Riemannovská geometrie.

Úvod – přehled výsledků

Tradiční přístup užívá Christ. symboly – diff. formy umožňují nahradit tento neohrabaný starý přístup mnohem elegantnějším – v podstatě nejde o nic jiného než o přepis pomocí Ricciho rotačních koeficientů.

$\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}$

Nechť $\vec{e}^{(1)} \dots \vec{e}^{(n)}$ je lib. množina n (lin.) nezávislých vektorových polí, která tvoří úplnou basi (frame) v každém bodě (jak ordále jasně ukázáno – kovariantní basi).

Ricciho rotačního koeficienty $\boxed{\gamma^{a}_{\ bc}}$ přidružené $\vec{e}^{(a)}$ jsou množinou n^3 čísel (skalárů při souřadných transformacích), které udávají složky (vzhl. k n-ádě) kovariantních derivací vektorů $\vec{e}^{(a)}$ (viz rovnice (+) dále na str. (13b))

A ukazuje se, že Riemannův tensor lze vyjádřit pomocí $\gamma^{a}_{\ bc}$ a jejich 1. parciálních der.

V nové formulaci budeme především uvažovat (1) množinu 1-forem $\boxed{\Theta^{a}(d\vec{x}) \equiv e^{(a)}_{\ \alpha}\, dx^{\alpha}}$ asociovanou k basi $\vec{e}^{(a)}$ terminicky „gradient" [illegible]

(viz $\alpha, \beta, \dots \mu \dots$ značí souřadnice a tensorové složky vzhledem k těmto souřadnicím; indexy $a, b, c \dots$ se vztahují k basi $\vec{e}_{(a)}$ (resp. $\vec{e}^{(a)}$) tj. označují o kolikátý vektor jde a chovají se jako skaláry při souřadnicových transformacích). (2) n^2 1-forem konexe $\boxed{\omega^{a}_{\ b} \equiv \gamma^{a}_{\ bc}\, \Theta^{c}}$ a (3) 2-formy křivosti $\boxed{\Omega^{a}_{\ b} \equiv \frac{1}{2} R^{a}_{\ bcd}\, \Theta^{c} \wedge \Theta^{d}}$,

kde $R^{a}_{\ bcd}$ jsou tetrádové (obecně n-ádové) složky Riem. tensoru. (Už teď jsou vidět výhody: $\omega^{a}_{\ b}$ i $\Omega^{a}_{\ b}$ nemají vůbec indexy c, d, které jsou zde „zbytečné" a přitom se žádná informace neztratí)

Podstata celé Riem. geometrie je shrnuta v „rovnicích struktury", které spolu svazují vnější diferenciály $d\Theta^{a}$ s $\omega^{a}_{\ b}$, a $d\omega^{a}_{\ b}$ s $\Omega^{a}_{\ b}$.

Tradiční přístup je zahrnut jako speciální případ:
n-ády musí být kolmé na souřadnicovou síť,
tj. $\vec{e}^{(a)} = \operatorname{grad} x^{a}$ — pak $\gamma^{a}_{\ bc}$ jsou obyč. Christ. symboly

Avšak náš formalismus umožní i jiné volby $\vec{e}^{(a)}$, které mají bezprostřední fysikální či geometrický význam, např. ortonormální tetrády, které se posunují podél světočar hmoty, nebo Sachsovy nulové tetrády, které jsou definovány hlavním nulovým vektorem Riem. tensoru.

Navíc k pojmovým výhodám jsou ovšem i obrovské výhody početní, které vznikají z toho, že v obou uvedených případech (tj: ortnorm. base podél hmoty a Sachsovy tetrády) - je matice $\vec{e}^{(a)} \cdot \vec{e}^{(b)}$ konstantní - což zjednodušuje spoustu výpočtů.

Základní 1-formy -

$e^{\alpha}_{(a)}$ ← složky
← o kolikátý vektor jde

Uvažujme n lineárně nezáv. vekt. polí $\vec{e}_{(a)}(x^{\mu})$ (viz zde už kontrav. -normální base); $e^{\alpha}_{(a)}$ jsou kontravariantní složky těchto vektorů. Definujeme "frame komponenty" (n-ádové / tetrádové složky ve 4 dimensích) lib. tensoru $T_{\alpha\beta\ldots}$:

$$\boxed{T_{ab\ldots} \equiv T_{\alpha\beta\ldots}\, e^{\alpha}_{(a)}\, e^{\beta}_{(b)} \ldots}$$

Zavedeme matici skalárních součinů vektorů base:

$$\boxed{g_{ab} \equiv \vec{e}_{(a)}\, \vec{e}_{(b)}\,,}$$ — tj. nemusí být ⊥

tj. rozepsáno $$\boxed{g_{ab} = g_{\alpha\beta}\, e^{\alpha}_{(a)}\, e^{\beta}_{(b)}}$$ — tj. jako F-W

g_{ab} jsou tedy tetrádové složky metrického tensoru $g_{\alpha\beta}$.

$\vec{e}_{(a)}$ jsou nezáv. $\Rightarrow$ g_{ab} má inversní sym. matici g^{ab}

tj.
$$g^{ab} g_{ac} = \delta^b_c$$

Definujeme duální basi

(1) $$\boxed{\vec{e}^{\,(a)} \equiv g^{ab}\, \vec{e}_{(b)}}$$

Platí $$\vec{e}^{\,(a)} \cdot \vec{e}_{(b)} = \delta^a_b$$

(tj. $e^{(a)}_{\alpha}$, $e^{\ \beta}_{(b)}$ jsou inversní matice)

vynásob (1) $\vec{e}_{(c)}$

$\vec{e}_{(c)}\, \vec{e}^{\,(a)} = g^{ab} \underbrace{\vec{e}_{(b)} \vec{e}_{(c)}}_{g_{bc}} = \delta^a_c$; $e^{(a)}_{\alpha}\, e^{\ \beta}_{(a)} = \delta^{\beta}_{\alpha}$

Stř. mtoje konsistentní ~~...~~ posunování indexů a, b.. pomocí g_{ab}, g^{ab}

Zavedeme 1-formy asociované s těmito vektory duální base:

viz dole na str. (13')

