Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

Maticový počet

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Počítání se sloupečky, řádky a maticemi

Objekty složené z čísel

sloupec

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

řádek

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix}$$

Počítání se sloupečky, řádky a maticemi

Objekty složené z čísel

sloupec

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

řádek

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix}$$

Sčítání a násobení číslem

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a^1+b^1 \\ \vdots \\ a^n+b^n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A^1_1+B^1_1 & \cdots & A^1_n+B^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_1+B^n_1 & \cdots & A^n_n+B^n_n \end{bmatrix} \qquad r\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 & \cdots & r\alpha_n \end{bmatrix} \qquad r\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} rA^1_1 & \cdots & rA^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ rA^n_1 & \cdots & rA^n_n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 \, a^1 + \alpha_2 \, a^2 + \cdots + \alpha_n \, a^n$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1\, a^1 + \alpha_2\, a^2 + \cdots + \alpha_n\, a^n$$

Násobení sloupečku maticí

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_1\, a^1 + A^1_2\, a^2 + \cdots + A^1_n\, a^n \\ A^2_1\, a^1 + A^2_2\, a^2 + \cdots + A^2_n\, a^n \\ \vdots \\ A^n_1\, a^1 + A^n_2\, a^2 + \cdots + A^n_n\, a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1 \, a^1 + \alpha_2 \, a^2 + \cdots + \alpha_n \, a^n$$

Násobení sloupečku maticí

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_1 \, a^1 + A^1_2 \, a^2 + \cdots + A^1_n \, a^n \\ A^2_1 \, a^1 + A^2_2 \, a^2 + \cdots + A^2_n \, a^n \\ \vdots \\ A^n_1 \, a^1 + A^n_2 \, a^2 + \cdots + A^n_n \, a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 A^1_1 + \cdots + \alpha_n A^n_1 & \alpha_1 A^1_2 + \cdots + \alpha_n A^n_2 & \cdots & \alpha_1 A^1_n + \cdots + \alpha_n A^n_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1\, a^1 + \alpha_2\, a^2 + \cdots + \alpha_n\, a^n$$

Násobení sloupečku maticí

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_1\, a^1 + A^1_2\, a^2 + \cdots + A^1_n\, a^n \\ A^2_1\, a^1 + A^2_2\, a^2 + \cdots + A^2_n\, a^n \\ \vdots \\ A^n_1\, a^1 + A^n_2\, a^2 + \cdots + A^n_n\, a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 A^1_1 + \cdots + \alpha_n A^n_1 & \alpha_1 A^1_2 + \cdots + \alpha_n A^n_2 & \cdots & \alpha_1 A^1_n + \cdots + \alpha_n A^n_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$$

Násobení matic

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & \cdots & B^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B^n_1 & A^n_2 & \cdots & B^n_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} C^1_1 & C^1_2 & \cdots & A^1_n \\ C^2_1 & C^2_2 & \cdots & C^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^n_1 & C^n_2 & \cdots & C^n_n \end{bmatrix}}^{A^1_1 B^1_2 + A^1_2 B^2_2 + \cdots + A^1_n B^n_2}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \alpha_1\, a^1 + \alpha_2\, a^2 + \cdots + \alpha_n\, a^n \qquad r = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, a^k$$

Násobení sloupečku maticí

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_1\, a^1 + A^1_2\, a^2 + \cdots + A^1_n\, a^n \\ A^2_1\, a^1 + A^2_2\, a^2 + \cdots + A^2_n\, a^n \\ \vdots \\ A^n_1\, a^1 + A^n_2\, a^2 + \cdots + A^n_n\, a^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \qquad b^i = \sum_{k=1}^{n} A^i_k\, a^k$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 A^1_1 + \cdots + \alpha_n A^n_1 & \alpha_1 A^1_2 + \cdots + \alpha_n A^n_2 & \cdots & \alpha_1 A^1_n + \cdots + \alpha_n A^n_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \qquad \beta_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, A^k_j$$

Násobení matic

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & \cdots & B^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B^n_1 & A^n_2 & \cdots & B^n_n \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} C^1_1 & C^1_2 & \cdots & A^1_n \\ C^2_1 & C^2_2 & \cdots & C^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^n_1 & C^n_2 & \cdots & C^n_n \end{bmatrix}}^{A^1_1 B^1_2 + A^1_2 B^2_2 + \cdots + A^1_n B^n_2} \qquad C^i_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k\, B^k_j$$

