Cvičení 5: Generátory grupy rotací.

Motivace: Najít explicitně reprezentace rotací výpočtem exponenciály matice generátorů a vyzkoušet jejich použití.

Úloha 1

Najděte operátor $\hat{\mathcal{R}}_x(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x\right)$ Ověřte jak působí tento operátor na stavy $|y : \pm\rangle$, $|z : \pm\rangle$, pokud zvolíme $\alpha = \pi/2$ a zjistěte jak se transformují operátory složek spinového momentu hybnosti $\hat{s}_\mu \mapsto \hat{\mathcal{R}}_x(\pi/2)\hat{s}_\mu\hat{\mathcal{R}}_x^\dagger(\pi/2)$.

Úloha 2

Zobecněte pro rotaci obecným směrem $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, tj. najděte $\hat{\mathcal{R}}_n(\alpha) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$.
Nápověda: Vzpomeňte si na vzorec pro Pauliho matice z minulého semestru $\hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma + \delta_{\alpha\beta}\hat{I}$ z nějž je možné spočíst mocniny Pauliho matic, komutátor, antikomutátor a inverzní matici.

Úloha 3

Ověřte, že rotační matice $R_x(\alpha)$, $R_y(\alpha)$, $R_z(\alpha)$ pro vektory v $\mathbb{R}^3$ lze získat pomocí maticové exponenciály z generátorů:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nápověda: Můžete použít opět Taylorův rozvoj nebo výsledek předchozí úlohy a uvědomit si, že funkce blokově diagonální matice lze počítat pro každý blok zvlášť.

Úloha 4

Nechť operátory $\hat{A}$ i $\hat{B}$ komutují s $[\hat{A}, \hat{B}]$, pak platí Glauberova identita: $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$. Dokažte.
Nápověda:

- Minulý semestr jsme si dokazovali, že za předpokladů výše platí

$$[\hat{A}, f(\hat{B})] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\hat{B}}[\hat{A}, \hat{B}].$$

- Najděte derivaci funkce $\hat{F}(t) = e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t}$ a ukažte, že $\hat{F}'(t) = \left(\hat{A} + \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}]\right)\hat{F}(t)$

- Ověřte, že jednoznačné řešení této diferenciální rovnice s počáteční podmínkou $\hat{F}(0) = \hat{I}$ je $\hat{F}(t) = \exp\left\{(\hat{A} + \hat{B})t + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]t^2\right\}$ a využijte tohoto výsledku k důkazu Glauberovy identity.