DIFERENCIÁLNÍ FORMY V GR

Základní myšlenky. (důkazy obvykle nedělám).

(Podle skript W. Israele, 1980) – jen pro zopakování –

Tensor lze definovat jako multilineární fci vektorových argumentů: např. tensor 2. řádu $T_{\alpha\beta}$ lze navzájem jednoznačně přiřadit bilineární skalární fci 2 vektorových argumentů:

$$T(\vec{u},\vec{v}) \equiv T_{\alpha\beta}\, u^\alpha v^\beta$$

Když specifikuji hodnoty $T(\vec{u},\vec{v})$ pro vš. $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (stačí ve skutečnosti jen pro všechny dvojice vektorů nějaké base), mám tím definován $T_{\alpha\beta}$.
Výhoda: definice nezávislá na souř. (viz. specifikuji skaláry).

Diferenciální forma

je multilineární skalární fce asociována s tensorem, který je (efektivně) zcela antisymetrický ("completely skew").
Např., je-li $F_{\alpha\beta}$ lib. tensor 2. řádu, pak
2-forma je def. jako

$$\boxed{\Phi(d\vec{x}, d\vec{y}) \equiv 2!\,F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}}$$

– za chvíli uvidíme důvody, proč je výhodné psát vektorové argumenty "$\vec{u},\vec{v}$" jako diferenciály.
– $\boxed{dx^{[\alpha} dy^{\beta]}} \equiv \frac{1}{2!}\left(dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha\right)$, takže

$$\phi(d\vec{x}, d\vec{y}) = \frac{2!}{2!} F_{\alpha\beta}\left(dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha\right) = \left(F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\right) dx^\alpha dy^\beta$$

(Tj. je-li $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ .. antisym. tensor, je $\phi = 2F_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dy^\beta$)

Proto, že $\phi = (F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha})\,dx^\alpha dy^\beta$, je vidět, že můžeme užít lib. tensoru (zde tensoru 2. řádu $F_{\alpha\beta}$); ovšem v přidružení formě hraje roli pouze antisymetrická část tensoru

1-forma odpovídá vektoru $\Theta(d\vec{x}) = A_\alpha\, dx^\alpha$

0-forma je skalár

Rovnost, součet a násobení číslem jsou definovány samozřejmým způsobem vždy pomocí asociovaného antisym. tensoru.

Vnější součin

("wedge product", nebo "exterior product")

vnější součin p-formy a q-formy je $(p+q)$-forma, kterou získáme tak, že vezmeme tensorový součin odpovídajících tensorů (tj. asociovaných s p-formou a s q-formou) a antisymetrisujeme jej.

Příklad:

2-forma $\phi(d\vec{x}, d\vec{y}) = 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}$; 1-forma $\Theta(d\vec{x}) = A_\alpha dx^\alpha$

Jejich vnější součin $\boxed{\psi \equiv \phi \wedge \Theta}$ je 3-forma

$$\boxed{\psi(d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}) = 3!\, F_{\alpha\beta} A_\gamma\, dx^{[\alpha} dy^{\beta} dz^{\gamma]},}$$

$$\begin{vmatrix} dx^\alpha & dx^\beta & dx^\gamma \\ dy^\alpha & dy^\beta & dy^\gamma \\ dz^\alpha & dz^\beta & dz^\gamma \end{vmatrix}$$

kde

$$dx^{[\alpha} dy^{\beta} dz^{\gamma]} \overset{\text{ozn.}}{\equiv} \frac{1}{3!}\Big(+ dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma - dx^\beta dy^\alpha dz^\gamma + dx^\beta dy^\gamma dz^\alpha - dx^\alpha dy^\gamma dz^\beta + dx^\gamma dy^\alpha dz^\beta - dx^\gamma dy^\beta dz^\alpha \Big)$$

toto zřejmě neplatí obecně pro tensor 4. a dalšího řádu – to, co musím udělat, je vzít determinant z složek – pak je vše antisym., ale můj recept pro už 4. řád nevede na determinant

