

Úloha 1 Skládání spinů 1+1

c) • skalární součin $\hat{A} = \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = \frac{1}{2} (\hat{S}_1 \hat{S}_2 + \hat{S}_2 \hat{S}_1)$

• z přednášky víme, že obecně platí pro celkový moment hybnosti: $\hat{J}^2 = \hat{J}^{(1)2} + \hat{J}^{(1)}\hat{J}^{(2)} + \hat{J}^{(2)}\hat{J}^{(1)} + \hat{J}^{(2)2}$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = \left(\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2 \right) \frac{1}{2}$$

d) • máme vektory separované báze $|1 m_1\rangle |1 m_2\rangle$ pro $m_{1,2} \in \{-1, 0, 1\}$ → celkem 9 různých

• nebo vektory kaplované báze $|j m\rangle$ $j = 0, 1, 2$

$m \in \{0\}, \{-1, 0, 1\}, \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

• báze jsou spojeny C-G koeficienty:

$$|j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{1 m_1, 1 m_2}^{j m} |1 m_1\rangle |1 m_2\rangle$$

Platí: • $\hat{S}^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle$

$$\bullet \hat{S}_1^2 |j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{1 m_1, 1 m_2}^{j m} \hat{S}_1^2 |1 m_1\rangle |1 m_2\rangle =$$

$$= \left(\sum_{m_i} \hat{S}_i^2 |m_i\rangle \right) = \hbar^2 2 |m_i\rangle = \hbar^2 2 \sum_{m_1 m_2} C_{1 m_1, 1 m_2}^{j m} |1 m_1\rangle |1 m_2\rangle$$

$$\bullet \hat{S}_2^2 |j m\rangle = 2 \hbar^2 \sum_{m_1 m_2} C_{1 m_1, 1 m_2}^{j m} |1 m_1\rangle |1 m_2\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{S}_z^2 |j m\rangle = 2\hbar^2 |j m\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{A} |j m\rangle = \frac{\hbar^2}{2} [(j+1)j - 2 - 2] |j m\rangle$$

$$\underline{j=0}: \hat{A} |0 m\rangle = -2\hbar^2 |0 m\rangle$$

nedegenerované

$$a_0 = -2\hbar^2$$

$$\underline{j=1}: \hat{A} |1 m\rangle = -\hbar^2 |1 m\rangle$$

$$a_1 = -\hbar^2$$

trikrát degenerované

$$\underline{j=2}: \hat{A} |2 m\rangle = +\hbar^2 |2 m\rangle$$

$$a_2 = \hbar^2$$

päťkrát degenerované

• spektrum \hat{A} : $G_{\hat{A}} = \{-2\hbar^2, -\hbar^2, \hbar^2\}$

• vl. vektory \hat{A} lze volit různě kvůli degeneraci, nejjednodušší je asi zvolit přímo kaplovanou bázi: $\{|j m\rangle\}$