QM II – 7 Kvantová teorie rozptylu

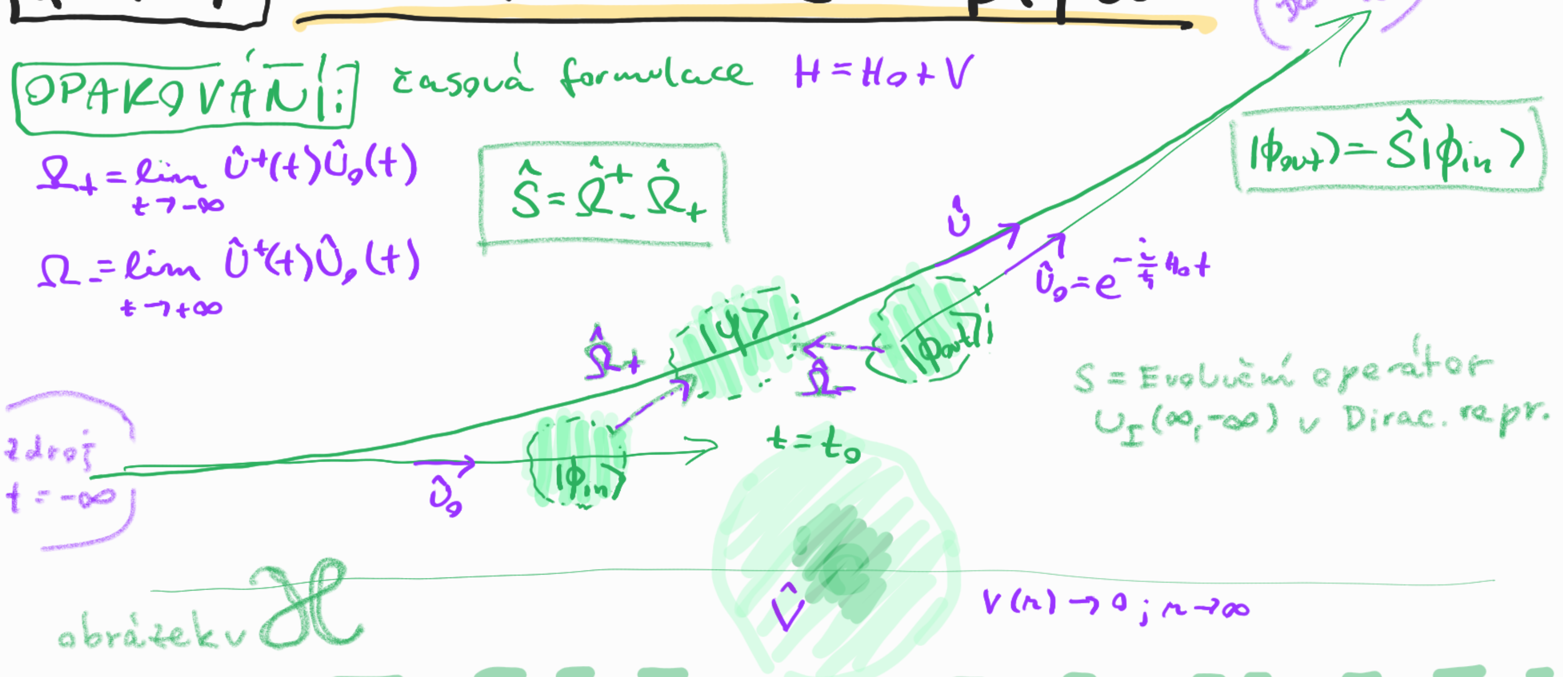
OPAKOVÁNÍ: časová formulace $H = H_0 + V$

$$\Omega_+ = \lim_{t\to-\infty} \hat U^+(t)\hat U_0(t)$$

$$\Omega_- = \lim_{t\to+\infty} \hat U^+(t)\hat U_0(t)$$

$$\boxed{\hat S = \hat\Omega_-^+\hat\Omega_+}$$

$$\boxed{|\phi_{out}\rangle = \hat S|\phi_{in}\rangle}$$



S = Evoluční operátor $U_I(\infty,-\infty)$ v Dirac. repr.

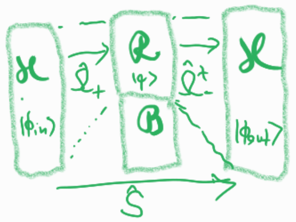
časový obraz: vše formulováno z $H = H_0 + V$ a limit $t\to\pm\infty$

$\hat U(t) = \exp\left\{\frac{Ht}{i\hbar}\right\}$

$\hat U_0(t) = \exp\left\{\frac{H_0 t}{i\hbar}\right\}$

matematicky … $\mathcal{D}(\hat\Omega_\pm) = \mathcal{H}$ …asymptotická podmínka

$\mathcal{R}(\hat\Omega_\pm)\perp\mathcal{B}$ a $\mathcal{R}\oplus\mathcal{B} = \mathcal{H}$ ..asymptotická úplnost



