Reálný vekt. bundle s SO-symetrií

$\mathcal{A}$ $\quad H_{\underline{AB}}$

nedegener. $\Rightarrow$ exist $H^{-1\,\underline{AB}}$

symetrické $\quad H_{\underline{AB}} = H_{\underline{BA}}$

zvedání a snižování indexů

$$H^{\underline{AB}} = H^{-1\,\underline{AB}}$$

transpozice

$$\phi^{A} \to \phi^{T}{}_{\underline{A}} = H_{\underline{AB}}\phi^{B}$$

$$\phi_{\underline{A}} \to \phi^{T\underline{A}} = H^{\underline{AB}}\phi_{\underline{B}}$$

$$\mathcal{X}^{A}{}_{\underline{B}} \to \mathcal{X}^{T\underline{A}}{}_{\underline{B}} = H^{\underline{AM}} H_{\underline{BN}} \mathcal{X}^{N}{}_{\underline{M}}$$

$$(\phi, \psi) = \phi^{A}\psi^{B} H_{\underline{AB}}$$

$$= \phi^{T}\cdot\psi = \phi\cdot\psi^{T}$$

$$(\phi, \mathcal{X}\cdot\psi) = (\mathcal{X}^{T}\cdot\phi, \psi)$$

signatura metriky

$$(\underbrace{-\cdots-}_{m}\ \underbrace{+\cdots+}_{p})$$

$\mathcal{A}M$

hladké metriky $H \in \mathrm{Sect}\,\mathcal{A}^{0}_{2}M$

lokálně (ultralokálně) isomorfní metr. na $\mathcal{A}$

vektorový SO-bundle

metrický bundle

Def Lokální Kalibrační SO-transformace

R ultralok. lin. zobr. na $\mathrm{Sect}\,\mathcal{A}M$

$$R \in \mathrm{Sect}\,\mathcal{A}^{1}_{1}M$$

$$\phi \to \tilde{\phi} = R\cdot\phi$$

- $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$
- zachovává orientaci

rozšíření na $\mathcal{A}^{k}_{l}M$

$$\mathcal{X}^{A\ldots}_{B\ldots} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}^{A\ldots}_{B\ldots} = R^{A}_{\underline{K}}\ldots R^{-1\underline{N}}_{\underline{B}}\ldots \mathcal{X}^{M\ldots}_{N\ldots}$$

$$\widetilde{(\phi\otimes\psi)} = \tilde{\phi}\otimes\tilde{\psi} \qquad C\tilde{\mathcal{X}} = \widetilde{C\mathcal{X}}$$

$$\tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}} \qquad H_{\underline{AB}} = R^{\underline{M}}_{\underline{A}} R^{\underline{N}}_{\underline{B}} H_{\underline{MN}} \qquad R^{T}\cdot R = \mathbb{1}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{A_1\ldots A_D} = \varepsilon_{A_1\ldots A_D} \qquad \det R = 1$$

Reálný vekt. bundle s SO-symetrií

A $\quad H_{\underline{AB}}$

nedegener. $\Rightarrow$ exist $H^{-1\,\underline{AB}}$

symetrické $\quad H_{\underline{AB}} = H_{\underline{BA}}$

zvedání a snižování indexů

$$H^{\underline{AB}} = H^{-1\,\underline{AB}}$$

transposice

$$\phi^{\underline{A}} \to \phi^{T}{}_{\underline{A}} = H_{\underline{AB}}\,\phi^{\underline{B}}$$

$$\phi_{\underline{A}} \to \phi^{T\underline{A}} = H^{\underline{AB}}\,\phi_{\underline{B}}$$

$$\chi^{\underline{A}}{}_{\underline{B}} \to \chi^{T\underline{A}}{}_{\underline{B}} = H^{\underline{AM}}\,H_{\underline{BN}}\,\chi^{\underline{N}}{}_{\underline{M}}$$

$$(\phi, \psi) = \phi^{A} \psi^{B} H_{\underline{AB}}$$

$$= \phi^{T} \cdot \psi = \phi \cdot \psi^{T}$$

$$(\phi, X \cdot \psi) = (X^{T} \cdot \phi, \psi)$$

signatura metriky

$$(\underbrace{- \cdots -}_{m} \underbrace{+ \cdots +}_{p})$$

$\mathbb{A} M$

hladká metrika $H \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{A}^0_2 M$

lokálně (ultralokálně)

isomorfní metr. na $\mathbb{A}$

vektorový SO-bundle

metrický bundle

Def Kalibrační SO-transformace

R ultralok lin zobr na $\mathcal{S}ect\, \mathbb{A}M$

$R \in \mathcal{S}ect\, \mathbb{A}^1_1 M$

$\phi \rightarrow \tilde{\Phi} = R \cdot \phi$

- $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}) = (\phi, \Psi)$
- zachovávé orientaci

