly zadané pomocí reprezentací AD a Ad

Na hlavním bundlu PM lze definovat konexi, která definuje paralelní přenos bází.

Konexe PM pak umožňuje definovat jednoznačně indukovanou kovariantní derivaci na každém asociovaném vektorovém bundlu

Viz příležitostné přednášky v rámci Vybraných partií OTR.