~~obecný recept pro antisymetrisaci : členy s (+) vznikají cyklickou permutací viz $+\alpha\beta\gamma$ $+\beta\gamma\alpha$ $+\gamma\alpha\beta$~~

~~členy s (−) vznikají tak, že v předcházejícím členu s (+) spolu vždy prohodím indexy α a β (tj. první dva); ovšem stejně dobře to mohu dělat tak, že prohodím vždy první dva indexy v členu s (+) a dám (−). Toto očividně i pro obecný tensor – musím udělat vždy všechny členy s (+) – s cyklickou permutací všech indexů, ale s každým členem hned dát (−) člen, v němž stále jsou prohozeny buď dva první indexy anebo 2 indexy na dvou pevných místech.~~

Věta:

Jestliže α, β jsou formy stupně a, b, pak platí

$$\boxed{\alpha \wedge \beta = (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha}$$

? Tj. vnější součin antikomutuje, jestliže jsou oba faktory a, b liché; jinak komutuje.

Dokažte

Speciálně

$$\boxed{\theta \wedge \theta = 0}, \text{ jestliže } \theta \text{ je lichého stupně}$$

viz $(a.b)$ je liché – součin lichého čísla s lichým

[Např. pro $\theta_1 = A_\alpha dx^\alpha$, $\theta_2 = B_\beta dy^\beta$

Pak $\theta_1 \wedge \theta_2 = 2!\, A_\alpha B_\beta\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = \underbrace{(A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha)}_{\equiv C_{\alpha\beta}} dx^\alpha dy^\beta$

viz úkce souvisí s vekt. součinem

jasně je vidět, že bude význam pro integrování!

a jasně $\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$, když $\theta_1 = \theta_2$

viz vekt. součin vektorů se sebou samým]

Avšak $f \wedge f = f^2$ pro 0-formu (tj. skalár)

a pro 2-formy je

$\phi \wedge \phi \longleftrightarrow F_{[\alpha\beta} F_{\gamma\delta]}$ což je obecně $\neq 0$.

$$\frac{1}{2!} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = C_\gamma$$

$$= , \quad \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

Vektorový součin má geometrický smysl jen v E_3 — viz Bishop & Goldberg i další

Vnější diferenciál ("Exterior differential")

Uvažujme tensorová pole v Riem. prostoru. Jim přidružené p-formy jsou pak skalárními poli, které závisí na p vektorových argumentech (tj. vektor. polích)

Vnější diferenciál p-formy je $(p+1)$-forma, kterou získáme tím, že provedeme parciální nebo kovariantní derivaci (nezáleží na tom kterou! - neboť antisymetrisací vypadnou Christoff. symboly) asociovaného tensoru p-tého řádu.

↳ viz definice forem je nezáv. na existenci metriky

Př.:

Vnější diferenciál 2-formy $\phi = 2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]}$ je 3-forma

$$d\phi(d\vec{x}, d\vec{y}, d\vec{z}) = \begin{cases} 3!\, \partial_\alpha F_{\beta\gamma}\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]} = \\ 3!\, F_{\beta\gamma,\alpha}\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]} = \end{cases}$$

$$= 3!\, F_{\beta\gamma;\alpha}\, dx^{[\alpha} dy^\beta dz^{\gamma]}$$

Pro skalární formu je:

$$df(d\vec{x}) = (\partial_\alpha f)\, dx^\alpha$$

Velmi užitečný je vzorec, který platí pro lib. formu Ω a skalár f:

$$\boxed{d(f\Omega) = f\, d\Omega + df \wedge \Omega}$$

Toto je ve skutečnosti speciálním případem obecné identity

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^a\, \alpha \wedge d\beta} \qquad a \equiv \deg \alpha$$

Dále platí důležitá věta, že totiž vnější dif. z vnějšího diferenciálu je $\equiv 0$:

$$\boxed{d^2\Omega \equiv 0}$$ pro jakékoliv Ω

viz při druhém deriv. se objeví $\partial_\alpha \partial_\beta$, což vypadne s antisymetr. $dx \ldots$