$\hat\Omega_\pm$ izometrické $\hat\Omega_\pm^+\hat\Omega_\pm = \hat I$

$\hat S$ unitární $\hat S^+\hat S = \hat S\hat S^+ = \hat I$

zachování energie: $\hat H\hat\Omega_\pm = \hat\Omega_\pm\hat H_0$, $\hat H_0\hat S = \hat S\hat H_0$

unitární matice v.č. $\lambda = e^{2i\delta}$

$\Rightarrow \langle \alpha E|S|\alpha' E'\rangle = \delta(E-E')S_{\alpha\alpha'}(E)$

Amplituda přechodu: $\langle\vec p|\hat S|\vec p'\rangle = \delta(\vec p-\vec p') - 2\pi i\,\delta(E_p - E_{p'})\,t(\vec p\leftarrow\vec p')$

spojnice mezi MĚŘITELNÝM a POČITANÝM

MĚŘENÉ: 1D … odraz $N_R = |S_{-+}(E)|^2 = \left|\frac{2\pi i m}{p}t(-p\leftarrow p)\right|^2$

průchod $N_T = |S_{++}(E)|^2 = \left|1 - \frac{2\pi i m}{p}t(p\leftarrow p)\right|^2$

2D $\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{2\pi}{p}|S_{\vec n\vec m}(E)|^2$

3D … diferenciální účinný průřez

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2|S_{\vec n\vec m}(E)|^2 = |f(\vec p_{out}\leftarrow\vec p_{in})|^2 \qquad f = (2\pi i)^2 m\, t(p_{out}\leftarrow p_{in})$$

POČÍTANÉ: … časově nezávislý obrázek

stacionární stavy … čas. závislost $|p\rangle;\ |\psi_E\rangle$ … $\exp\left\{\frac{Et}{i\hbar}\right\}$

ale stále $t\to\pm\infty$, $E\to E\pm i\varepsilon$

Báze v $\mathcal{H}$ … $I = \int|\vec p\rangle\langle\vec p|\,d\vec p$ … dobré pro $\phi_{in},\ \phi_{out}$

.. $\mathcal{H} = \mathcal{R}\oplus\mathcal{B}$ … $\hat P_B = \sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ .. $\hat P_R = \int d^3p\,|\psi_p^{(+)}\rangle\langle\psi_p^{(+)}| = \int d^3p\,|\psi_p^{(-)}\rangle\langle\psi_p^{(-)}|$

.. rozptylové stavy: $|\psi_{\vec p}^{(\pm)}\rangle = \hat\Omega_\pm|\vec p\rangle$ … spojité spektrum $\hat H$ s kontr. okraj. podm.

.. vlastnosti: $\hat H|\psi_p^{(\pm)}\rangle = E_p|\psi_p^{(\pm)}\rangle$ $\qquad \hat\Omega_{(\pm)} = \int d^3p\,|\psi_p^{(\pm)}\rangle\langle p|$

$E_p = \frac{p^2}{2m}$ $\qquad \langle\psi_p^{(+)}|\psi_{p'}^{(+)}\rangle = \delta(\vec p-\vec p')$ $\qquad \hat\Omega_{(\pm)}^+ = \int d^3p\,|p\rangle\langle\psi_p^{(\pm)}|$

$$\langle p|S|p'\rangle = \langle\psi_p^{(-)}|\psi_{p'}^{(+)}\rangle$$

+ Greenovy funkce, Lippmann-Schwingerova rovnice, T-operátor, tpep

rezolventa $\hat{G}(z) \equiv (z-\hat{H})^{-1}$

G-funkce → retardovaná $\hat{G}^{(+)}(E) \equiv (E+i\varepsilon-\hat{H})^{-1}$ $\overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow}$ $\boxed{\Theta(t_2-t_1)\exp\left\{\frac{H(t_2-t_1)}{i\hbar}\right\}}$

↘ advancovaná $\hat{G}^{(-)}(E) \equiv (E-i\varepsilon-\hat{H})^{-1}$ $\longleftrightarrow$

rezolventní rovnice: $G(E) = G_0(E) + G_0(E)VG(E) = G_0(E) + G(E)VG_0(E)$

$= G_0 + G_0VG_0 + G_0VG_0VG_0 + \dots + G_0(VG_0)^n + \dots$ geometrická řada

→ součet $1+GV = (1-G_0V)^{-1}$

Lippmann-Schwinger: $\boxed{|\psi_p^{(\pm)}\rangle = |p\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E)\hat{V}|\psi_p^{(\pm)}\rangle} = \hat{\Omega}_{(\pm)}|\vec{p}\rangle = (\hat{I} + \hat{G}^{(+)}(E_p)\hat{V})|\vec{p}\rangle$

• Greenova funkce volné částice v x-reprezentaci:

$$\boxed{G_0^{(\pm)}(E,\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\exp\{\pm\frac{i}{\hbar}p_E|\vec{x}-\vec{x}'|\}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}} \quad \boxed{3D}$$