$g_{ab} = g_{\alpha\beta}\, e^{\ \alpha}_{(a)} e^{\ \beta}_{(b)} \,/\, e^{(a)}_{\gamma}$

$e_{(b)\gamma} = e_{(b)\alpha} \left(e^{\ \alpha}_{(a)} e^{(a)}_{\gamma}\right)$ užije dále

$a = 1, \dots n$ $\Rightarrow = \delta^{\alpha}_{\gamma}$

(1) $$\boxed{\Theta^a = e^{(a)}_{\alpha}\, dx^{\alpha}}$$

$\Rightarrow$ přepsát ve tvaru

$$\Theta^a(d\vec{x}) = \vec{e}^{\,(a)} \cdot d\vec{x} = e^{(a)}_{\alpha} dx^{\alpha}$$

(2) $$dx^{\alpha} = e^{\ \alpha}_{(a)}\, \Theta^a$$

Tyto vztahy (1), (2) lze interpretovat dvěma způsoby, naznačenými na str. (3b) – tj. jako (1) numerické vztahy, přičemž $d\vec{x}$ ($= dx^{\alpha}$) je prostě lib. vektorový argument dosazovaný do formy Θ^a tj. $\Theta^a(d\vec{x}) = e^{(a)}_{\alpha} dx^{\alpha}$; anebo je chápeme jako (2) lineární vztah mezi formami Θ^a a dx^{α} ne $dx^{\alpha}(d\vec{x}) = \underbrace{dx^{\alpha}}_{\text{složka } d\vec{x}}$

Z úvah na str. (3b) – i zde – je jasné, že

$\Theta^{\alpha} = dx^{\alpha}$, když $e^{(a)}_{\alpha} = \delta^a_{\alpha}$, tj. jde-li o přirozenou basi (grad x^{α}).

| Θ^a tvoří basi všech 1-forem |:

Jelikož $\vec{e}^{\,(a)}$ tvoří úplnou vektorovou basi, tvoří Θ^a basi všech 1-forem.

Explicite: 1-forma již dříve zavedená jako $\alpha = A_{\alpha} dx^{\alpha}$

ale $$\alpha = A_{\alpha} dx^{\alpha} = A_{\alpha} e^{\ \alpha}_{(a)} \Theta^a = \underline{A_a}\ \Theta^a$$

tj. lib. 1-forma α se může psát jako lineární kombinace forem Θ^a:

$\boxed{\Theta^a \wedge \Theta^b \text{ tvoří basi všech 2-forem:}}$

Podobně platí $\qquad dx^\alpha = e^\alpha_{(a)}\,\Theta^a$

$$\boxed{2!\, F_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = F_{ab}\,\Theta^a\wedge\Theta^b}$$

Pro lib. 2-formu $\Rightarrow$ $\Theta^a\wedge\Theta^b$ tvoří basi všech 2-forem a snadno lze pokračovat dál.
(Speciálně při přirozené basi jsou basemi dx^α, $dx^\alpha\wedge dx^\beta$, ...

$\boxed{\text{Vyjádření intervalu pomocí forem:}}$

Platí $\quad g_{ab} = g_{\alpha\beta}\, e^\alpha_{(a)}\, e^\beta_{(b)} \quad$ a $\quad \Theta^a = e^{(a)}_\alpha\, dx^\alpha$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = g_{ab}\,\Theta^a\,\Theta^b}$$

$ds^2(d\vec{x}) = g_{ab}\,\underbrace{\Theta^a(dx)\,\Theta^b(dx)}_{\text{součin hodnot } \Theta\text{-forem}}$

D: $\quad g_{ab}\,\Theta^a\Theta^b = g_{\alpha\beta}\, e^\alpha_{(a)}\, e^\beta_{(b)} \cdot e^{(a)}_\gamma dx^\gamma\, e^{(b)}_\delta dx^\delta =$ $\qquad \delta^\alpha_\gamma \qquad \delta^\beta_\delta$

$$= g_{\gamma\delta}\, dx^\gamma dx^\delta$$

Příklad – Gaussovské polární souřadnice ρ, φ na nějakém 2-prostoru (tj. ploše).

Metrika má tvar:

$$\boxed{ds^2 = d\rho^2 + [f(\rho,\varphi)]^2\, d\varphi^2}$$

(Když např. $f = \rho$, jde o $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ .. tj. polární souřadnice v rovině; jestliže $f = \sin\rho$, pak $ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\varphi^2$
– pak, když si položím $\rho = \vartheta$, mám $ds^2 = 1(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$,
tj. polární souřadnice na jednotkové kouli)

Za $\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}$ zvolme <u>jednotkové</u> vektory podél souř. čar ρ, φ (to <u>není</u> přir. basa – ta má složky δ:)

tj. $\quad \vec{e}_{(1)} = \left(\frac{1}{\underbrace{\sqrt{g_{11}}}_{1}}, 0\right), \quad \vec{e}_{(2)} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\right) = \left(0, \frac{1}{f}\right)$

takže opravdu – např. $\vec{e}_{(2)}\cdot\vec{e}_{(2)} = g_{\alpha\beta}\, e^\alpha_{(2)}\, e^\beta_{(2)} = g_{22}\left(e^2_{(2)}\right)^2 = f^2\frac{1}{f^2} = 1$

V každém případě

$$g_{ab} = \vec{e}_{(a)} \vec{e}_{(b)} = \delta_{ab}, \Rightarrow g^{ab} = \delta^{ab}$$

takže $\boxed{\vec{e}^{(a)} = g^{ab}\vec{e}_{(b)} = \vec{e}_{(a)}}$ ... ~~...~~

Značí-li nyní $dx^\alpha = (d\varrho, d\varphi)$ libovolné posunutí, je

$$\boxed{\Theta^1_{(d\vec{x})} = \vec{e}^{(1)} d\vec{x} = e^{(1)}_\alpha dx^\alpha = d\varrho}$$

$$\boxed{\Theta^2_{(d\vec{x})} = \vec{e}^{(2)} d\vec{x} = e^{(2)}_\alpha dx^\alpha = f\, d\varphi} \qquad (\text{viz } e^{(2)}_\alpha = \sqrt{g_{22}})$$

a metriku lze tedy psát ve tvaru:

$$\boxed{ds^2 = (\Theta^1)^2 + (\Theta^2)^2}$$

1-formy konexe

Kovariantní diferenciál def. (viz Israeliho formalismus k slupkám)

$$D\vec{e}_{(a)} \equiv \vec{e}_{(a)}(x+dx) - \vec{e}_{\parallel(a)}(x) \quad !$$