Def Lokální
Kalibrační SO-transformace

R ultralok lin zobr na Sect AM

$R \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$

$\phi \to \tilde{\phi} = R \cdot \phi$

- $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\phi, \psi)$
- zachovává orientaci

rozšíření na $A^q_p M$

$$X^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}} \longrightarrow \tilde{X}^{\underline{A}\dots}_{\underline{B}\dots} = R^{\underline{A}}_{\underline{C}} \dots R^{-1\underline{N}}_{\underline{B}} \dots X^{\underline{M}\dots}_{\underline{N}\dots}$$

$$\widetilde{(\phi \otimes \psi)} = \tilde{\phi} \otimes \tilde{\psi} \qquad C\tilde{X} = \widetilde{CX}$$

$$\tilde{H}_{\underline{AB}} = H_{\underline{AB}} \qquad H_{\underline{AB}} = R^{\underline{M}}_{\underline{A}} R^{\underline{N}}_{\underline{B}} H_{\underline{MN}} \qquad R^T \cdot R = \mathbb{1}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\underline{A}_1 \dots \underline{A}_D} = \varepsilon_{\underline{A}_1 \dots \underline{A}_D} \qquad \det R = 1$$

Def Lokální kalibrační SO-transformace

R ultralokální zobr na Sect AM

$R \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$

$\phi \to \tilde\phi = R\cdot\phi$

- $(\tilde\phi, \tilde\psi) = (\phi, \psi)$
- zachovávání orientaci

rozšíření na $A^k_l M$

$\chi^{A\ldots}_{B\ldots} \longrightarrow \tilde\chi^{A\ldots}_{B\ldots} = R^A{}_K \cdots R^{-1\,N}{}_B \cdots \chi^{K\ldots}_{N\ldots}$

$\widetilde{(\phi\otimes\psi)} = \tilde\phi\otimes\tilde\psi \qquad C\tilde\chi = \widetilde{C\chi}$

$\tilde H_{AB} = H_{AB} \qquad H_{AB} = R^M{}_A R^N{}_B H_{MN} \qquad R^T \cdot R = \mathbb{1}$

$\tilde\varepsilon_{A_1\ldots A_D} = \varepsilon_{A_1\ldots A_D} \qquad \det R = 1$

Lokální kalibr. grupa

Lokální kalibr. Lieova alg

$$R_\alpha = \mathbb{1} + \alpha\Omega + O(\Omega^2)$$

$\Omega \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$

$[\Omega, \Delta] = \Omega\cdot\Delta - \Delta\cdot\Omega$

$\Omega^M{}_A H_{MB} + \Omega^M{}_B H_{AM} = 0$

$\Omega_{BA} + \Omega_{AB} = 0 \qquad \Omega + \Omega^T = 0$

$\Omega^T = -\Omega$

$$R_\alpha = \exp(\alpha\Omega)$$

Trivializace SO-bundlu

Def triv. E_A je konz. s metr. strukturou j.l.:

$H_{AB} = (E_A, E_B) = \text{konst}$ (na M)

Př: volba ortonormální báze

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ 0 & & & & +1 \ \ddots \end{bmatrix}$$

Př: signatura $(-\ldots-+\ldots+)$ $m = p$

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

změna trivializace

$E_A \to \tilde E_A = R\cdot E_A$

$H_{\tilde A\tilde B} = (\tilde E_A, \tilde E_B) = (E_A, E_B) = H_{AB}$

$\phi \in AM \qquad \phi = \phi^A E_A = \phi^{\tilde A}\tilde E_A$

$\phi^A \qquad \phi^{\tilde A}$

pasivní kalibr. transf

$\phi^A = R^A{}_{\tilde M}\phi^{\tilde M} \qquad \tilde E_{\tilde M} = E_A R^A{}_{\tilde M}$

$H_{\tilde A\tilde B} = R^M{}_{\tilde A} R^N{}_{\tilde B} H_{MN} = H_{AB}$

Lokální kalibr. grupa

Lokální kalibr. Lieova alg

$$R_\alpha = \mathbb{1} + \alpha\Omega + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$\Omega \in \mathrm{Sect}\, \mathbf{A}^1_1 M$$

$$[\Omega, \Delta] = \Omega \cdot \Delta - \Delta \cdot \Omega$$

$$\Omega^{\underline{M}}{}_{\underline{A}} H_{\underline{MB}} + \Omega^{\underline{M}}{}_{\underline{B}} H_{\underline{AM}} = 0$$

$$\Omega_{\underline{BA}} + \Omega_{\underline{AB}} = 0 \qquad \Omega + \Omega^T = 0$$

$$\Omega^T = -\Omega$$

$$R_\alpha = \exp(\alpha\Omega)$$

Trivializace SO-bundlu

Def triv. E_A je konz. s metr. strukturou j.l.:

$$H_{AB} = (E_A, E_B) = \text{konst}$$
(na M)

Př: volba ortonormální báze

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & +1 & \\ 0 & & & & +1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Př: signatura $(-\dots-+\dots+)$ $\quad m=p$

$$H_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

změna trivializace

$$E_A \to \tilde{E}_A = R \cdot E_A$$

$$H_{\tilde{A}\tilde{B}} = (\tilde{E}_A, \tilde{E}_B) = (E_A, E_B) = H_{AB}$$

$$\Phi \in AM \qquad \Phi = \Phi^A E_A = \Phi^{\tilde{A}} \tilde{E}_A$$

$$\Phi^A \qquad \Phi^{\tilde{A}}$$

pasivní kalibr. transf.

$$\Phi^A = R^A{}_{\tilde{M}} \Phi^{\tilde{M}} \qquad \tilde{E}_{\tilde{A}} = E_A R^A{}_{\tilde{M}}$$

$$H_{\tilde{A}\tilde{B}} = R^M{}_{\tilde{A}} R^N{}_{\tilde{B}} H_{MN} = H_{AB}$$