Cvičení 10: Druhé kvantování.

Motivace: Procvičit si popis systémů několika nerozlišitelných částic pomocí obsazovacích čísel a II. kvantování.

Komutační relace pro operátory druhého kvantování

Nechť $\hat{a}_n^\dagger$ je kreační operátor pro částici ve stavu číslo n v systému nerozlišitelných identických částic.

1. Najděte komutační relace $[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l, \hat{a}_n]$ a $[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l, \hat{a}_n^\dagger]$ pokud se jedná o bosony.

2. Totéž pro fermiony.

3. Nechť tento systém představuje neinteragující částice a Hamiltonián je $\hat{H} = \sum_k \epsilon_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$. Najděte Heisenbergovu pohybovou rovnici pro operátory $\hat{a}_k^{\dagger(\mathrm{H})}(t)$ a $\hat{a}_k^{(\mathrm{H})}(t)$.

4. Najděte řešení těchto pohybových rovnic.

5. Nechť $|\{N_i\}\rangle$ je bázový vektor ve Fockově prostoru s ostrými hodnotami obsazovacích čísel N_i. Vypočtěte maticové elementy $\langle\{N_i\}|\hat{a}_k \hat{a}_n^\dagger|\{N_i\}\rangle$ a $\langle\{N_i\}|\hat{a}_k \hat{a}_l \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger|\{N_i\}\rangle$. Liší se výsledek pro bosony a pro fermiony?

Hubbardův model (viz též DÚ5 z roku 2015).

Hubbardův hamiltonián je definován výrazem

$$\hat{H} = -t \sum_n \sum_\sigma (\hat{c}_{n,\sigma}^\dagger \hat{c}_{n+1,\sigma} + \hat{c}_{n+1,\sigma}^\dagger \hat{c}_{n,\sigma}) + U \sum_n \hat{N}_{n+} \hat{N}_{n-},$$

kde operátor $\hat{c}_{n,\sigma}^\dagger$ kreuje elektron do místa n se z-tovou složkou spinu $\sigma\frac{\hbar}{2}$, $\hat{N}_{n\sigma} \equiv \hat{c}_{n,\sigma}^\dagger \hat{c}_{n,\sigma}$ je operátor počtu částic v místě n se spinem $\sigma = \pm$ a t, U jsou reálné konstanty.

1. Rozmyslete si, že pro $U = 0$ je Hubbardův hamiltonián vlastně přepis hamiltoniánu řetízku $\hat{H}_1 = -t \sum_n (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|)$, který jsme řešili loni, do druhého kvantování (+přidá se spinový stupěň volnosti na němž $\hat{H}$ explicitně nezávisí).

2. Ve formalismu 2. kvantování ověřte, že $|\psi_{k,\sigma}\rangle \equiv \sum_n e^{ikn} \hat{c}_{n,\sigma}^\dagger |0\rangle$ jsou jednočásticové vlastní stavy $\hat{H}|\psi\rangle = E(k)|\psi\rangle$ a nalezněte energie $E(k)$.

3. Omezme se nyní na případ kvantové dvojtečky. Množina idexů n obsahuje nyní jen dvě hodnoty $n = 1, 2$, tj.

   $$\hat{H} = -t \sum_\sigma (\hat{c}_{1\sigma}^\dagger \hat{c}_{2,\sigma} + \hat{c}_{2,\sigma}^\dagger \hat{c}_{1,\sigma}) + U(\hat{N}_{1+}\hat{N}_{1-} + \hat{N}_{2+}\hat{N}_{2-}).$$

   Rozmyslete si pro tento případ, jak vypadá báze ve Fockově prostoru, kolik stavů mají podprostory s fixním počtem částic a jakých hodnot mohou nabývat obsazovací čísla.

Poznámka: Hubbardův hamiltonián je důležitým modelem elektronů v pevné látce. Vystihuje základní vlastnosti interagujícího elektronového plynu a přitom se dá (dokonce v případě libovolně dlouhého řetízku $n = 1, 2, .., L$) obsazeného mnoha elektrony vyřešit přesně. Dá se použít ke kvalitativnímu pochopení celé škály jevů od teorie magnetizmu, přes fázové přechody mezi