$\boxed{DU^\mu = U^\mu{}_{;\nu} dx^\nu}$

tj. jako změnu $\vec{e}_{(a)}$ při malém posunutí (přitom jde vlastně o norm. dif. ~~neboť kde je base!~~)

Ve složkách: $\boxed{[D\vec{e}_{(a)}]^\alpha \stackrel{def}{=} \underbrace{e^\alpha_{(a);\gamma}}\, dx^\gamma}$ (o) ✓ tj. předp. Γ.. zadáno je affinní konexe; nemusí být Christoffely

$(\nabla \vec{e}_{(a)})^\alpha$

toto mohu ovšem odtud vyjádřit

$D\vec{e}_{(b)}$ je vektor v x^α $\Rightarrow$ lze jej vyjádřit jako lin. kombinaci lokální base:

$$\boxed{D\vec{e}_{(b)} = \omega^c{}_b\, \vec{e}_{(c)}}, \text{ kde } \omega^c{}_b(d\vec{x}) \text{ jsou}$$

mohu chápat jen jako 1-formy

1-formy $\underline{\text{konexe}}$ $\underline{\text{— viz}}$ $d\vec{x}$ se musí napravo objevit — je už napravo v (o)

$\omega^c{}_b$ ... značí jen o "kolikátou" formu jde

helpi : (o) jako 1-formy

dál str. 131

Že jde jasně o 1-formu je vidět i z toho, když se ze vztahu

$$D\vec{e}_{(b)} = \omega^c{}_b\, \vec{e}_{(c)}$$ formy $\omega^c{}_b$ vyjádří

(to se musí vynásobit skalárně obě strany $\vec{e}^{(a)}$, užít $\vec{e}^{(a)}\vec{e}_{(c)} = \delta^a_c$ a $\Rightarrow D(\vec{e}^{(a)}\vec{e}_{(b)}) = 0$; pak najde (viz 131))

$$\boxed{\omega^a{}_b = -e^{(a)}{}_{\beta;\gamma}\, e^{\beta}_{(b)}\, dx^{\gamma}} \qquad (+)$$

zde by se podrobněji mělo psát $\omega^a{}_b(d\vec{x})$

nyní Ricciho rotační koef. se obv. definují jako

skaláry! ← $$\boxed{\gamma^a{}_{bc} \equiv -e^{(a)}{}_{\beta;\gamma}\, e^{\beta}_{(b)}\, e^{\gamma}_{(c)}}$$

takže pro $\omega^a{}_b$ máme:

$$\boxed{\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc}\, \Theta^c}$$ $\qquad \Theta^c = e^{(c)}_{\beta}\, dx^{\beta}$

jde o rozložení 1-forem konexe $\omega^a{}_b$ do base Θ^c - což opět 1-formy

Z(+) po úpravách $\Rightarrow$

$$\boxed{D\vec{e}^{(a)} = -\omega^a{}_b\, \vec{e}^{(b)}}$$

(Tj. pro zapamatování - 1-formy konexe určují $D\vec{e}^{(a)}$ i $D\vec{e}_{(a)}$ a jsou lin. kombinací base jednoforem $\Theta^a = \vec{e}^{(a)}_{\alpha}\, dx^{\alpha}$ s koeficienty, kt. jsou rovny Ricciho rotačním koeficientům)

13'

Vycházíme z: $\boxed{D\vec{e}_{(b)} = \omega^c{}_b \, \vec{e}_{(c)}} \Big/ \cdot \vec{e}^{(a)}$

$$\vec{e}^{(a)} D\vec{e}_{(b)} = \omega^c{}_b \underbrace{\vec{e}_{(c)} \vec{e}^{(a)}}_{\delta^a_c} .$$

ale

$$D(\underbrace{\vec{e}^{(a)} \vec{e}_{(b)}}_{\text{číslo}}) = \vec{e}^{(a)} D\vec{e}_{(b)} + \vec{e}_{(b)} D\vec{e}^{(a)} = 0$$

číslo ; kov. der. = normální ... přitom to číslo je δ^a_b = konst.

$$\Rightarrow \quad - \vec{e}_{(b)} D\vec{e}^{(a)} = \omega^a{}_b$$

$$\boxed{\omega^a{}_b} = - \vec{e}_{(b)} \cdot D\vec{e}^{(a)} = - e^\beta_{(b)} \left[D\vec{e}^{(a)}\right]_\beta = - e^\beta_{(b)} e^{(a)}_{\beta;\gamma} dx^\gamma$$

$$= - e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} dx^\gamma$$

$\omega^a{}_b(d\vec{x})$

přitom $$\boxed{\gamma^a{}_{bc} = - e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}}$$ — vlastně projekce kov. der. báze

$$\boxed{\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc} \theta^c} \quad \Big(= - e^{(a)}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} \underbrace{\underbrace{e^\gamma_{(c)} e^{(c)}_\mu}_{\delta^\gamma_\mu} dx^\mu}_{\text{„} dx^\gamma \text{"}} \Big)$$

$$\omega^a{}_b = - \vec{e}_{(b)} D\vec{e}^{(a)} \quad \Big/ \cdot \vec{e}^{(b)}$$

$$e^{(b)}_\beta \omega^a{}_b = - \underbrace{e^{(b)}_\beta \left[e^\gamma_{(b)}\right.}_{\text{musí} = \delta^\gamma_\beta} \left. e^{(a)}_{\gamma;\delta} dx^\delta \right] = - e^{(a)}_{\beta;\delta} dx^\delta$$

$$= - De^{(a)}_\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D\vec{e}^{(a)} = - \omega^a{}_b \vec{e}^{(b)}}$$

viz:

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} \underbrace{e^\alpha_{(a)}} e^\beta_{(b)} \quad \Big/ e^{(a)}_\gamma$$

$$e_{(b)\gamma} = e_{(b)\alpha} \underbrace{\left(e^\alpha_{(a)} e^{(a)}_\gamma \right)}_{\text{musí} = \delta^\alpha_\gamma}$$

– Vyjdeme z rovnice $g_{ab} = \vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(b)}$

a vezmeme její diferenciál (zde je jedno, zda tento "diferenciál" interpretujeme jako kovariantní, obyčejný anebo vnější dif., neboť každé g_{ab} s pevnými $\underline{a}, \underline{b}$ je skalár).

