Cvičení 8: Blochovy stavy a nerozlišitelné částice

Motivace: Výpočty různých vlastností v systémech několika nerozlišitelných částic.

Dodělávka z minula: δ-krystal

Použijte Blochův teorém k nalezení stacionárních stavů pro Hamiltonián

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} - \lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na).$$

Nakreslete diagram pásové struktury takového systému. Zamyslete se nad limitou $\lambda \to 0$, tj. nad případem volné částice chápané z hlediska diskrétní translační symetrie.

Úloha 1: Částice na kroužku

Stavový prostor částice tvoří periodické, kvadraticky integrovatelné funkce na intervalu $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému je

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu R}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}.$$

1. Najděte stacionární stavy částice a příslušné energie.

2. Nyní uvažujte dvě takové navzájem neinteragující částice a opět najděte vlastní stavy a energie v případě, že jsou to nerozlišitelné bosony.

3. Jako předchozí úloha, ale pro fermiony. V obou případech diskutujte první tři energetické hladiny a jejich degeneraci.

4. Ve stacionární poruchové teorii započtěte kontaktní interakci obou částic $U(\phi_1, \phi_2) = \lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)$ a to jak v případě bosonů, tak pro fermiony.

Poznámka: Tento systém lze též interpretovat jako rotor s jedním stupněm volnosti, nebo částice v jámě kvantované pomocí periodické okrajové podmínky (Born-vonKarman).