Použití matic v geometrii

Použití matic v geometrii

Vektory a jejich souřadnice

$\vec{a}$ – vektor v třídimenzionálním prostoru

báze vektorů = lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

Každý vektor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí sloupečku souřadnic:

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Použití matic v geometrii

Vektory a jejich souřadnice

$\vec{a}$ – vektor v třídimenzionálním prostoru

báze vektorů = lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

Každý vektor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí sloupečku souřadnic:

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Operátory a jejich souřadnice

M – lineární operátor transformuje vektor na vektor

$$\vec{a} \;\to\; \vec{b} \;=\; \mathsf{M}\cdot\vec{a}$$

linearita:
$$\mathsf{M}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \mathsf{M}\cdot\vec{a} + \mathsf{M}\cdot\vec{b}$$
$$\mathsf{M}\cdot(r\vec{a}) = r\,\mathsf{M}\cdot\vec{a}$$

Každý operátor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí matice souřadnic:

$$\vec{b} \;=\; \mathsf{M}\cdot\vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\text{operátor } \mathsf{M} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M^1_1 & M^1_2 & M^1_3 \\ M^2_1 & M^2_2 & M^2_3 \\ M^3_1 & M^3_2 & M^3_3 \end{bmatrix}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi\; a^1 - \sin\varphi\; a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi\; a^1 + \cos\varphi\; a^2$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi \; a^1 - \sin\varphi \; a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi \; a^1 + \cos\varphi \; a^2$$

V řeči matic:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{kde} \qquad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi\, a^1 - \sin\varphi\, a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi\, a^1 + \cos\varphi\, a^2$$

V řeči matic:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{kde} \qquad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Skládání rotací:

$$\boldsymbol{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_{\alpha+\beta}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi\; a^1 - \sin\varphi\; a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi\; a^1 + \cos\varphi\; a^2$$

V řeči matic:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{kde} \qquad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\boldsymbol{R}^1_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^2_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^3_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení můžeme dostat souřadnice rotace $\boldsymbol{R}$ dané složením rotací podél různých os, např. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^1_\alpha \cdot \boldsymbol{R}^3_\beta$.

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi\, a^1 - \sin\varphi\, a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi\, a^1 + \cos\varphi\, a^2$$

V řeči matic:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{kde} \qquad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\boldsymbol{R}^1_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení může

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^1_\alpha \cdot \boldsymbol{R}^3_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin a] \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta\sin a & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi\, a^1 - \sin\varphi\, a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi\, a^1 + \cos\varphi\, a^2$$

V řeči matic:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{kde} \qquad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\boldsymbol{R}^1_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^2_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^3_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení můžeme dostat souřadnice rotace $\boldsymbol{R}$ dané složením rotací podél různých os, např. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^1_\alpha \cdot \boldsymbol{R}^3_\beta$.

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$	komutativita sčítání
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$	asociativita sčítání
$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$	asociativita násobení
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$	distributivita
$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$	nulová matice
$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$	jednotková matice

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru.* Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \qquad \text{komutativita sčítání}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \qquad \text{asociativita sčítání}$$

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \qquad \text{asociativita násobení}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \qquad \text{distributivita}$$

$$\boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A} \qquad \text{nulová matice}$$

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} \qquad \text{jednotková matice}$$

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$	komutativita sčítání	
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$	asociativita sčítání	$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$	asociativita násobení	
$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$	distributivita	
$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$	nulová matice	$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$	jednotková matice	

Oproti obyčejným číslům je ale násobení obecně nekomutativní:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \qquad \text{pro obecné } \boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{B}$$

Míru nekomutativnosti vyjadřuje komutátor

$$\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\right] = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

Inverzní matice

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ je matice splňující

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \;=\; \boldsymbol{I}$$

Inverzní matice

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ je matice splňující

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \quad = \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \quad = \quad \boldsymbol{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{v} \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$$

Inverzní matice

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ je matice splňující

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \;=\; \boldsymbol{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{v} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} \;=\; \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$$

Pro diagonální matice je inverze jednoduchá:

$$\begin{bmatrix} a_{(1)} & & & 0 \\ & a_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{(1)}^{-1} & & & 0 \\ & a_{(2)}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)}^{-1} \end{bmatrix}$$

Inverzní matice

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ je matice splňující

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \quad = \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \quad = \quad \boldsymbol{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{v} \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$$

Pro diagonální matice je inverze jednoduchá:

$$\begin{bmatrix} a_{(1)} & & & 0 \\ & a_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{(1)}^{-1} & & & 0 \\ & a_{(2)}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ne každá matice má inverzi. Např. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ nebo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ inverzi nemají. Takové matice se nazývají *singulární*.

