Zápočtová písemka z kvantové mechaniky II

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
Pomocí variačního principu odhadněte energii základního stavu kvartického oscilátoru s hamiltoniánem

$$\hat{H}\psi(x) = -\tfrac{1}{2}\psi''(x) + \tfrac{1}{2}x^4\psi(x).$$

Jako testovací funkci volte Gaussovu křivku s neznámým exponentem.
Mohou se hodit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2a}\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \tfrac{3}{4a^2}\sqrt{\tfrac{\pi}{a}}.$$

Úloha 2(10 bodů)
Dvě částice se spinem 1 jsou připraveny ve stavu s celkovým spinovým momentem hybnosti $\hat{S}^2 \equiv (\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)})^2$ rovným 0. Při měření projekce spinu $\hat{s}_z^{(1)}$ částice 1 na osu z naměříme hodnotu $\hbar$. Jaké hodnoty $\hat{s}_x^{(2)}$ projekce spinu druhé částice na osu x můžeme nyní naměřit?

Úloha 3(10 bodů)
Uvažujme dvourozměrný lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\right] + \tfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

a poruchu, kterou lze v okolí počátku aproximovat funkcí $V(x,y) = \lambda(\frac{1}{3}y^3 - yx^2)$. Jaké jsou energie a stacionární stavy pro neporušený případ? Jaká je korekce základního stavu v prvním řádu poruchové teorie? Jako poslední úkol si vyberte, zda spočtěte *a*) korekci základního stavu do druhého řádu poruchové teorie, nebo *b*) korekci prvního řádu všech stavů (na plný počet bodů stačí jedna z možností *a, b*).

Úloha 4(10 bodů)
Pomocí Gauntovy formule vyjádřete všechny nenulové maticové elementy $\langle Y_{1m}|xy|Y_{1m'}\rangle$, kde $|Y_{lm}\rangle$ jsou sférické harmoniky ($l = 1$) a skalární součin se provádí integrací přes jednotkovou sféru. Pokud chcete můžete výsledek ověřit přímou integrací, ale rád bych viděl, že umíte použít Gautovu formuli a Clebsch-Gordanovy koeficienty, jejichž tabulku přikládám.

Úloha 5(10 bodů)
Soustava elektronů v kvantové dvojtečce má hamiltonián

$$\hat{H} = -t\sum_s(\hat{a}^\dagger_{1s}\hat{a}_{2s} + \hat{a}^\dagger_{2s}\hat{a}_{1s}) + U(\hat{N}_{1+}\hat{N}_{1-} + \hat{N}_{2+}\hat{N}_{2-})$$

kde $t, U > 0$ jsou konstanty, $\hat{a}^\dagger_{ns}$ představuje fermionový operátor který kreuje částici v tečce $|n\rangle$ se z-složkou spinu $s\hbar/2$ a $\hat{N}_{ns} = \hat{a}^\dagger_{ns}\hat{a}_{ns}$ je operátor počtu elektronů v tečce n se spinem s. S použitím antikomutačních relací $\{\hat{a}^\dagger_{ns}, \hat{a}^\dagger_{n's'}\} = \{\hat{a}_{ns}, \hat{a}_{n's'}\} = 0$, $\{\hat{a}_{ns}, \hat{a}^\dagger_{n's'}\} = \delta_{nn'}\delta_{ss'}$ ověřte, že $|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger_{2+}\hat{a}^\dagger_{1+}|0\rangle$ je vlastním stavem hamiltoniánu a najděte příslušnou energii. Najděte vyjádření posunovacího operátoru $\hat{S}_-$ celkového spinu ve druhém kvantování a aplikujte jej na stav $|\psi\rangle$.