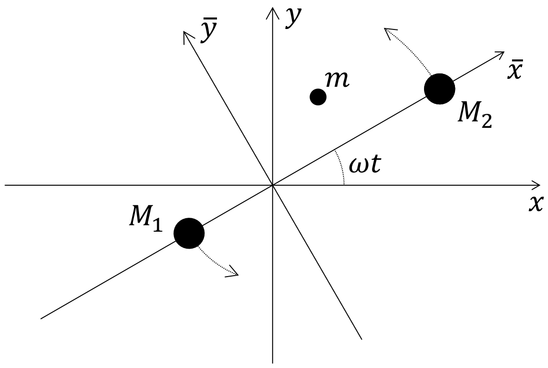
Příklad č. 2 z Úvodu do teoretické fyziky I (2017)

Nalezněte korotující rovnovážné polohy (tzv. Lagrangeovy body) v rovinném omezeném kruhovém problému tří těles. V této aproximaci dvě tělesa o hmotnostech M_1 a M_2 vykonávají keplerovský kruhový pohyb. V rovině jejich oběhu sledujeme pohyb třetího tělesa o mnohem menší hmotnosti m, které nijak neovlivňuje pohyb prvních dvou těles.



Označíme-li celkovou hmotnost prvních dvou těles $M = M_1 + M_2$ a relativní hmotnost druhého tělesa $\alpha = M_2/M$, můžeme napsat Lagrangeovu funkci pro třetí těleso v težišťové soustavě prvních dvou těles

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + GmM \left[\frac{1-\alpha}{|\vec{r} - \vec{r_1}(t)|} + \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r_2}(t)|} \right], \tag{1}$$

kde poloha třetího tělesa je $\vec{r} = (x, y)$. Polohy prvních dvou těles závisí na čase, konkrétně pro kruhové orbity $\vec{r_1}(t) = -a\,\alpha\,(\cos\omega t, \sin\omega t)$ a $\vec{r_2}(t) = a\,(1-\alpha)\,(\cos\omega t, \sin\omega t)$, kde a je vzdálenost obou těles a ω je úhlová rychlost jejich oběhu.

1. Ukažte, že transformací $(x, y) = (\bar{x}\cos\omega t - \bar{y}\sin\omega t, \bar{x}\sin\omega t + \bar{y}\cos\omega t)$ do soustavy $(\bar{x}, \bar{y})$ rotující spolu s M_1 a M_2 budou obě tělesa ležet na ose $\bar{x}$ a získáme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{m}{2}\left[(\dot{\bar{x}} - \omega\bar{y})^2 + (\dot{\bar{y}} + \omega\bar{x})^2\right] + GmM \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{(\bar{x} + \alpha a)^2 + \bar{y}^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\bar{x} - (1-\alpha)a)^2 + \bar{y}^2}} \right]. \tag{2}$$

   Přechodem do neinerciální soustavy se v Lagrangeově funkci nově odráží odstředivá a Coriolisova síla. Přesvědčit se o tom lze následovně: pohybové rovnice bez vlivu gravitace (položením $G = 0$) odpovídají působení síly $\vec{F} = m\,\omega^2\,\vec{\bar{r}} - 2\,m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{\bar{r}}}$, kde $\vec{\bar{r}} = (\bar{x}, \bar{y})$ a vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ je orientován v kladném směru osy z.