Vyjde:
$$dg_{ab} = Dg_{ab} = \vec{e}_{(a)} D\vec{e}_{(b)} + \vec{e}_{(b)} D\vec{e}_{(a)} = \underbrace{\vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(c)}}_{= g_{ac}} \omega^c{}_b + \underbrace{\vec{e}_{(b)} \vec{e}_{(c)}}_{= g_{bc}} \omega^c{}_a =$$

$$\boxed{dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}}$$

(výhodné je d( ) interpretovat jako "vnější" "dif. – ovšem ze skaláru, takže je to obyčejný diferenciál a výsledkem ovšem musí být 1-forma – což je – viz $\omega_{ab} + \omega_{ba}$)

$\Rightarrow$ závěr: symetrisované 1-formy $2\omega_{(ab)}$ jsou vnějšími diferenciály 0-forem g_{ab}.

Souřadnicové (přirozené) base.

Chceme ukázat, že v předchozích vztazích je obsažen tradiční přístup k Riem. geometrii:

Proto specifikujeme souř. systém x^α; zvolíme "souř. basi"

$\vec{e}^{(a)} = \operatorname{grad} x^\alpha$; pak $e^{(a)}_\alpha = \delta^a_\alpha$, $e^\alpha_{(a)} = \delta^\alpha_a$ (tj. vektory $\vec{e}_{(a)}$ jsou tečné k souř. křivkám) a $dx^\alpha = \Theta^\alpha$ jsou základní 1-formy.

Tetrádové složky lib. tensoru jsou tedy numericky rovny jeho obyčejným složkám.

Ze zavedení Ricciho rotačních koef. nyní snadno zjistíme, že

$\gamma^a{}_{bc} \equiv - e^{(a)}{}_{\beta;\gamma} e^\beta_{(b)} e^\gamma_{(c)}$ jsou rovny Christ. symbolům

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ – ~~[illegible]~~

neboť $\gamma^a{}_{bc} = -\Big[\underbrace{e^{(a)}{}_{\beta,\gamma}}_{= 0 \text{ neb}} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} \underbrace{e^{(a)}_\delta}_{\delta^a_\delta}\Big] \underbrace{e^\beta_{(b)}}_{\delta^\beta_b} \underbrace{e^\gamma_{(c)}}_{\delta^\gamma_c} = + \Gamma^a_{bc}$

$e^{(a)} = \delta^a_\alpha$

Jelikož $e_{(a)}^{\ \alpha} = \delta_a^\alpha$, jsou $\overset{(\text{bij})}{\text{samozřejmě}}$ numericky rovny $\overset{\text{všude}}{(\text{všechno}}$ v daném souř. systému) i $g_{\alpha\beta}$ a g_{ab} a tedy i jejich obyčejné (nikoliv kovariantní!) diferenciály
↳ viz u g_{ab} jsou D a d stejné, ale ne u $g_{\alpha\beta}$ / g_{ab} jsou skaláry

Nyní z

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} \Rightarrow dg_{\alpha\beta} = (\gamma_{\alpha\beta\gamma} + \gamma_{\beta\alpha\gamma})\underbrace{\Theta^\gamma}_{dx^\gamma}$$

$$\Rightarrow \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \underbrace{g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}}_{\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}} + g_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}$$

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta;\gamma} = 0, \text{ tj. známý klasický výsledek.}$$

Zde skončena 4. přednáška

Rovnice struktury.

Nyní opět obecný formalismus. Počítá vnější diferenciály forem $\Theta^a = e_\beta^{(a)} dx^\beta$

z definice $$d\Theta^a = 2!\, \underbrace{e_{\beta;\gamma}^{(a)}}_{-\gamma^a_{\ bc} e_\gamma^{(c)} e_\beta^{(b)}} dx^{[\gamma} dy^{\beta]} =$$

$$= -\gamma^a_{\ bc}\, \Theta^c \wedge \Theta^b$$

ovšem $\gamma^a_{\ bc}\Theta^c = \omega^a_{\ b}$, takže

$$\boxed{d\Theta^a = -\omega^a_{\ b} \wedge \Theta^b}$$

Cartan tyto rovnice nazval "první rovnice struktury"

⇒ výpočet $\gamma^a_{[bc]}$

Tyto rovnice v podstatě říkají, že antisym. části rotač. koef. $\gamma^a_{[bc]}$ lze snadno spočítat tím, že uděláme rotaci duální base $\vec{e}^{(a)}$, tj. vnější (parc.) derivování

-viz $d\Theta^a = -\omega^a_{\ b} \wedge \Theta^b$ vyplynulo

z $\underbrace{d\Theta^a}_{\text{vnější der. } \vec{e}^{(a)}} = -\gamma^a_{\ bc}\underbrace{\Theta^c \wedge \Theta^b}_{\text{antisym. v } b,c}$

viz $\gamma^a{}_{bc} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ · (15.) $\sim \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\, \Theta^\beta \wedge \Theta^\gamma$ antisym.

(Ve speciálním případě souř. base, kdy $\vec{e}^{(a)}$ jsou grad x^α, přejdou první rovnice struktury na triviální tvrzení $d\Theta^\alpha = d^2 x^\alpha = 0$) ovšem pro výpočty např. Riem. tensoru není výhodné počítat v těchto souř. basích – spíš v takových, v nichž g_{ab} je konstantní – viz za chvilku)

Předpokládejme, že známe 1-formy Θ^a a matici g_{ab} jako fce souřadnic. Pak prostým diferencováním okamžitě najdeme $d\Theta^a$ a dg_{ab}.

