[QMII-5] – Symetrie v QM

OPAKOVÁNÍ: unitární operátor symetr. operace $\hat{\mathcal{S}}$

- parita: $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\Pi}$: $\hat{\Pi}^+ \hat{V}_k \hat{\Pi} = -\hat{V}_k$ (jako x_k)

  nebo $\hat{\Pi}^+ \hat{A}_k \hat{\Pi} = \hat{A}_k$ — polární / axiální vektor

příklady $V_k = x_k, p_k$ $A_k = L_k, J_k, S_k$

skalár: $\hat{\Pi}^+ \hat{S} \hat{\Pi} = \hat{S}$ pseudoskalár $\hat{\Pi}^+ \hat{S} \hat{\Pi} = -\hat{S}$

nulovost maticových elementů $\langle \alpha | \hat{A} | \beta \rangle \dots \varepsilon_\alpha \varepsilon_A \varepsilon_\beta$

- diskrétní translace: $\hat{\mathcal{T}}(a) \longrightarrow$ Blochův teorém

• Časová inverze (inverze pohybu)

$t \leftrightarrow -t$ $x(t) \dots x(-t)$ obrácení filmu ↑

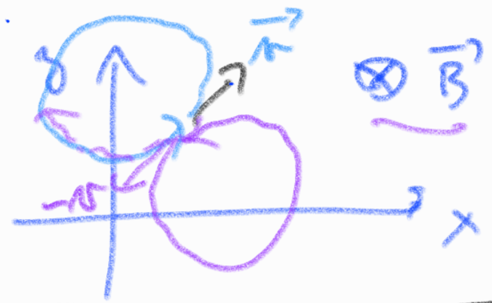
dynamika je invar.

PŘ:

(x,p) $x(t) \to$, $p(t) \to$

$\downarrow$

$(x,-p)$ $x(-t)$, $-p(-t)$



$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

OPERÁTOR ČASOVÉ INVERZE (inverze pohybu): $\hat{\Theta}$

požadavek: $\left| \begin{array}{l} \hat{\Theta} \hat{x} \hat{\Theta}^{-1} = \hat{x} \\ \hat{\Theta} \hat{p} \hat{\Theta}^{-1} = -\hat{p} \end{array} \right\} \to \hat{\Theta} \vec{J} \Theta^{-1} = -\vec{J}$

problém:

$\Theta \,|\, [\hat{x}_k, \hat{p}_l] = i\hbar \delta_{kl} \,|\, \Theta^{-1}$. $[x, p] = -i\hbar$ spor

Wignerova věta: $\forall$ operace $|\psi'\rangle = \hat{U} |\psi\rangle$ která zachovává $|\langle \varphi | \psi \rangle| = |\langle \varphi' | \psi' \rangle|$ je zprostřed. U – unitním operátorem (nebo antiunitár. antilin. oper.).

Antilineární operátory:

$A(c_1 |\phi_1\rangle + c_2 |\phi_2\rangle) = c_1^* A |\phi_1\rangle + c_2^* A |\phi_2\rangle$

příklad operátor komplex. sdružení na $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{K}\psi(x) = \psi(x)^*$$ .. def. A^+? problematické

def: A antiunitární pokud $\exists A^{-1}$ a $\| |u\rangle \| = \| A|u\rangle \|$ $\forall |u\rangle \in \mathcal{H}$

! $\langle \psi | B | \phi \rangle$ $\quad$ $B = B^+$

lineární: $|\phi'\rangle = B|\phi\rangle$, $|\psi'\rangle = B|\psi\rangle \longrightarrow \langle \psi | B$

$\langle \psi | A | \phi \rangle$

$\langle \psi | A\phi \rangle \neq$

$\langle A\psi | \phi \rangle$, $(A|\psi\rangle)^+$

! definice závisí na bázi

PŘ: komplex. sdružení $\hat{K}_{(n)}|\psi\rangle = \sum_n a_n^* |n\rangle$

$\hookrightarrow \sum_n a_n |n\rangle$

triviální záměna $|\nu\rangle = e^{i\phi_n}|n\rangle$ .. $|\psi\rangle = \sum_n \underbrace{a_n e^{-i\phi_n}}_{a_\nu} |\nu\rangle$

$$\hat{K}_{(n)}|\psi\rangle = \sum_n a_n^* e^{-i\phi_n}|\nu\rangle$$

$\hat{K}$ .. $a_n \longrightarrow a_n^*$ $\quad |n\rangle$

$a_\nu \longrightarrow a_\nu^* e^{-2i\phi_n}$ $\quad |\nu\rangle$

Tvrzení: $\forall$ antilineární operátor lze psát jako

$\hat{A} = \hat{L}\cdot\hat{K}$, kde $\hat{L}$ je lineární

$\hat{K}$ je kompl. sdružení

OPERÁTOR INVERZE POHYBU: $\hat{\Theta}$ je antiunitární

Θ $\quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ $\quad \Theta^{-1}$ $\longrightarrow -[\hat{x}, \hat{p}] = \Theta\, i\hbar\, \Theta^{-1} = -i\hbar$ ✓

$$i\hbar\, \partial_t |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \quad |\Theta\cdot$$

$$-i\hbar\, \partial_t \Theta|\psi(t)\rangle = \Theta H \Theta^{-1}\Theta|\psi(t)\rangle \qquad t \to -t$$

tvrzení $\boxed{\Theta \hat{H} \Theta^{-1} = \hat{H}}$ tj $\boxed{[\hat{H}, \Theta] = 0}$

invariance vůči časové inverzi

a $|\psi(t)\rangle$ řeší (SR) pak $\hat{\Theta}|\psi(-t)\rangle$ také řeší (SR)