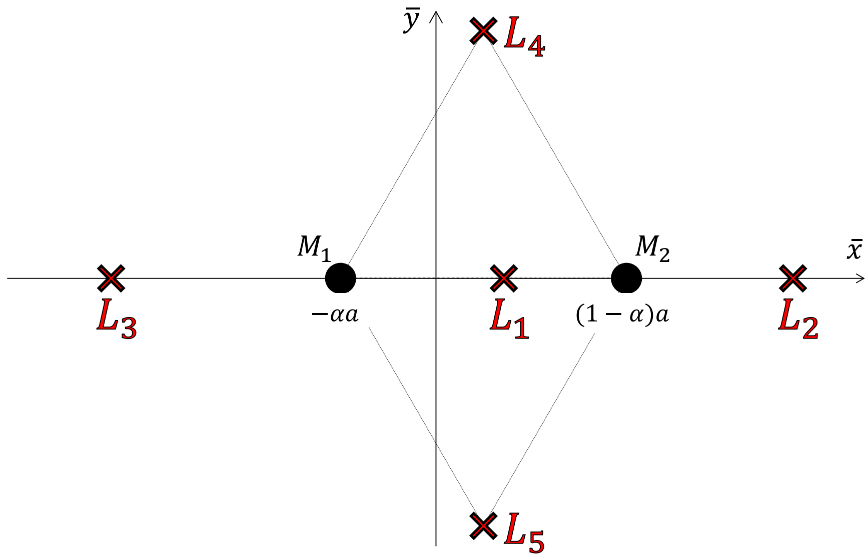
2. Nová Lagrangeova funkce (2) nezávisí na čase, integrál energie a související hamiltonián se tedy budou zachovávat. Určete zobecněné hybnosti $p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}$ a odvoďte hamiltonián

$$H = \frac{p_{\bar{x}}^2 + p_{\bar{y}}^2}{2\,m} + \omega(\bar{y}\,p_{\bar{x}} - \bar{x}\,p_{\bar{y}}) - GmM \left[\frac{1-\alpha}{\sqrt{(\bar{x} + \alpha a)^2 + \bar{y}^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\bar{x} - (1-\alpha)a)^2 + \bar{y}^2}} \right]. \tag{3}$$

   Při odvozování si všimněte, že energii v rotující soustavě nelze získat pouhou změnou znaménka v (2). Nevystupuje v ní člen odpovídající Coriolisově síle, která působí kolmo na rychlost a nevykonává tudíž práci. Člen odpovídající odstředivé síle se chová jako potenciál (mění znaménko). Díky zobecněným hybnostem toto v (3) vidět není.

3. Napište Hamiltonovy kanonické rovnice.

4. Určete rovnice pro stacionární polohu tělesa m v soustavě $(\bar{x}, \bar{y})$ tím, že položíte časové derivace všech zobecněných poloh i hybností rovné nule. Ze získané soustavy eliminujte hybnosti a použijte vyjádření úhlové rychlosti oběhu prvních dvou těles ze 3. Keplerova zákona: $\omega^2 = GM/a^3$.



5. *Bonusová část:* Řešením získaných rovnic nalezněte Lagrangeovy body.

   V případě $\bar{y} = 0$ platí pro přeškálovanou souřadnici $\xi = \bar{x}/a$ rovnice

$$\xi - (1-\alpha)\frac{\xi + \alpha}{|\,\xi + \alpha|^3} - \alpha\frac{\xi - (1-\alpha)}{|\,\xi - (1-\alpha)|^3} = 0\,. \tag{4}$$

   Tato rovnice se redukuje vždy na polynomiální rovnici 5. stupně, jejíž tvar závisí na kombinaci znamének argumentů absolutních hodnot. Analytický postup zde končí, řešení je nutné hledat numericky. Vyjdou vždy tři reálné kořeny, tzv. kolineární Lagrangeovy body: jeden mezi tělesy (Lagrangeův bod L_1), jeden vpravo od tělesa 2 (L_2) a jeden vlevo od tělesa 1 (L_3).

   V případě $\bar{y} \neq 0$ ukažte, že existují další dvě řešení přesně ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka, tj. $\bar{x} = (\frac{1}{2} - \alpha)a$, $\bar{y} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Jde o Lagrangeovy body L_4 a L_5.

   Polohy kolineárních bodů na obrázku odpovídají $M_1 = 2M_2$, tedy $\alpha = 1/3$. Ve sluneční soustavě se většinou bere Slunce jako M_1 a některá z planet (napr. Země, Jupiter) jako M_2. Body L_1 a L_2 vycházejí v téměř symetrických polohách blízko planety, bod L_3 je od Slunce zhruba ve stejné vzdálenosti jako planeta.

   Lagrangeovy body mají v astrofyzice řadu zajímavých uplatnění. Například kolem bodů L_4 a L_5 Jupiteru se nacházejí skupiny asteroidů (tzv. Trojané), které obíhají po stejné dráze kolem Slunce 60° před a za Jupiterem.

D. Heyrovský, R. Švarc, ÚTF, 24. 11. 2017