$\vec{x} \equiv \vec{r} = (x,y,z)$, $p_E = \sqrt{2mE}$

$$\boxed{G_0^{(\pm)}(E,x,x') = \pm\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)\frac{1}{2ik}e^{\pm ik|x-x'|}} \quad \boxed{1D}$$

$k \equiv p/\hbar$

kde $G_0^{(\pm)}(E,\vec{x},\vec{x}') \equiv \lim_{\varepsilon\to\pm 0}\langle\vec{x}|(E+i\varepsilon-\hat{H}_0)^{-1}|\vec{x}'\rangle$

Pozn. k DK:

$$\langle\vec{x}|G_0^{(+)}(E)|\vec{x}'\rangle = \int d^3p\,\langle x|\underbrace{G_0|p\rangle}_{}\langle p|x'\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$\langle x|p\rangle(E-i\varepsilon-E_p)^{-1}$ $\qquad H_0|p\rangle = E_p|p\rangle$

$$= \int\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{E+i\varepsilon-E_p}$$

... ve sfér. souř. s osou z ve směru $\vec{x}-\vec{x}'$, $\vec{p}$ a osou z

$k = p/\hbar$, $kr\cos\theta$

$\int_0^\infty dp\,p^2 \underbrace{\sin\theta\,d\theta}_{} d\varphi$, $\quad \int_{-1}^{1} d\cos\theta$

$\longrightarrow$ po $\int d\theta\,d\varphi$ $\longrightarrow$ $2\pi\hbar\left[e^{ipr} - e^{-ipr}\right]\frac{1}{ipr}\int_0^\infty$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{ir}\int_{-\infty}^{\infty}p\,dp\,\frac{e^{ipr}}{E+i\varepsilon-p^2/2m}$$

$\int_0^\infty$, $\int_{-\infty}^0$

$(p-p_E-i\varepsilon)(p+p_E+i\varepsilon)/2m$

$E = \frac{p_E^2}{2m}$

Asymptotické chování řešení (L-S) rovnice $\quad |\psi_p^{(+)}\rangle = \Omega_+ |p\rangle$

$$\boxed{|\psi_p^{(+)}\rangle = |\vec{p}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}(E)\, V(\vec{r})\, |\psi_p^{(+)}\rangle} \quad \dots \quad \langle \vec{r}|$$

v x-reprezentaci: $\quad \psi_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi_{\vec{p}}^{(+)} \rangle$

$$\psi_p^{(+)}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} - \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{e^{\frac{i}{\hbar}p_E|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} U(\vec{r}')\, \psi_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{r}')$$

$$U(\vec{r}') \equiv \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}')$$

$$f(\vec{r}) = \underbrace{\phi(\vec{r})}_{\text{známé}} + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{K(\vec{r},\vec{r}')}_{\text{známá}} f(\vec{r}')\, d\vec{r}'$$

$\uparrow$ neznámá

integrální rovnice Fredholmova typu

dá se DK, že existuje právě jedno řešení $\psi_p(\vec{r})$

- Ekvivalence se stac. (SR) + okraj. podm.

– $\quad H|\hat{\psi}_p^{(+)}\rangle = E_p |\hat{\psi}_p^{(+)}\rangle$ $\qquad |\vec{p}\rangle$

– $\quad (E-H)|\psi\rangle = (E - H_0 - V)|\psi\rangle = 0$

$$\underbrace{(E-H_0)}|\psi\rangle = V|\psi\rangle$$

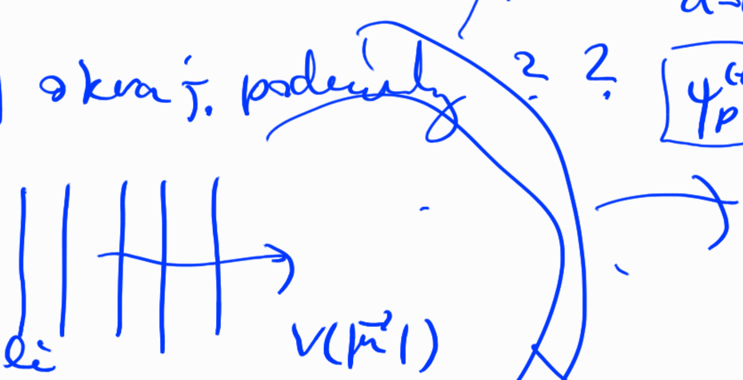
$$\to (E-H_0)\, G_0^{(+)}(E) = I \to \ \text{x-repr.} \sim \text{Greenova fce}$$

$$(E-H_0)_{\vec{r}}\, G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \leftarrow \left(\begin{matrix}\text{okrajová}\\ \text{podm.}\end{matrix}\right)(\pm)$$

$$\to |\psi\rangle = |p\rangle + G_0^{(+)} V|\psi\rangle$$

$\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$

LS .. ! řešení
SR .. ∞ - řešení] okraj. podmínky ? ? $\quad \boxed{\psi_p^{(+)} \to t_{p\to p'}}$



$V(\vec{r})$

17 rozptyl v centrálním poli