Pak je důležité, že 1-formy $\omega^a{}_b$ jsou zcela určeny vztahy

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$$

a

$$d\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b$$

viz další pozn. 15 B

(Prakticky je to důležité proto – viz dále – že Riem. tensor atd. spočte přímo diferencováním $\omega^a{}_b$.) → viz (15)

Dělá důkaz předchozího tvrzení – ω_{ab} ovšem vyjde dosti složité ← viz (15) naštěstí obvykle je vše jednoduché – obvykle totiž je g_{ab} konstantní maticí (nezáv. na x^α), takže

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0 \implies \omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

a zbývá pouze řešit $d\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b$ – ovšem řešení těchto rovnic lze obvykle uhádnout (to je rozumné, neboť z důkazu, kt. zde ~~neu~~vádím, je zřejmé, že řešení je jednoznačné) ↓ na str. (15)

Pozn.

g_{ab} je konstantní maticí pro lib. ortonormální basi a také pro Sachsovu nulovou tetrádu – a právě tehdy lze snadno uhádnout.

2-formy křivosti

Odvozuje tzv. "druhé rovnice struktury" – které svazují tensor křivosti a vnější diferenciály 1-forem konexe $\omega^a{}_b$.

Důkaz nedělám – vyjde ze defi: $\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc} \underbrace{e^{(c)}_\gamma dx^\gamma}_{\theta^c}$ udělá vnější diferenciály $\omega^a{}_b$:

podle definice

$$d\omega^a{}_b = 2! \left(\gamma^a{}_{bc} e^{(c)}_\gamma\right)_{;\delta} dx^{[\delta} dx^{\gamma]},$$

ale na druhé straně Riem. tensor je definován pomocí komutačních relací

$$e^{(a)}_\alpha R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 2 e^{(a)}_{\beta;[\gamma\delta]} = e_{\beta;\gamma\delta} - e_{\beta;\delta\gamma} \,/\, g^{\beta\rho}$$

... úpravami vyjde: $e^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\beta\rho} = e^\rho{}_{;\gamma\delta} - e^\rho{}_{;\delta\gamma}$

$-e^\alpha R^\rho{}_{\alpha\gamma\delta} =$ Konvence jako v MTW

když definuje

$$\boxed{\Omega^a{}_b \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} R^a{}_{bcd}\, \Theta^c \wedge \Theta^d} \qquad (1)$$

⇒ 2-formy křivosti, kde $R^a{}_{bcd}$ jsou tetrádové složky Riem. tensoru

vyjdou 2. rovnice struktury Cartana:

$$\boxed{\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b} \qquad (2)$$

Z obou vztahů je vidět, že když najdu $\omega^a{}_b$, mohu spočítat $\Omega^a{}_b$; to pak rozvinu v bázi $\Theta^c \wedge \Theta^d$ a podle (1) naleznu tetrádové složky Riemann. tensoru – odtud ovšem mohu rychle i normální složky:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e_{(a)\alpha}\, e^{(b)}_\beta\, e^{(c)}_\gamma\, e^{(d)}_\delta\, R^a{}_{bcd}$$

$$R^a{}_{bcd} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, e^{(a)}_\alpha\, e^\beta_{(b)}\, e^\gamma_{(c)}\, e^\delta_{(d)}$$

Věta: Známe-li 1-formy Θ^a a matici g_{ab} jako fce x^μ, pak jsou 1-formy konexe $\omega^a{}_b$ zcela určeny vztahy

$$dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba} \qquad (1)$$

$$d\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b \qquad (2)$$

D:

1) $\gamma_{(ab)c}$ jsou jednoznačně určeny z (1) jako numerické koeficienty:

$$dg_{ab} = \gamma_{abc}\,\Theta^c + \gamma_{bac}\,\Theta^c =$$

$$= (\gamma_{abc} + \gamma_{bac})\,\Theta^c = 2\gamma_{(ab)c}\,\Theta^c \qquad (*)$$

když známe g_{ab}, známe dg_{ab} (viz prostě dif. = vnější dif.) a známe podle předp. Θ^c $\Rightarrow$ $\gamma_{(ab)c}$ určíme jako koef. lin. kombinace (*)

2) $\gamma_{a[bc]}$ zjistíme z (2): – to nejdřív ~~[illegible]~~ $a \to b$ a vynásobíme g_{ab}

$$\Rightarrow \quad g_{ab}\, d\Theta^b = -g_{ab}\,\omega^b{}_c \wedge \Theta^c =$$

$$= -g_{ab}\,\gamma^b{}_{cd}\,\Theta^d \wedge \Theta^c =$$

$$= -\gamma_{acd}\,\Theta^d \wedge \Theta^c =$$

$$= -2\gamma_{a[cd]}\,\Theta^d \wedge \Theta^c = -2\gamma_{a[bc]}\,\Theta^c \wedge \Theta^b$$

$\Rightarrow \gamma_{a[bc]}$

$$= \tfrac{1}{2}[abc + \cancel{bac} + \cancel{acb} + cab - \cancel{bca} - \cancel{cba} + abc - \cancel{acb} + \cancel{bca} - bac - cab + \cancel{cba}$$

pak

$$\omega_{ab} = \gamma_{abc}\,\Theta^c = (\gamma_{(ab)c} + \gamma_{(ac)b} - \gamma_{(bc)a} + \gamma_{a[bc]} + \gamma_{b[ca]} - \gamma_{c[ab]})\,\Theta^c$$

