$\boxed{22.3}$ Zkouška

Cvičení 3: Skládání momentu hybnosti.

Motivace: Naučit se vypočítat Clebsch-Gordanovy koeficienty a používat bázi vlastních stavů celkového momentu hybnosti v příkladech.

Úloha 1 - Skládání spinu 1+1

Mějme dvě částice se spinem 1.

- Najděte explicitní vyjádření společných vlastních vektorů kvadrátu a z-tové složky celkového spinového momentu hybnosti.
- Z jejich vyjádření určete (alespoň některé) Clebschovy-Gordanovy koeficienty.
- Vyjádřete skalární součin $A = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ spinů obou částic pomocí celkového spinového momentu hybnosti.
- Najděte vlastní vektory a vlastní čísla operátoru A.

Úloha 2 - Spinový řetízek 1/2 + 1/2 +1/2

Interakce tří částic se spinem 1/2 je popsána hamiltoniánem

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left(2\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)} + 2\vec{s}^{(2)} \cdot \vec{s}^{(3)} - \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(3)}\right).$$

Najděte stacionární stavy systému. V čase $t = 0$ je systém připraven ve stavu $|-++\rangle$ (částice 1 má s_z rovnu $-\hbar/2$ a ostatní dvě částice $+\hbar/2$). Najděte časovou závislost pravděpodobnosti nalezení hodnoty $-\hbar/2$ pro s_z třetí částice.

Doporučený postup:

- Ukažte, že hamiltonián komutuje se složkami operátoru celkového spinu $\vec{S} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)} + \vec{s}^{(3)}$ a také s kvadrátem operátoru $\vec{S}^{(13)} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(3)}$.
- Najděte společné vlastní vektory kvadrátu a z-tové složky $\vec{S}^{(13)}$ (příslušná kvantová čísla označíme j, m) a z nich zkostruujeme vlastní vektory kvadrátu a z-tové složky $\vec{S}$ (kvantová čísla J, M).
- Vlastní hodnoty H vyjádřete pomocí J, M, j, m.
- Vektor $|-++\rangle$ napište jako lineární kombinaci stacionárních stavů a najděte jeho časový vývoj.

$J = \frac{1}{2} + j$ $\qquad$ $j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Řešení 2

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left[2\,\vec{S}^{(2)}\cdot\left(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(3)}\right) - \vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(3)}\right]$$

$$= \frac{\omega}{\hbar}\hbar^2\left[J(J+1) - j(j+1) - \cancel{\tfrac{3}{4}} - \tfrac{1}{2}\left(j(j+1) - \cancel{\tfrac{3}{2}}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega\left[J(J+1) - \tfrac{3}{2}j(j+1)\right]$$

ti stac stavy dané

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow |jJM\rangle$

$E_{jJ} =$ (v jednotkách $\hbar\omega$)

$j \backslash J$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	$\frac{3}{4}$	$\times$
1	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\cdot\,\hbar\omega$

$\rightarrow \boxed{E_+ - E_- = 3\hbar\omega}$

konstrukce $|jJM\rangle \leftarrow \underbrace{\tfrac12+\tfrac12}+\tfrac12$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} + \tfrac12 \longrightarrow \left\langle \begin{matrix} \tfrac12 \\ \tfrac12 \quad \tfrac32 \end{matrix}\right.$$

a) $\boxed{\tfrac12+\tfrac12} \to |j\,m\rangle$ .. $S^{(13)^2}$ $S_z^{(13)}$

$m \backslash j$	1	0
1	$\|{+}{+}\rangle$	
0	$\frac{1}{\sqrt2}(\|{+}{-}\rangle+\|{-}{+}\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt2}(\|{+}{-}\rangle-\|{-}{+}\rangle$
−1	$\|{-}{-}\rangle$	

b) $\boxed{\tfrac12+0} \to |j\,J M\rangle$ $j=0$

$M \backslash J$	$\frac12$
+	$\|+\rangle_2\|00\rangle_{13}$
−	$\|-\rangle_2\|00\rangle_{13}$

$$|jJM\rangle \Longrightarrow |0\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle = \tfrac{1}{\sqrt2}\left(|{+}{+}{-}\rangle - |{-}{+}{+}\rangle\right) \quad \boxed{E_+}$$

$$|0\,\tfrac12\,{-\tfrac12}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt2}\left(+{-}{-}\rangle - |{-}{-}{+}\rangle\right)$$