Diferenciály souřadnic

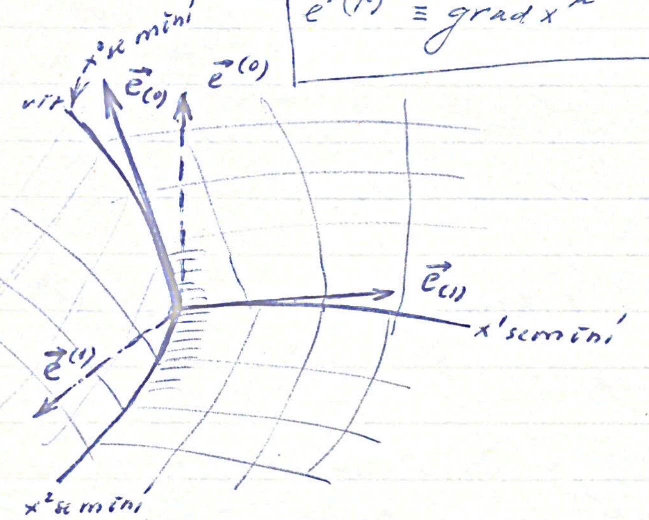
Když je vybrán určitý systém souřadnic $(x^1, \dots x^n)$, jsou funkce x^μ skalární pole.
(Toto jasně jmenovité při rigorósním zavádění souřadnic, vektorů, atd. – viz Kob. & Nom. například – x^μ jsou fce
"názorně" si mohu představovat, že x^μ jsou dány jako fce nějakých parametrů p^μ –, které bezprostředně charakterisují bod variety – zde se také – i dalším – projeví výhoda definicí nezáv. na transf. souřadnic – stále pracujeme v jedněch souřadnicích

antilinco vektory „šipky"

viz $r \rightsquigarrow 4\pi r^2 = S$ ve Schw.

Když máme souřadný systém x^μ, pak zavádíme souřadné vektory base

$\vec{e}^{(\mu)} \equiv \text{grad}\, x^\mu$ – tj. jde o kovariantní basi vektory kolmé k souř. plochám $x^\mu = \text{const.}$
To je přirozená base, když je vybrán souř. systém x^μ – samozřejmě, když změním souřadnice, mění se i přirozená base
– tato kovariantní base ovšem liší od RSSD65, neboť Kip má vektory normovány



Jejich (kovariantní) složky v tomto speciálním souř. systému jsou

$$e^{(\mu)}_{\alpha} = \delta^\mu_\alpha$$

(To jasné – viz kovariantní složky A_α vektoru $\vec{A}$ definují pomocí $\vec{A} = A_\alpha \vec{e}^{(\alpha)}$
– viz toto není pravda u RSSD66, neboť tam jsou $\vec{e}^{(\mu)}$ normovány, takže v daném souř. systému jsou jejich kovar. složky rovny

$$\vec{e}^{(\mu)}_{\alpha} = \delta^\mu_\alpha \sqrt{|g^{\mu\mu}|}$$ (nesčítá se přes μ – viz str. 48 výpisky RSSD66)

Moderně: $X = u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ $\partial^a f$; $\Rightarrow df(X) = X(f)$; x^1 $dx^1(dy) = dy^\alpha \frac{\partial x^1}{\partial x^\alpha} = \delta^1_\alpha dy^\alpha$

$df(\vec{u}) = \partial_\alpha f u^\alpha$

Nyní vnější diferenciál 0-formy, tj. skaláru x^1 je

$$\boxed{dx^1(d\vec{y})} = (\partial_\alpha x^1)\, dy^\alpha = \frac{\partial x^1}{\partial x^\alpha} dy^\alpha = \delta^1_\alpha dy^\alpha = dy^1$$

podle def. vnějšího dif.