---

viz dole na str. 15

16₁

Odvození $\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$ — detailní

$$\omega^a{}_b = \gamma^a{}_{bc}\,\theta^c = -e^{(a)}{}_{\beta;\gamma}\, e^\beta_{(b)}\, e^\gamma_{(c)}\, e^{(c)}{}_\delta\, dx^\delta =$$

$$= -e^{(a)}{}_{\beta;\gamma}\, e^\beta_{(b)}\, dx^\gamma$$

$$d\omega^a{}_b = -2!\left(e^{(a)}{}_{\beta;\gamma}\, e^\beta_{(b)}\right)_{;\delta} dx^{[\delta} dy^{\gamma]}$$

$$= -2!\left[e^{(a)}{}_{\beta;\gamma;\delta}\, e^\beta_{(b)} + e^{(a)}{}_{\beta;\gamma}\, e^\beta_{(b);\delta}\right] dx^{[\delta} dy^{\gamma]}$$

$$= -2!\left\{\left[e^{(a)}{}_{\beta;\underbrace{[\gamma;\delta]}_{\frac{1}{2}}}\, e^\beta_{(b)}\, dx^\delta dy^\gamma + \left[e^{(a)}{}_{\beta;[\gamma}\, e^\beta_{(b);\delta]}\right] dx^\delta dy^\gamma\right\}\right.$$

$$= -2!\,\frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, e^{(a)}_\alpha\, e^\beta_{(b)}\, dx^\delta dy^\gamma$$

$$\underbrace{-2!\, e^{(a)}{}_{\beta;[\gamma}\, e^\beta_{(b);\delta]}\, dx^\delta dy^\gamma}_{\text{viz další str.}} \stackrel{*}{=}$$

ale

$$\Omega^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd}\, \theta^c \wedge \theta^d = \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, e^{(a)}_\alpha\, e^\beta_{(b)}\, e^\gamma_{(c)}\, e^\delta_{(d)}$$

$$\times\, 2!\, e^{(c)}_\rho\, e^{(d)}_\sigma\, dx^{[\rho} dy^{\sigma]}$$

$$= R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, dx^{[\gamma} dy^{\delta]}\, e^{(a)}_\alpha\, e^\beta_{(b)}$$

$$\stackrel{*}{=} + R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}\, e^{(a)}_\alpha\, e^\beta_{(b)}\, dx^\delta dy^\gamma = R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}\, e^{(a)}_\alpha\, e^\beta_{(b)}\, dx^{[\delta} dy^{\gamma]}$$

$$\rightarrow \Big|\; A_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dy^\beta = A_{\alpha\beta}\, dx^{[\alpha} dy^{\beta]} = A_{\alpha\beta}\,\frac{1}{2}\left(dx^\alpha dy^\beta - dx^\beta dy^\alpha\right)$$

$$= A_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dy^\beta$$

Další člen

$$-2!\, e^{(a)}_{\beta;[\gamma}\, e^{\beta}_{(b);\sigma]}\, dx^{\gamma} dy^{\sigma}$$

$$= -2!\, e^{(a)}_{\beta;\gamma}\, e^{\beta}_{(b);\sigma}\, dx^{[\gamma} dy^{\sigma]}$$

$$\omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{c}{}_{b} = 2!\, e^{(a)}_{\beta;\gamma}\, e^{\beta}_{(c)}\, e^{(c)}_{\rho;\sigma}\, e^{\rho}_{(b)}\, dx^{[\gamma} dy^{\sigma]}$$

ak $$e^{(c)}_{\rho;\sigma}\, e^{\rho}_{(b)} = \Big(\overbrace{e^{(c)}_{\rho}\, e^{\rho}_{(b)}}^{\delta^{a}_{b}}\Big)_{;\sigma} - e^{(c)}_{\rho}\, e^{\rho}_{(b);\sigma}$$

$$= -\, e^{(c)}_{\rho}\, e^{\rho}_{(b);\sigma}$$

$\Rightarrow$

$$\omega^{a}{}_{c} \wedge \omega^{c}{}_{b} = 2!\, e^{(a)}_{\beta;\gamma}\, e^{\beta}_{(c)} \left(-\, e^{(c)}_{\rho}\, e^{\rho}_{(b);\sigma}\right) dx^{[\gamma} dy^{\sigma]}$$

$$= -\, 2 e^{(a)}_{\beta;\gamma}\, e^{\beta}_{(b)\sigma}\, dx^{[\gamma} dy^{\sigma]}$$

Identity pro křivost

V tomto Cartanově formalismu vyjdou **Bianchiho identity** velice jednoduše jako podmínky integrability 2. rovnic struktury

(*) $\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$ ↳ rozmysli pořádně

Z $\Omega^a{}_b$ nyní uděláme vnější diferenciál – přitom potřebujeme, že

$d^2\omega^a{}_b = 0$, a že pro 1-formy α, β platí: $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge d\beta$

Je tedy

$$d\Omega^a{}_b = \underbrace{d^2\omega^a{}_b}_{=0} + \underbrace{d\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge d\omega^c{}_b}_{\text{dosadím z (*) zpětně pomocí } \Omega^a{}_c}$$

$$= (\Omega^a{}_c - \omega^a{}_d \wedge \omega^d{}_c)\wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge (\Omega^c{}_b - \omega^c{}_d \wedge \omega^d{}_b)$$

spolu vypadnou

$\Rightarrow$

$$\boxed{d\Omega^a{}_b = \Omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b - \omega^a{}_c \wedge \Omega^c{}_b}$$

snadno ukážeme, že toto jsou **Bianchiho identity**: specialisujeme se na souř. basi a Riem. souřadnice, takže

$\omega^\alpha{}_\beta = \underbrace{\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}}_{=\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta}} \underbrace{dx^\delta}_{=\theta^\delta} = 0$ v nějakém pevném vybraném bodě

Pak z předchozího vztahu dostaneme

$$\partial_\varepsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, dx^{[\varepsilon} dy^{\gamma} dz^{\delta]} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta;\varepsilon]} = 0$, tj. Bianchiho identity.

Další identitu dostaneme z 1. rovnic struktury

$d\Theta^a = -\omega^a{}_b \wedge \Theta^b$ – ~~vezmeme~~ uděláme-li vnější diferenciály těchto rovnic, zjistíme, že musí platit

$\underbrace{d^2\Theta^a}_{=0} = \underbrace{-d\omega^a{}_b \wedge \Theta^b}_{-\Omega^a{}_b\wedge\Theta^b + \cancel{\ }} + \omega^a{}_b \wedge \underbrace{d\Theta^b}_{\cancel{-\omega^b{}_c\wedge\Theta^c}}$

$$\boxed{\Omega^a{}_b \wedge \Theta^b = 0}$$

což lze přepsat do tvaru $R_{abcd}\,\Theta^b\wedge\Theta^c\wedge\Theta^d = 0$ – a to není nic jiného než $R_{a[bcd]} = 0$.

