Úloha 2: Částice na kroužku

Stavový prostor částice tvoří periodické, kvadraticky integrovatelné funkce na intervalu $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému je

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}.$$

1. Najděte stacionární stavy částice a příslušné energie.
2. Nyní uvažujte dvě takové navzájem neinteragující částice a opět najděte vlastní stavy a energie v případě, že jsou to nerozlišitelné bosony.
3. Jako předchozí úloha, ale pro fermiony. V obou případech diskutujte první tři energetické hladiny a jejich degeneraci.
4. Ve stacionární poruchové teorii započtěte kontaktní interakci obou částic $U(\phi_1, \phi_2) = \lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)$ a to jak v případě bosonů, tak pro fermiony.

Poznámka: Tento systém lze též interpretovat jako rotor s jedním stupňem volnosti, nebo částice v jámě kvantované pomocí periodické okrajové podmínky (Born-vonKarman). U částic neuvažujeme spinové stupně volnosti, můžeme si představit například, že jsou fixovány silným magnetickým polem.

Poznámky k řešení úlohy:

- V případě jediné částice snadno napíšeme rovnou vlnovou funkci stacionárního stavu $|m\rangle = \psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$ s energií $\epsilon_m = \hbar^2 m^2/2\mu R^2 \equiv \epsilon_1 m^2$.
- Pro dvě částice vezmeme prostě součin jednočásticových funkcí $\psi_{m_1}(\phi_1)\psi_{m_2}(\phi_2)$ popřípadě jej symetrizujeme pro bosony nebo antisymetrizujeme pro fermiony. Energie pak je $E = \epsilon_{m_1} + \epsilon_{m_2} = \epsilon_1(m_1^2 + m_2^2)$. Výsledné vlnové funkce jsou přehledně shrnuty v následující tabulce.

Energie	Bosony	Fermiony	Porucha-Bosony
0	$\|0\rangle\|0\rangle$		$\lambda/(2\pi)$
ϵ_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle\|1\rangle + \|1\rangle\|0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle\|\text{-}1\rangle + \|\text{-}1\rangle\|0\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle\|1\rangle - \|1\rangle\|0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle\|\text{-}1\rangle - \|\text{-}1\rangle\|0\rangle)$	$\begin{pmatrix} \lambda/\pi & 0 \\ 0 & \lambda/\pi \end{pmatrix}$
$2\epsilon_1$	$\|1\rangle\|1\rangle$ $\|\text{-}1\rangle\|\text{-}1\rangle$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|1\rangle\|\text{-}1\rangle + \|\text{-}1\rangle\|1\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|1\rangle\|\text{-}1\rangle - \|\text{-}1\rangle\|1\rangle)$	$\begin{pmatrix} \lambda/2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda/2\pi \end{pmatrix}$
$4\epsilon_1$	*nehledáno*	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle\|2\rangle - \|2\rangle\|0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle\|\text{-}2\rangle - \|\text{-}2\rangle\|0\rangle)$	*nehledáno*

V posledním sloupci je ukázán příspěvek prvního řádu poruchové teorie. V případě degenerovaných hladin je uvedena celá matice poruchy, i když matice poruchy je ve všech případech diagonální (rozmyslete, že je to důsledkem toho, že součet kvantových čísel $m_1 + m_2$ je zachovávající se veličinou). Porucha je ukázána jen pro Bosonové vlnové funkce. Zkuste rozmyslet, že pro fermiony je porucha identicky 0 v důsledku Pauliho vylučovacího principu (obě částice nesmí mít stejné ϕ). Výpočet poruchy ukážeme alespoň na příkladu prvního stavu pro druhou hladinu:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\langle 0|\langle 1| + \langle 1|\langle 0|)U(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\phi_1 \int \mathrm{d}\phi_2 [e^{-i\phi_2} + e^{-i\phi_1}]\lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)[e^{i\phi_2} + e^{i\phi_1}] \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\lambda}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}\phi_1 2e^{-i\phi_1}2e^{i\phi_1} = \frac{\lambda}{\pi}. \end{aligned}$$