Cvičení 9: Poznámky k řešení úlohy 2

Zadání: Dvě částice v jámě interagující spinem

Dva identické nerozlišitelné bosony se spinem 1 jsou zachyceny v potenciálové jámě popsané harmonickým potenciálem s vlastní úhlovou frekvencí ω a jejich vzájemná interakce je dána skalárním součinem jejich spinů. Uvažujme tedy hamiltonián systému ve tvaru

$$\hat{H} = \hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)} + \frac{\lambda}{\hbar}\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)},$$

kde $\hat{h}^{(1)} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})$ je hamiltonián pro částici 1 v harmonickém potenciálu a stejný tvar má i $\hat{h}^{(2)}$ ovšem působící na částici 2. Najděte 9 nejnižších energetických hladin určete jejich stupeň degenerace. Předpokládejte, že interakční konstanta $\lambda > 0$ je malá $4\lambda < \omega$. Porovnejte výsledky s případem, kdy by částice byly rozlišitelné, uvědomte si tak, že platnost symetrizačního postulátu je experimentálně ověřitelná.

Poznámky k řešení úlohy:

- Hamiltonián je správným operátorem pro nerozlišitelné částice, tj. komutuje s permutačním operátorem $\hat{P}_{12}$ (ověřte). To znamená, že vlastní stavy lze hledat pro rozlišitelné částice a pak z nich vytřídit jen ty symetrické vůči záměně částic, jak vyžaduje symetrizační postulát pro bosony. Hamiltonián je navíc součtem příspěvků od první částice, druhé částice a spinu, což znamená, že můžeme vlnové funkce hledat v separovaném tvaru $|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2|\chi\rangle_s$.

- Vlastní stavy prostorové části jsou přímo součiny oscilátorových stavů $|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2$ a příspěvek energie od této části je $\hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$.

- Vlastní stavy spinové části budou současně vlastními stavy celkového spinu $|\chi\rangle_s = |SM\rangle$ a příspěvek k energii je $\lambda\hbar\frac{1}{2}[S(S+1) - 4]$ přitom vlnová funkce pro $S = 0, 2$ je symetrická vůči záměně částic a pro $S = 1$ je antisymetrická (viz cvičení na skládání momentu hybnosti).

$E/\hbar$	n_1,n_2,S	vln.fce rozlišitelné		N_0, N_1, N_2	vln.fce bosony	
$\omega - 2\lambda$	0,0,0	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$	(1×)	2,0,0	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$	(1×)
$\omega - \lambda$	0,0,1	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|1M\rangle_s$	(3×)	2,0,0		(0×)
$\omega + \lambda$	0,0,2	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$	(5×)	2,0,0	$\|0\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$	(5×)
$2\omega - 2\lambda$	1, 0, 0 0, 1, 0	$\|1\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|1\rangle_2\|00\rangle_s$	(2×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|1\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|1\rangle_2\right)\|00\rangle_s$	(1×)
$2\omega - \lambda$	1, 0, 1 0, 1, 1	$\|1\rangle_1\|0\rangle_2\|1M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|1\rangle_2\|1M\rangle_s$	(6×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|1\rangle_1\|0\rangle_2 - \|0\rangle_1\|1\rangle_2\right)\|1M\rangle_s$	(3×)
$2\omega + \lambda$	1, 0, 2 0, 1, 2	$\|1\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|1\rangle_2\|2M\rangle_s$	(10×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|1\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|1\rangle_2\right)\|2M\rangle_s$	(5×)
$3\omega - 2\lambda$	2, 0, 0 0, 2, 0 1, 1, 0	$\|2\rangle_1\|0\rangle_2\|00\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|2\rangle_2\|00\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|00\rangle_s$	(3×)	1, 0, 1 0, 2, 0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|2\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|2\rangle_2\right)\|00\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|00\rangle_s$	(2×)
$3\omega - \lambda$	2, 0, 1 0, 2, 1 1, 1, 1	$\|2\rangle_1\|0\rangle_2\|1M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|2\rangle_2\|1M\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|1M\rangle_s$	(9×)	1, 0, 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|2\rangle_1\|0\rangle_2 - \|0\rangle_1\|2\rangle_2\right)\|1M\rangle_s$	(3×)
$3\omega + \lambda$	2, 0, 2 0, 2, 2 1, 1, 2	$\|2\rangle_1\|0\rangle_2\|2M\rangle_s$ $\|0\rangle_1\|2\rangle_2\|2M\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|2M\rangle_s$	(15×)	1, 0, 1 0, 2, 0	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|2\rangle_1\|0\rangle_2 + \|0\rangle_1\|2\rangle_2\right)\|2M\rangle_s$ $\|1\rangle_1\|1\rangle_2\|2M\rangle_s$	(10×)

V tabulce jsou shrnuty výsledky jak pro případ rozlišitelných částic, tak pro případ nerozlišitelných bosonů.