Lze dále ukázat, že tato cyklická identita spolu s antisym. Riem. tenso-ru v obou párech implikuje: $R_{abcd} = R_{cdab}$

$\Rightarrow$ všechny symetrie Riem. tensoru jsou shrnuty ve dvou identitách, které splňují 2-formy křivosti:

$$\boxed{\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}, \qquad \Omega^a{}_b \wedge \Theta^b = 0.}$$

Důkaz, že z $\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$

a $dg_{ab} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$

$\Longrightarrow \Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$;

(pracuji jen v indexech a, b, …, tj. zvyšuji a snižuji pomocí g_{ab}}; užívám jen $d(f\Omega) = df \wedge \Omega + f\, d\Omega$

$$\Omega_{ab} = g_{as}\Omega^s{}_b = g_{as}\, d\omega^s{}_b + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b$$

Pak

$$\Omega_{ab} + \Omega_{ba} = g_{as}\, d\omega^s{}_b + \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b +$$

$$+ g_{bs}\, d\omega^s{}_a + \omega_{bc} \wedge \omega^c{}_a =$$

$$= d(g_{as}\omega^s{}_b) - dg_{as} \wedge \omega^s{}_b + d(g_{bs}\omega^s{}_a) - dg_{bs} \wedge \omega^s{}_a$$

$$+ \omega_{ac} \wedge \omega^c{}_b + \omega_{bc} \wedge \omega^c{}_a =$$

$$= d\omega_{ab} - (\omega_{as} + \omega_{sa}) \wedge \omega^s{}_b + d\omega_{ba} - (\omega_{bs} + \omega_{sb}) \wedge \omega^s{}_a$$

$$+ \omega_{as} \wedge \omega^s{}_b + \omega_{bs} \wedge \omega^s{}_a =$$

$$= \underbrace{d\omega_{ab} + d\omega_{ba}}_{=0} - \omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b - \omega_{sb} \wedge \omega^s{}_a =$$

neb $d^2 g_{ab} = d\omega_{ab} + d\omega_{ba} = 0$

$$= -\omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b + \underbrace{\omega^s{}_a \wedge \omega_{sb}}_{= \omega_{sa} \wedge \omega^s{}_b} = 0 \checkmark$$

q. e. d.

Vaidya ve formách

$$ds^2 = + 2\,du\,dr + \left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]du^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

chci basi $\theta^a = e^{(a)}_{\ \alpha}\, dx^\alpha$ tak, že

g_{ab} ve $ds^2 = g_{ab}\,\theta^a\theta^b$ jsou konstanty

$$ds^2 = \underbrace{2\,du}_{\equiv\theta^0}\underbrace{\left\{dr + \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]du\right\}}_{\equiv\theta^1} - \underbrace{r^2 d\vartheta^2}_{\equiv(\theta^2)^2} - \underbrace{r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}_{\equiv(\theta^3)^2}$$

$$\theta^0 \equiv du$$

$$\theta^1 \equiv dr + \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{2m(u)}{r}\right]du$$

$$\theta^2 \equiv r\,d\vartheta$$

$$\theta^3 \equiv r\sin\vartheta\, d\varphi$$

$$ds^2 = g_{ab}\,\theta^a\theta^b = 2\,\theta^1\theta^0 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

$\Rightarrow$ $g_{ab} = 0$ až na $g_{10} = g_{01} = 1 = g^{10} = g^{01}$

$$-g^{33} = -g^{22} = -g_{22} = -g_{33} = +1$$

$$g_{ab} = g^{ab}$$

v.7 $\boxed{d(f\omega) = f\,d\omega + df \wedge \omega}$

1. rovnice struktury:

$$\boxed{d\theta^a = -\omega^a_{\ b} \wedge \theta^b}$$

(0) $\boxed{d\theta^0 = 0}$

(1) $d\theta^1 = \underbrace{d^2 r}_{=0} + d\left\{\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}_{\text{skalár}}\underbrace{du}_{\text{1-forma}}\right\} = -d\left(\frac{m}{r}\right) \wedge du = \frac{m}{r^2}\, dr \wedge du$

$$= \frac{m}{r^2}\,\theta^1 \wedge \theta^0$$

(2) $d\theta^2 = dr \wedge d\vartheta = \frac{1}{r}\,\theta^1 \wedge \theta^2 \underbrace{- \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{2m}{r}\right] du \wedge d\vartheta}$

$$- \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{2m}{r}\right]\frac{1}{r}\,\theta^0 \wedge \theta^2$$

(2) $\boxed{d\theta^2 = \frac{1}{r}\,\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2r}\left[1 - \frac{2m}{r}\right]\theta^0 \wedge \theta^2}$

2

(3) $$\boxed{\begin{aligned} d\theta^3 &= d(r\sin\vartheta\, d\varphi) = \sin\vartheta\, dr\wedge d\varphi + r\cos\vartheta\, d\vartheta\wedge d\varphi = \\ &= r^{-1}\left[\theta^1 - \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{2m}{r}\right)\theta^0\right]\wedge\theta^3 + r^{-1}\cot\theta\;\theta^2\wedge\theta^3 \end{aligned}}$$

Hádáme řešení (0) – (3):

~~[illegible]~~

1) musí $\omega^1{}_0 = 0$, neboť:

$$\omega^1{}_0 = g^{1s}\omega_{s0} = \underbrace{\underbrace{g^{10}}_{=1}\omega_{00}}_{=0 \text{ neb } \omega_{ab} = -\omega_{ba}} = 0$$

neboť $\underbrace{dg_{ab}}_{=0!\ \text{vit}\ g_{ab} = \text{const.}} = \omega_{ab} + \omega_{ba}$

2) řešení $$\boxed{d\theta^1 = \frac{m}{r^2}\,\theta^1\wedge\theta^0} \quad (1)$$

$$d\theta^1 = -\omega^1{}_a\wedge\theta^a \overset{1)}{=} -\omega^1{}_1\wedge\theta^1 - \omega^1{}_2\wedge\theta^2 - \omega^1{}_3\wedge\theta^3$$

$\Rightarrow$ (1) musí vzniknout z členu $-\omega^1{}_1\wedge\theta^1$, neboť ten obsahuje θ^1 jako jediný, θ^0 není nikde

