Cvičení 9: Ještě jednou nerozlišitelné částice

Motivace: Výpočty různých vlastností v systémech několika nerozlišitelných částic.

Úloha 1: Rozložení částic v nekonečně hluboké jámě

Uvažujte systém složený ze dvou neinteragujících částic v nekonečně hluboké pravoúhlé potenciálové jámě délky π v jedné dimenzi (tj. $V(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$, jinak $V(x) = \infty$). Najděte střední kvadratickou vzdálenost $\sqrt{\langle\psi|[\hat{x}^{(1)} - \hat{x}^{(2)}]^2|\psi\rangle}$ částic v základním $|\psi_0\rangle$ a v prvním excitovaném stavu $|\psi_1\rangle$ pro

1. rozlišitelné, ale jinak identické částice,
2. nerozlišitelné bosony se spinem 0,
3. nerozlišitelné fermiony se spinem 1/2 v tripletním stavu.

Porovnejte výsledné hodnoty s rozptylem souřadnice $\sqrt{\langle(x - \langle x \rangle)^2\rangle}$ v jednočásticových stavech.

Úloha 2: Dvě částice v jámě interagující spinem

Dva identické nerozlišitelné bosony se spinem 1 jsou zachyceny v potenciálové jámě popsané harmonickým potenciálem s vlastní úhlovou frekvencí ω a jejich vzájemná interakce je dána skalárním součinem jejich spinů. Uvažujme tedy hamiltonián systému ve tvaru

$$\hat{H} = \hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)} + \frac{\lambda}{\hbar}\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)},$$

kde $\hat{h}^{(1)} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ je hamiltonián pro částici 1 v harmonickém potenciálu a stejný tvar má i $\hat{h}^{(2)}$ ovšem působící na částici 2. Najděte 9 nejnižších energetických hladin určete jejich stupeň degenerace. Předpokládejte, že interakční konstanta $\lambda > 0$ je malá $4\lambda < \omega$. Porovnejte výsledky s případem, kdy by částice byly rozlišitelné, uvědomte si tak, že platnost symetrizačního postulátu je experimentálně ověřitelná.

Poznámka: Pokud to čas dovolí zamyslíme se rovněž nad některými aspekty úloh 1 a 2 z hlediska 2. kvantování.