1-forma

„d" jen, že jde o „krátký" vektor

toto je lib. vektor – viz vždy píšeme jako $d\underline{\underline{y}}$ – tj. argument 1-formy, která vznikne vnějším deriv. 0-formy x^1

Ze získaného vztahu:

$$dx^1(d\vec{y}) = \underbrace{\delta^1_\alpha}_{= \vec{e}^{(1)}_\alpha} dy^\alpha \quad \text{vidíme, že}$$

‖ vnější dif. x^1 je 1-forma přidružená k $\vec{e}^{(1)}$ ‖

(Přitom se zde jasně objevuje „klasická" definice duální base – viz duální base je tvořena formami, které reprodukují vždy příslušnou kontravar. složku vektoru – zde dx^1 (jako forma právě!) přiřazuje vektoru $d\vec{y}$ jeho prvou složku dy^1!

Moderní řečeno

– kontravar. base je $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$; kovariantní base je dx^μ

– přitom dx^μ je vzájemně jednoznačně přiřazeno k $\vec{e}^{(\mu)}$.)

Israel: ve vztahu $dx^1(d\vec{y}) = \delta^1_\alpha dy^\alpha$ je symbol „dx^1" užit v novém a zcela jasném smyslu. Zatímco dříve to bylo prostě číslo, tj. složka vektorového argumentu – krátce vektoru $d\vec{x}$ (který spojuje dva blízké body), zde „dx^1" značí 1-formu, tj. funkci ~~vektor~~, přičemž argumentem je lib. vektor dy^α.

Avšak když vektorovým argumentem je právě $d\vec{x}$ (což se normálně užívá), je rozdíl ~~mezi~~ „dx^1" jako fce a jako čísla nepodstatný při počítání – a toto duální užívání symbolu dx^μ je velmi užitečné a málokdy vede k potížím.

$dx^1(d\vec{x}) = dx^1$ ... jde vlastně o značení fce stejně jako funkční hodnoty.

V rigorózní geometrii

<u>Lineární dif. forma na M</u>

Zobrazení, které každému $m \in M$ přiřadí lin. formu

ω_m na tečném prostoru $T_m M$ (a co je forma ve vekt. prostoru víme)

ω_m vytváří $T_m^* M$ (duální prostor k T_m)

<u>Příklad</u> - hladká (C^∞) fce f na varietě $f(x^\alpha)$

její diferenciál je <u>def</u>:

$$df(\underline{t}) = \underline{t}(f) \quad \text{je to 1-forma}$$

mohu psát

$$\underline{t} = t^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \Rightarrow \quad df(\underline{t}) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} t^\alpha$$

$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ je baze souřadnicová v $T(M)$ ... $\alpha = 1, \dots n$

k ní duální je dx^α ... $f = x^\alpha$ ... α pevné

$$dx^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

baze dx^α => každá forma

$$\omega = \sum \omega_\alpha dx^\alpha \Rightarrow \omega_\alpha dx^\alpha$$

souřadnice formy ω

pro $\omega = df$: $\quad df = \overset{\omega_\alpha}{\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}} dx^\alpha$

Příklad:

Uvažujme určité kartézské souřadnice x^1, x^2, x^3 v E_3. Máme k dispozici 3 skaláry, tj. 3 0-formy a z nich můžeme vyrobit 3 1-formy dx^1, dx^2, dx^3 vnějším derivováním – z nich pak 3-formu vnějším násobením:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Tato 3-forma přiřazuje lib. 3 vektorům $d\vec{u}$, $d\vec{v}$, $d\vec{w}$ číslo, které je rovno objemu 3-cely vytvořené těmito vektory:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 (d\vec{u}, d\vec{v}, d\vec{w}) = \text{podle def. viz}$$

$$dx^1 \leftrightarrow \delta^1_\alpha \qquad dx^2 \leftrightarrow \delta^2_\alpha \qquad dx^3 \leftrightarrow \delta^3_\alpha$$

$$= 3!\, \delta^1_{[\alpha} \delta^2_\beta \delta^3_{\gamma]}\, du^{\alpha} dv^\beta dw^{\gamma}$$

