Cvičení 6: Iredukcibilní tenzorové operátory.

Motivace: Zvyknout si na ireducibilní složky tenzorů.

Úloha1: Komutační relace vektorových operátorů

Nechť $\hat{U}_k$ a $\hat{V}_l$ jsou vektorové operátory, tj. splňují komutační relace $[\hat{J}_k, \hat{V}_l] = i\hbar\varepsilon_{kln}\hat{V}_n$ s momentem hybnosti $\hat{J}_n$.

- Ukažte, že operátor $\hat{S} = \hat{\vec{U}} \cdot \hat{\vec{V}}$ je skalár, tj. $[\hat{J}_k, \hat{S}] = 0$.
- Ukažte, že pokud operátor $\hat{A}$ komutuje s $\hat{J}_x$ a $\hat{J}_y$, musí komutovat s $\hat{J}_z$.
- Ověřte, že operátory $\hat{V}_0^{(1)} = \hat{V}_z$, $\hat{V}_{\pm 1}^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{V}_x \pm i\hat{V}_y)$ splňují definiční vztahy ireducibilních komponent tenzorového operátoru.

Úloha 2: Tenzorový součin dvou vektorů

Mějme dva vektorové operátory U_k a V_l. Připomeňme, že jejich ireducibilní složky jsou $V_0^{(1)} = V_z$, $V_{\pm 1}^{(1)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)$ a podobně $U_m^{(1)}$. Zopakujte si definici tenzorového součinu dvou operátorů

$$W_m^{(j)} = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle U_{m_1}^{(j_1)} V_{m_2}^{(j_2)}.$$

Najděte explicitně komponenty $W_0^{(0)}$, $W_m^{(1)}$, $W_m^{(2)}$ a vyjádřete je pomocí kartézských složek vektorů U_k a V_l. Rozmyslete si jak nalezené operátory $W_m^{(j)}$ souvisí se skalárním a vektorovým součinem U_k a V_l a s tenzorem jejich diadického součinu $T_{kl} = U_k V_l$ a jeho rozkladem na izotropní, antisymetrickou a symetrickou bezestopou část.
Poznámka: Potřebné Clebschovy-Gordanovy koeficienty odečtěte ze vzorců pro skládání momentu hybnosti 1+1, které jsme nalezli ve cvičení 4:

$|22\rangle = |+\rangle|+\rangle$
$|21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|0\rangle + |0\rangle|+\rangle)$ $\quad$ $|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|0\rangle - |0\rangle|+\rangle)$
$|20\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|+\rangle|-\rangle + 2|0\rangle|0\rangle + |-\rangle|+\rangle)$ $\quad$ $|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$ $\quad$ $|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle|-\rangle - |0\rangle|0\rangle + |-\rangle|+\rangle)$
$|2{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|-\rangle + |-\rangle|0\rangle)$ $\quad$ $|1-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|-\rangle - |-\rangle|0\rangle)$
$|2{-2}\rangle = |+\rangle|+\rangle$