

## Cvičení 4: Skládání momentu hybnosti.

*Motivace:* Naučit se vypočítat Clebsch-Gordanovy koeficienty a používat bázi vlastních stavů celkového momentu hybnosti v příkladech.

### Úloha 1 - Skládání spinu 1+1

Mějme dvě částice se spinem 1.

- Najděte explicitní vyjádření společných vlastních vektorů kvadrátu a z-tové složky celkového spinového momentu hybnosti.
- Z jejich vyjádření určete Clebschovy-Gordanovy koeficienty. Pokuste se udělat tabulku ve vhodném formátu.
- Vyjádřete skalární součin  $A = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$  spinů obou částic pomocí celkového spinového momentu hybnosti.
- Najděte vlastní vektory a vlastní čísla operátoru  $A$ .

### Úloha 2 - Spinový řetízek 1/2 + 1/2 + 1/2

Interakce tří částic se spinem 1/2 je popsána hamiltoniánem

$$H = \frac{\omega}{\hbar} (2\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)} + 2\vec{s}^{(2)} \cdot \vec{s}^{(3)} - \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(3)}).$$

Najděte stacionární stavy systému. V čase  $t = 0$  je systém připraven ve stavu  $| - ++ \rangle$  (částice 1 má  $s_z$  rovnu  $-\hbar/2$  a ostatní dvě částice  $+\hbar/2$ ). Najděte časovou závislost pravděpodobnosti nalezení hodnoty  $-\hbar/2$  pro  $s_z$  třetí částice.

*Doporučený postup:*

- Ukažte, že hamiltonián komutuje se složkami operátoru celkového spinu  $\vec{S} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)} + \vec{s}^{(3)}$  a také s kvadrátem operátoru  $\vec{S}^{(13)} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(3)}$ .
- Najděte společné vlastní vektory kvadrátu a z-tové složky  $\vec{S}^{(13)}$  (příslušná kvantová čísla označíme  $j, m$ ) a z nich zkostruujeme vlastní vektory kvadrátu a z-tové složky  $\vec{S}$  (kvantová čísla  $J, M$ ).
- Vlastní hodnoty  $H$  vyjádřete pomocí  $J, M, j, m$ .
- Vektor  $| - ++ \rangle$  napište jako lineární kombinaci stacionárních stavů a najděte jeho časový vývoj.