1.
ako vieme z prvej domácej úlohy – vlnová funkcia závisí od uhla, musí mať periódu 2π (alebo menšiu).
Funkcie, ktoré po derivovaní vracajú svoj násobok sú vo všeobecnosti exponenciály, z tej periodicity ale vyplýva, že chceme len komplexné. Zoberme teda BÚNO funkciu tvaru

$$\psi(\phi)=N\cos(n(\phi-\phi_0))$$

normovanie:

$$\int_{-\pi}^{\pi} N^2\cos^2(n(\phi-\phi_0))\,d\phi=N^2\pi\overset{!}{=}1\rightarrow N=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

pozor na prípad n=0, kedy máme konštantu, tá musí byť

$$\int_{-\pi}^{\pi} N^2\,d\phi=N^2 2\pi\overset{!}{=}1\rightarrow N=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

no a teda vlastné energie budú

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2\mu R}n^2$$

2.
všetky vlastné stavy s n>0 sú degenerované, to môžeme vyriešiť tým, že každý rozdelíme na

$$\psi_{sn}(\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\phi) \quad \text{(sudé) a} \quad \psi_{\mathrm{ln}}(\phi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\phi) \quad \text{(liché)}$$

Pre bozóny je podstatné, aby boli obe častice navzájom symetrické, takže ak si zavedieme kvantové čslo p, ktoré bude buď s alebo l, môžeme vlastné stavy pre bozóny získať z vlastných stavov jednotlivých častíc ako

$$\psi_{p_1n_1p_2n_2B}(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{p_1n_1}(\phi_1)\psi_{p_2n_2}(\phi_2)+\psi_{p_1n_1}(\phi_2)\psi_{p_2n_2}(\phi_1))$$

pričom energia takéhoto stavu bude prirodzene

$$E_{n_1n_2}=\frac{\hbar^2}{2\mu R}(n_1^2+n_2^2)$$

3.
Pre fermióny chceme, aby boli jednotlivé dvojčasticové stavy antisymetrické, takže situácia bude obdobná ako pre bozóny, len vymeníme + za -

$$\psi_{p_1n_1p_2n_2F}(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{p_1n_1}(\phi_1)\psi_{p_2n_2}(\phi_2)-\psi_{p_1n_1}(\phi_2)\psi_{p_2n_2}(\phi_1))$$

hneď vidíme, že $|p_1n_1\rangle=|p_2n_2\rangle$ dostávame identickú nulu => stavy, kde obe častice sú v rovnakom stave sú zakízane (vyloučovací princíp)

No a teraz ku konkrétnym energetickým hladinám – najprv pre bozóny, tam má prvá hladina nulovú energiu (obe častice sú v základnom stave) môžeme aj dosadením overiť, že tento stav je

$$\psi_{s0s0B}(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2\pi}$$

druhá hladina bude mať energiu $\frac{\hbar^2}{2\mu R}$ a jedna častica bude v základnom stave, zatiaľ čo druhá v prvom excitovanom, len tie sú 2, takže táto hladina bude 2 krát degenerovaná

$$\psi_{s0s1B}(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2\pi}(\cos(\phi_1)+\cos(\phi_2))$$

$$\psi_{s0a1B}(\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2\pi}(\sin(\phi_1)+\sin(\phi_2))$$

tretia hladina bude mať energiu $\frac{\hbar^2}{\mu R}$ a teda obe častice budú mať n=1, to sa ale dá dosiahnuť tromi spôsobmi:

obe v sudom stave $\psi_{s1s1B}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{\pi}\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)$

obe v lichom stave $\psi_{l1l1B}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{\pi}\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)$

každá v inom $\psi_{l1s1B}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)+\sin(\phi_1)\cos(\phi_2))$

(teda je 3 krát degenerovaná)

fermióny nemôžu byť oba v základnom stave (nakoľko ten je len jeden), takže prvá hladina má energiu $\frac{\hbar^2}{2\mu R}$ a stavy veľmi podobné tým pre bozóny

$\psi_{s0s1F}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{2\pi}(\cos(\phi_1)-\cos(\phi_2))$

$\psi_{s0l1F}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{2\pi}(\sin(\phi_1)-\sin(\phi_2))$

druhá hladina bude zodpovedať obom fermiónom na v prvom excitovanom stave čo znamená energiu $\frac{\hbar^2}{\mu R}$ a vlnovú funkciu

$\psi_{l1s1F}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)-\sin(\phi_1)\cos(\phi_2))$

zvyšné dva stavy, ktoré sme mali na tejto hladine pre bozóny sú pre fermióny zakázané a teda táto hladina je nedegenerovaná

tretia hladina bude mať energiu $2\frac{\hbar^2}{\mu R}$ a čo sa týka stavov bude podobná, ako prvá

$\psi_{s0s2F}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{2\pi}(\cos(2\phi_1)-\cos(2\phi_2))$

$\psi_{s0l2F}(\phi_{1,}\phi_2)=\frac{1}{2\pi}(\sin(2\phi_1)-\sin(2\phi_2))$

Takže vlastné stavy budú

$$|m_{s0}, m_{a1}, m_{s1}, m_{a2}...>$$

kde kvantové číslo m_{sn} vyjadruje počet častíc v stave ψ_{sn} (a obdobne pre *a*). Čiže *m* sú celé nezáporné čísla, navyše, keď máme častice 2, tak musí platiť

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_{sn} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{an} = 2$$

a energia je

$$\frac{\hbar^2}{2\mu R}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^2 m_{sn} + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 m_{an}\right)$$

3.

všetko čo sme povedali o bozónoch platí aj pre fermióny, len navyše *m* môžu nadobúdať len hodnoty 0 a 1.

Pre bozóny je najmenšia energetická hladina 0 pre stav |2,0,0,0,0...>, následne $\frac{\hbar^2}{2\mu R}$ pre stavy |1,1,0,0,0...> a |1,0,1,0,0...> (čiže hladina je dva krát degenerovaná), tretia hladina bude mať energiu $\frac{\hbar^2}{\mu R}$ a bude tri krát degenerovaná - |0,2,0,0,0...>, |0,0,2,0,0...>a |0,1,1,0,0...>

Pre fermióny bude prvá hladina mať energiu $\frac{\hbar^2}{2\mu R}$ a stavy |1,1,0,0,0...> a |1,0,1,0,0...> (čiže priam ekvivalentná druhej hladine pre bozóny), druhá hladina bude mať energiu $\frac{\hbar^2}{\mu R}$ akurát tentokrát nebude degenerovaná, bude mať len stav |0,1,1,0,0...> a tretia hladina bude mať energiu $2\frac{\hbar^2}{\mu R}$ a dvojtú degeneráciu |1,0,0,1,0...> a |1,0,0,0,1...>