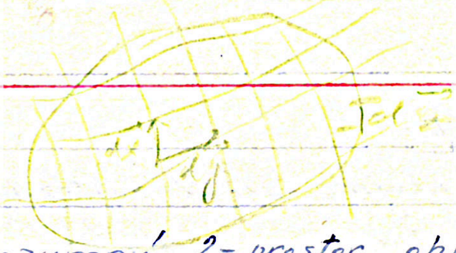
$$= \boxed{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha dv^\beta dw^\gamma}$$

Ovšem, když si zvolíme $d\vec{u}$, $d\vec{v}$, $d\vec{w}$ podél souř. os, tj. $d\vec{u} = (dx^1, 0, 0)$, $d\vec{v} = (0, dx^2, 0)$, $d\vec{w} = (0, 0, dx^3)$, pak dostáváme

$$\boxed{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \underbrace{(\ldots)}_{\text{toto se obv. vůbec nepíše}} = \underbrace{dx^1 dx^2 dx^3}_{\text{normální součin čísel}}}$$

tj. dostaneme standardní tvar elementu objemu.

Musíme pouze mít na paměti, že $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = dx^1 dx^2 dx^3$ je numerický vztah, který platí pro speciální (ale přirozenou) volbu vektorových argumentů.



Integrály

Nechť V_2 je nějaký rozumný 2-prostor ohraničený ∂V_2 – což je jedna (případně více než jedna) uzavřená křivka. Dělá jen intuitivně. Představme si V_2 rozděleno libovolným spojitým způsobem do infinitesimálních 2-cel $(d\vec x, d\vec y)$ a ∂V_2 rozděleno pomocí infinitesimálních úseček $d\vec z$.

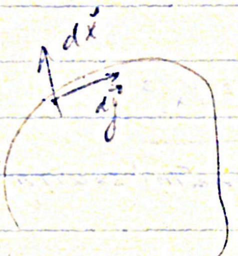
Pak má Stokesova věta tvar: (přitom ovšem dimenze prostoru, v němž je V_2, může být lib.)

$$(*) \qquad 2!\iint_{V_2} \partial_\lambda A_\mu \, dx^{[\lambda} dy^{\mu]} = \int_{\partial V_2} A_\mu \, dz^\mu ,$$

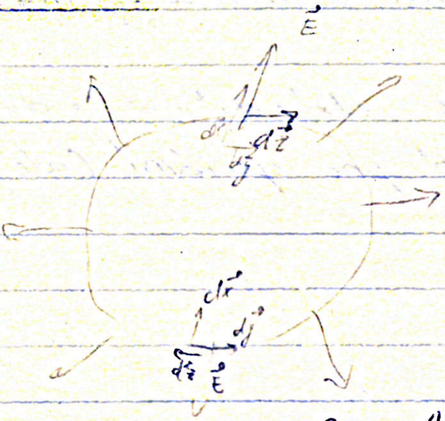
kde je třeba předepsat vhodně smysl $d\vec z$ a $d\vec x, d\vec y$ – tj. orientaci – viz moje pozn. o Gauss. a Stokesově větě ve Synge

(Podmínka je, že – je-li $\vec E$ lib. vektor mířící ven ze V_2 – $\underbrace{(\vec E, d\vec z)}_{\text{jako dvojice}}$ je stejně orientováno jako $(d\vec x, d\vec y)$, tj.

$$\varepsilon(d\vec x)\,\varepsilon(d\vec y)\, E_\lambda dz_\mu dx^{[\lambda} dy^{\mu]} > 0 \text{ na } \partial V_2$$



toto ε: -1 …, $+1$, 0 podle toho, je-li vektor "v něm" stojící prostorový, časový, nulový)



$$\int \mathrm{rot}\vec A \, d\vec S = \int \vec A \, d\vec z$$

$$\int \varepsilon_{ijk} A_{k,j} \, dS_i$$

$$dS_i = \varepsilon_{irs} \, dx_r dy_s$$

$$\varepsilon_{ijk} A_{k,j} dS_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irs}}_{\delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}} A_{k,j} \, dx_r dy_s$$

$$= A_{s,r} dx_r dy_s - A_{r,s} dx_r dy_s = \partial_r A_s (dx_r dy_s - dx_s dy_r)$$