$\hat{\Theta}(x, p) = (x, -p)$

- působení $\hat{\Theta}$ v x-reprezentaci: $\hat{\Theta} x \Theta^{-1} = x$

$\ldots \Theta|x\rangle = |x\rangle$

$$\hat{\Theta} \int \psi(x)|x\rangle dx = \int \psi(x)^* \underbrace{\Theta|x\rangle}_{|x\rangle} dx = \int \psi^*(x)|x\rangle dx$$

v x-repr. $\hat{\Theta}\psi(x) = \psi(x)^*$ tj $\hat{\Theta} = \hat{K}_*$

invariance SR: $H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\psi(x,t) = i\hbar\partial_t\psi(x,t)$

$\hat{\Theta}$ $\qquad \left[-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(x)^*\right]\psi^*(x,t) = -i\hbar\partial_t\psi$

... pokud $V^*(x) = V(x)$ pak $\psi^*(x,-t)$ řeší SR

- působení v p-reprezentaci:

$|\vec{p}\rangle \ldots \phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}}$ $\qquad \Theta|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle$

$$\hat{\Theta}\phi_p(\vec{x}) = \phi_p^*(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}} = \phi_{-p}(x)$$

$\Theta \hat{p} \Theta^{-1} = -\hat{p}$ $\qquad |\psi\rangle = \int \psi(p)|p\rangle dp$

$\hat{\Theta}\psi(p) = \psi^*(-p)$ $\ldots$ $\hat{\Theta} = \hat{\Pi} K_p$

orbitální moment hybnosti $\hat{\Theta}\hat{L}\hat{\Theta}^{-1} = -\hat{L}$

$\Theta|lm\rangle = Y_{lm}^*(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\theta,\varphi)$

Důsledky symetrie H vůči inverzi pohybu na vl. stavy:

$[H, \Theta] = 0$ $\ldots$ $\underbrace{|n\rangle}_{E_n}$ je vl. v. H $\Rightarrow$ $\boxed{\underbrace{\Theta|n\rangle}_{E_n}}$ je vl. v.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(|n\rangle \pm \Theta|n\rangle)$ taktéž vl. v. se stej. vl. č. E_n

v x repr $\longrightarrow \frac{1}{2}(\phi_n(x) \pm \phi_n^*(x))$ $<$ $\in \mathbb{R}$ $-\phi$; ryze imag. $\frac{-}{\phi}$

$\Rightarrow$ vl. fce H lze volit reálné

Inverze pohybu ve spinovém prostoru

v bázi $\underbrace{\{S^2, S_z\}}$ ... $|j, m\rangle \equiv |m\rangle$ nepř. $|+\rangle, |-\rangle$

platí $\boxed{\hat{\Theta} = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi \hat{S}_y} \hat{K}_{S_z}}$

DK: • $\hat{\Theta}\hat{S}\Theta^{-1} = -\hat{S}$ ... $|\vec{n}: \pm\rangle$

$|\vec{n}, +\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y}|+\rangle$

$\hat{\Theta}|\vec{n}, +\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y} \hat{\Theta}|+\rangle = \eta\, |\vec{n}-\rangle$

$+i \quad -S_z$

$\beta \to \beta + \pi \quad |\vec{n}-\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}(\pi+\beta)S_y}|n+\rangle$

až na fázi: $e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha S_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta S_y} \hat{U}\hat{K}|n+\rangle =$

$S_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}$

$S_y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$

$K S_y = -S_y K$

potom $\Theta^2 \neq 1$ $\quad \Theta^2 = e^{-i\pi S_y/\hbar} K_z e^{-i\pi S_y/\hbar} K_z$ $\quad (i)(-S_y)$

$= e^{-2i\pi S_y/\hbar} K_z^2$

$\boxed{\Theta^2 = e^{-\frac{i}{\hbar}2\pi S_y}}$ pro částice s celočís. spinem je $\Theta^2 = I$

obecně $\Theta^2 = \hat{R}_y(2\pi) = (-1)^{2s}$ $<$ 1 celočís. ; -1 poločís.

PŘ: spin 1/2 $\quad e^{-\frac{i\pi}{\hbar}S_y}|+\rangle = |-\rangle \qquad d^{1/2}_{mm'}(\pi)$

$e^{-\frac{i}{\hbar}\pi S_y}|-\rangle = -|+\rangle$

$$\Theta(a|+\rangle + b|-\rangle) = a^*|-\rangle - b^*|+\rangle \qquad \Theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^* \\ a^* \end{pmatrix}$$

$$\Theta^2|\psi\rangle = -|\psi\rangle$$

Kramersova věta:

systémy s poločíselným mom. hybnosti $\vec{J}$ (celkovým) mají ∀ hladiny alespoň 2x degenerované.

DK: sporem $[\Theta, H] = 0$ $\quad H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$|\psi\rangle \to \hat{\Theta}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \qquad \hat{\Theta}^2|\psi\rangle = \Theta a|\psi\rangle = \underbrace{a^* a}_{>0}|\psi\rangle$

pro částice s polospinem $\Theta^2 = -1$ ← SPOR.

PŘÍŠTĚ systémy mnoha částic nerozlišitelných