$\tfrac12 + 1$ $\boxed{E_+}$ $\boxed{E_-}$

$M \backslash J$	$3/2$	$1/2$
$3/2$	$\|+\rangle_2\|11\rangle$	
$1/2$	$(\|-\rangle_2\|11\rangle + \sqrt2\|+\rangle_2\|10\rangle)/\sqrt3$	$(\|+\rangle\|10\rangle - \sqrt2\|-\rangle\|11\rangle)/\sqrt3$
$-1/2$	$(\|+\rangle_2\|1{-}1\rangle + \sqrt2\|-\rangle_2\|10\rangle)/\sqrt3$	$(-\|-\rangle\|10\rangle + \sqrt2\|+\rangle\|1{-}1\rangle)/\sqrt3$
$-3/2$	$\|-\rangle_2\|1{-}1\rangle$	

J_- $\to$ oc J_- J_+

tj $|jJM\rangle =$

$$|1\,\tfrac32\,\tfrac32\rangle = |{+}{+}{+}\rangle$$
$$|1\,\tfrac32\,\tfrac12\rangle = \tfrac{1}{\sqrt3}\left(|{-}{+}{+}\rangle + |{+}{-}{+}\rangle + |{+}{+}{-}\rangle\right)$$
$$|1\,\tfrac32\,{-\tfrac12}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt3}\left(|{+}{-}{-}\rangle + |{-}{+}{-}\rangle + |{-}{-}{+}\rangle\right)$$
$$|1\,\tfrac32\,{-\tfrac32}\rangle = |{-}{-}{-}\rangle$$

$\boxed{E_+}$

$$|1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle = \tfrac{1}{\sqrt6}\left(|{+}{+}{-}\rangle - 2|{+}{-}{+}\rangle + |{-}{+}{+}\rangle\right)$$
$$|1\,\tfrac12\,{-\tfrac12}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt6}\left(-|{-}{-}{+}\rangle + 2|{-}{+}{-}\rangle - |{+}{+}{-}\rangle\right)$$

$\boxed{E_-}$

časový vývoj $|{-}{+}{+}\rangle = \left(\underbrace{\sqrt6\,|1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle}_{E_-} + \underbrace{2\sqrt3\,|1\,\tfrac32\,\tfrac12\rangle - 3\sqrt2\,|0\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle}_{E_+}\right)\tfrac16$

$$\text{tj}\quad |{-}{+}{+}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt6}|1\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle e^{3i\omega t} + \tfrac{1}{\sqrt3}|1\,\tfrac32\,\tfrac12\rangle - \tfrac{1}{\sqrt2}|0\,\tfrac12\,\tfrac12\rangle$$

$$= |{-}{+}{+}\rangle\left(\tfrac16 e^{3i\omega t} + \tfrac13 + \tfrac12\right) + |{+}{-}{+}\rangle\left(-\tfrac13 e^{3i\omega t} + \tfrac13\right) + |{+}{+}{-}\rangle\left(\tfrac16 e^{3i\omega t} + \tfrac13 - \tfrac12\right)$$

$$p_{3+} = \left|\tfrac16 e^{3i\omega t} + \tfrac56\right|^2 + \left|\tfrac13 - \tfrac13 e^{3i\omega t}\right|^2 = \tfrac{1}{36}(26 + 10\cos) + \tfrac29(1-\cos) = \boxed{\tfrac{17}{18} + \tfrac{1}{18}\cos 3\omega t}$$