$\Rightarrow$ $$\omega^1{}_1 = \frac{m}{r^2}\,\theta^0\,;$$

a to další tak, aby členy vypadly — zatím neurčené

(*) $$\omega^1{}_2 = A\,\theta^2,\quad \omega^1{}_3 = B\,\theta^3,\quad \omega^1{}_0 = 0 \text{ viz } 1)$$

3) řešení $$d\theta^2 = \frac{1}{r}\,\theta^1\wedge\theta^2 - \frac{1}{2r}\left[1-\frac{2m}{r}\right]\theta^0\wedge\theta^2$$

$$d\theta^2 = -\omega^2{}_a\wedge\theta^a = -\omega^2{}_0\wedge\theta^0 - \omega^2{}_1\wedge\theta^1 - \omega^2{}_2\wedge\theta^2 - \omega^2{}_3\wedge\theta^3$$

guess:

$$\omega^2{}_1 = \frac{\theta^2}{r},\quad \omega^2{}_2 = g^{2s}\omega_{s2} \equiv 0,\quad \omega^2{}_3 = C\theta^3,\quad \omega^2{}_0 = -\frac{1}{2r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\theta$$

4) (3)

$$d\theta^3 = r^{-1}\left[\theta^1 - \tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{2m}{r}\right)\theta^0\right]\wedge\theta^3 + r^{-1}\cot\theta\,\theta^2\wedge\theta^3$$

$$d\theta^3 = -\omega^3{}_a\wedge\theta^a = -\omega^3{}_0\wedge\theta^0 - \omega^3{}_1\wedge\theta^1 - \omega^3{}_2\wedge\theta^2 \underbrace{-\omega^3{}_3\wedge\theta^3}_{g^{33}\omega_{33}=0}$$

$$\omega^3{}_1 = \tfrac{1}{r}\theta^3, \quad \omega^3{}_0 = -\tfrac{1}{2r}\left(1-\tfrac{2m}{r}\right)\theta^3, \quad \omega^3{}_3 \equiv 0$$

$$\omega^3{}_2 = r^{-1}\cot\theta\,\theta^3$$

Ostatní z antisym. ω_{ab}:

$\omega^2{}_0 = g^{22}\omega_{20} =$
$= g^{22}\omega_{20} =$
$= -\omega_{20}$

neboť $g^{11} = -1$

Např: $\omega^1{}_2 = g^{10}\omega_{02} = -\omega_{20} = -\omega^2{}_0 = \tfrac{1}{2}r^{-1}(1-2m/r)\,\theta^2$

$$\omega^1{}_3 = -\omega^3{}_0 = \tfrac{1}{2}r^{-1}(1-2m/r)\,\theta^3$$

toto je kompatibilní s odhadem (*)

a umožňuje to fixovat A, B

$\omega^2{}_3 = -\omega^3{}_2$ fixuje C

Podobně dostane

$$\omega^0{}_1 \equiv 0, \quad \omega^0{}_2 \equiv -\omega^2{}_1 = -r^{-1}\theta^2,$$

$$\omega^0{}_3 = -\omega^3{}_1 = -r^{-1}\theta^3, \quad \omega^0{}_0 = -\omega^1{}_1 = -(m/r^2)\theta^0$$

odtud $\Rightarrow$ $\omega^0{}_b\wedge\theta^b = 0$ $\Rightarrow$ $\omega^0{}_b$ splňuje rovnici,

totiž: $d\theta^0 = \omega^0{}_b\wedge\theta^b = 0$

$\Rightarrow$ jednoznačné a správné řešení pro $\omega^a{}_b$

<u>zbytek průměčáry</u>:

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$$

$$\Omega^1{}_1 = d\omega^1{}_1 + \underbrace{\omega^1{}_1}_{c} \wedge \omega^1{}_1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_1 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_1$$

$$= d\left[\left(\frac{m}{r^2}\right)\theta^0\right] + 0 + \frac{1}{2} r^{-2}(1-2m/r)\left(\underbrace{\theta^2 \wedge \theta^2}_{=0} + \underbrace{\theta^3 \wedge \theta^3}_{=0}\right)$$

$$= -\left(\frac{2m}{r^3}\right) dr \wedge \theta^0 = -\left(\frac{2m}{r^3}\right)\theta^1 \wedge \theta^0$$

Srovnáním s $\Omega^1{}_1 = \frac{1}{2} R^1{}_{1cd}\, \theta^c \wedge \theta^d$

$\Rightarrow$ tetrádové složky $R \ldots$

$$R^1{}_{141} = -R^1{}_{114} = \frac{2m}{r^3}\ , \quad \text{jiné } R^1{}_{1cd} = 0$$

a podobně najdu

$$\Omega^1{}_2 = \left(\frac{\dot m}{r^2}\right)\theta^2 \wedge \theta^0 + \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1{}_3 = \left(\frac{\dot m}{r^2}\right)\theta^3 \wedge \theta^0 + \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^2{}_1 = \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^2 \wedge \theta^0$$

$$\Omega^3{}_1 = \left(\frac{m}{r^3}\right)\theta^3 \wedge \theta^0$$

$$\Omega^2{}_3 = -\left(\frac{2m}{r^3}\right)\theta^2 \wedge \theta^3$$

antisym. $\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}$ určí další $R \ldots$

Kontrakcí tetrádové složky Ricciho tenzoru

jelikož $\Omega^1{}_0 = \Omega_{00} \equiv 0$

$$R_{00} = R^2{}_{002} + R^3{}_{003} = -R^1{}_{202} - R^1{}_{303} \quad (\text{jelikož } \Omega^2{}_0 = -\Omega^1{}_2)$$

$$= - \ldots = \frac{2\dot{m}}{r^2}$$

další $R_{..} = 0$

$$R_{\alpha\beta} = R_{ab}\, e^{(a)}{}_\alpha\, e^{(b)}{}_\beta = R_{00}\, e^{(0)}{}_\alpha\, e^{(0)}{}_\beta =$$

$$= 2\left(\frac{\dot{m}}{r^2}\right)(\partial_\alpha u)(\partial_\beta u)$$