

QM II - cv 5 Generátory rotací

koment. Pešila Kateřina Mladá, Dodatečný komentář:

U1 rotace částice se spinem $1/2$ kolem osy x :



$$|+\rangle_z \rightarrow |-\rangle_z$$

$$|-\rangle_z \rightarrow |+\rangle_z$$

$$R S_z R^\dagger = -S_y = e^{-i\pi} S_y$$

U2 wiki Rošil Jan Bekar, dodatečné řešení:

$$e^{i\vec{a}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = I \cos a + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \sin a$$

$$e^{-\frac{i}{2}\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot I - i \sin \frac{\alpha}{2} \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$$

úzkorové řešení:

U3 rotační matice v $SO(3)$ v \mathbb{R}^3

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = e^{i\alpha G} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$U(\alpha) \sim i \frac{d}{d\alpha} U(\alpha) \Big|_{\alpha=0}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix} \Rightarrow e^{i\alpha G} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e^{-i\alpha \sigma_y} \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha I - i \sin \alpha \sigma_y$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \alpha & -\sin \alpha & \\ & \sin \alpha & \cos \alpha & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha - \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ostatní: R_3, R_z cyklická permutace řádků a sloupců např:

$$R_x: \begin{pmatrix} 1 & c-s \\ c-s & s \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & s & c \\ 1 & 0 & 0 \\ c & c-s & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} = R_0 \checkmark$$

řádky sloupce

U4 necht \hat{A}, \hat{B} komut. $[\hat{A}, \hat{B}]$

pak -- Glauber id. $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$

DK: $F(t) = e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} \Big|_{t=1}$

$$\frac{d}{dt} F(t) = \underbrace{e^{\hat{A}t} \hat{A} e^{\hat{B}t}} + \underbrace{e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} \hat{B}} = A e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} + \underbrace{e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{\hat{A}t}}_{B e^{\hat{A}t}} e^{\hat{B}t} = [e^{\hat{A}t}, B] e^{\hat{B}t}$$

$$= \underbrace{[\hat{A} + \hat{B}]} e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} + \underbrace{[e^{\hat{A}t}, B]} e^{\hat{B}t}$$

minutě seznám. za pomoci diferenciály $[e^{\hat{A}t}, B] = [A, B] \frac{de^{\hat{A}t}}{dA}$

$(t) e^{\hat{A}t}$

$$\dot{F}(t) = [A + B] e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t} + t[A, B] e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t}$$

$$\dot{F}(t) = (A + B + [A, B]t) F(t) \quad F(0) = I \quad (*)$$

Řešení obvyč. difra:

$$\frac{\dot{F}}{F} = \frac{d}{dt} (\ln F) = A + B + t[A, B] \quad \int dt$$

$$\ln F = t(A + B) + \frac{1}{2} t^2 [A, B] + C$$

$$e^{tA} e^{tB} = F = K \exp \left\{ t(A + B) + \frac{1}{2} t^2 [A, B] \right\}$$

z podm (*) $\rightarrow I \quad t \rightarrow 0 \quad F(0) = I$

t; pro $t=1$ $e^A e^B = e^{(A+B + \frac{1}{2}[A, B])} = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$

C.B.D.

