

# Cvičení 3: Variační princip a WKB metoda

*Motivace:* Použití variačního principu a WKB metody k určení energie vázaných stavů.

## Úloha 1 - Potenciál nabitě mřížky

Nalezněte stacionární stavy částice v jedné dimenzi popsané hamiltoniánem

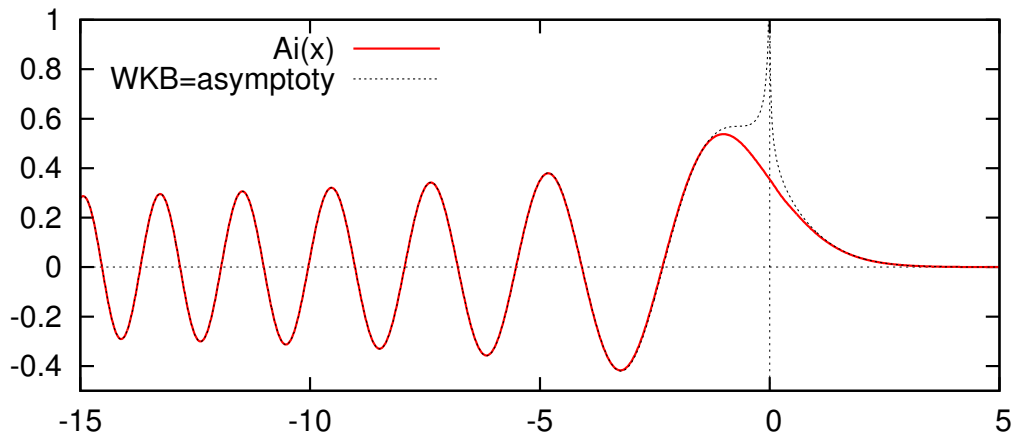
$$H\psi(q) = -\psi''(q) + |q|\psi(q) = \epsilon\psi(q).$$

Podrobnější pokyny:

- Zvolte vhodnou třídu funkcí a nalezněte energii základního stavu pomocí variačního principu (například  $\psi(q) = \exp(-\alpha q^2)$ ). Pokuste se z variačního principu nalézt také první excitovaný stav.
- Získané výsledky porovnejte s přesným řešením.

*Poznámky:* Přesné řešení můžete vyjádřit pomocí Airyho funkce, tj. řešení rovnice  $Ai''(x) = xAi(x)$ , které je omezené pro všechna  $x$ . Stačí si uvědomit, jak lze pomocí  $Ai(x)$  napsat zvlášť řešení pro  $x > 0$  a zvlášť pro  $x < 0$  a jaké jsou podmínky napojování v  $x = 0$ . Přesné energie pak vyjádříte pomocí kořenů funkce  $Ai(x)$  a její derivace.

## Dodatek - Tabulka kořenů Airyho funkce a její derivace



$n$	$Ai(x) = 0$	$Ai'(x) = 0$
1	$x = -2.3381074105$	$x = -1.0187929716$
2	$x = -4.0879494441$	$x = -3.2481975822$
3	$x = -5.5205598281$	$x = -4.8200992112$
4	$x = -6.7867080901$	$x = -6.1633073556$
5	$x = -7.9441335871$	$x = -7.3721772550$

## Úloha 2 - Částice v kruhové potenciálové jámě

Najděte energie vázaných stavů částice s hmotností  $m$  v nekonečně hluboké potenciálové jámě ve tvaru kruhu (ve 2D) o poloměru  $a$ . Úlohu řešte v polárních souřadnicích. Pokuste se navrhnout vhodnou vlnovou funkci, která vyhovuje vaší intuici o tom jak by měl vypadat základní (první excitovaný) stav a pro kterou umíte vyčíslit funkcionál energie.

Nakonec můžete srovnat s přesným řešením úlohy, které lze vyjádřit pomocí řešení  $J_m(x)$  Besselovy rovnice

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left[1 - \frac{m^2}{x^2}\right]f(x) = 0.$$

Kořeny Besselových funkcí jsou dány v následující tabulce

	$J_0$	$J_1$	$J_2$
1	2.4048	3.8317	5.1356
2	5.5201	7.0156	8.4172
3	8.6537	10.1735	11.6198

## Úloha 3

Vyřešit úlohu 1 pomocí WKB metody - provedu já.