Matice, které mají inverzi, se nazývají *regulární*.

Determinant

$$n = 1 \qquad \det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a \qquad + \begin{bmatrix} \circ \end{bmatrix}$$

$$n = 2 \qquad \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = a\,b - c\,d \qquad + \begin{bmatrix} \circ & \\ & \circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \circ \\ \circ & \end{bmatrix}$$

$$n = 3 \qquad \det \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} +A^1_1A^2_2A^3_3 + A^1_2A^2_3A^3_1 + A^1_3A^2_1A^3_2 \\ -A^1_1A^2_3A^3_2 - A^1_3A^2_2A^3_1 - A^1_2A^2_1A^3_3 \end{matrix} \qquad + \begin{bmatrix} \circ & & \\ & \circ & \\ & & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \circ & \\ & & \circ \\ \circ & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \circ \\ \circ & & \\ & \circ & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \circ & & \\ & & \circ \\ & \circ & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \circ \\ & \circ & \\ \circ & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \circ & \\ \circ & & \\ & & \circ \end{bmatrix}$$

$$n \qquad \det \boldsymbol{A} = \sum_{\text{pertmutace } \sigma} \operatorname{sign} \sigma \; A^1_{\sigma_1} \, A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$$

Determinant

$$n = 1 \qquad \det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a \qquad\qquad + \begin{bmatrix} \circ \end{bmatrix}$$

$$n = 2 \qquad \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = a\, b - c\, d \qquad\qquad + \begin{bmatrix} \circ & \\ & \circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \circ \\ \circ & \end{bmatrix}$$

$$n = 3 \qquad \det \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} +A^1_1 A^2_2 A^3_3 + A^1_2 A^2_3 A^3_1 + A^1_3 A^2_1 A^3_2 \\ -A^1_1 A^2_3 A^3_2 - A^1_3 A^2_2 A^3_1 - A^1_2 A^2_1 A^3_3 \end{matrix} \qquad + \begin{bmatrix} \circ & & \\ & \circ & \\ & & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \circ & \\ & & \circ \\ \circ & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \circ \\ \circ & & \\ & \circ & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \circ & & \\ & & \circ \\ & \circ & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \circ \\ & \circ & \\ \circ & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \circ & \\ \circ & & \\ & & \circ \end{bmatrix}$$

$$n \qquad \det \boldsymbol{A} = \sum_{\text{pertmutace } \sigma} \operatorname{sign} \sigma \; A^1_{\sigma_1}\, A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$$

Vlastnosti

- $\boldsymbol{D}$ diagonální $\quad\Rightarrow\quad$ $\det \boldsymbol{D} =$ součin čísel na diagonále
- pokud je alespoň jeden sloupec či řádek matice $\boldsymbol{A}$ nulový $\quad\Rightarrow\quad$ $\det \boldsymbol{A} = 0$
- prohození dvou řádků (sloupců) změní pouze znaménko determinantu
- $\det\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\big) = \big(\det \boldsymbol{A}\big)\big(\det \boldsymbol{B}\big)$
- $\det\big(\boldsymbol{A}^{-1}\big) = \big(\det \boldsymbol{A}\big)^{-1} \qquad \Leftarrow \qquad \det\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}\big) = \det \boldsymbol{I} = 1$
- $\boldsymbol{A}$ lze invertovat (je regulární) pokud $\quad \det \boldsymbol{A} \neq 0$

Stopa

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} \;=\; \sum_j A^j_j \;=\; \text{součet čísel na diagonále matice}$$

Cykličnost stopy

$$\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \;\ldots\; \cdot \boldsymbol{Z}\big) \;=\; \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{B} \cdot \;\ldots\; \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{A}\big)$$

Stopa

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} \;=\; \sum_j A^j_j \;=\; \text{součet čísel na diagonále matice}$$

Cykličnost stopy

$$\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{Z}\big) \;=\; \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{B} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{A}\big)$$

Podobnost matic

Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nazýváme podobné, pokud existuje regulární matice $\boldsymbol{T}$ taková, že

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$$

Determinanty a stopy podobných matic jsou stejné

$$\det\big(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}\big) \;=\; \det A$$

$$\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}\big) \;=\; \operatorname{tr} A$$