

Cvičení 7: Wignerova-Eckartova věta a symetrie.

Motivace: Naučit se používat WE větu na konkrétních příkladech.

Rozcvička: W-E věta pro skalární operátor

Mějme dvě částice s momenty hybnosti \vec{L}_1 a \vec{L}_2 . Vypočtete maticový element

$$\langle l_1 l_2 LM | \vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 | l_1 l_2 L' M' \rangle,$$

kde $|l_1 l_2 LM\rangle$ jsou společné vlastní vektory operátorů \vec{L}_1^2 , \vec{L}_2^2 , \vec{L}^2 a L_z ; přitom $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ je celkový moment hybnosti. Nad výsledkem se zamyslete z hlediska Wignerovy-Eckartovy věty.

Nápověda: K vyčíslení maticového elementu jsme již v minulosti používali vyjádření skalárního součinu $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$ z relace $\vec{L}^2 = (\vec{L}_1 + \vec{L}_2)^2$ pomocí operátorů \vec{L}_1^2 , \vec{L}_2^2 , \vec{L}^2 .

Úloha 1: Dipólové přechody v atomu vodíku

Uvažujte maticové elementy

$$\langle nlm | r_i | n'l'm' \rangle,$$

kde $r_i = x, y$ nebo z a $|nlm\rangle$ jsou stacionární stavy atomu vodíku. Zamyslete se nad aplikací Wignerovy-Eckartovy věty na tyto maticové elementy a pro $n = n' = 2$ rozmyslete: a) jaký je počet těchto elementů, b) kolik je jich nenulových, c) kolik integrálů musíte opravdu spočítat (napište je!) a jak z nich dopočtete ostatní. Použijte tabulku C-G koeficientů z minulých cvičení nebo z Wikipedie.

Úloha 2: Blochova věta a delta-krystal.

Použijte Blochův teorém k nalezení stacionárních stavů pro Hamiltonián

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na).$$

Nakreslete diagram pásové struktury takového systému. Zamyslete se nad limitou $\lambda \rightarrow 0$, tj. nad případem volné částice chápané z hlediska diskretní translační symetrie.

Úloha 3: Kvantová trojtečka a grupa C_{3v} .

Zamyslete se nad kvantovou trojtečkou z hlediska symetrie. Stavový prostor kvantové trojtečky je lineární obal ortonormální báze $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. Uvažujme v této bázi hamiltonián

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

kteřý je symetrický vůči libovolné záměně dvojice vektorů $|m\rangle \leftrightarrow |n\rangle$. Tyto operace lze doplnit na kompletní grupu permutací tří objektů. Pokuste se najít invariantní podprostory této grupy. Najděte stacionární stavy Hamiltoniánu a porovnejte.