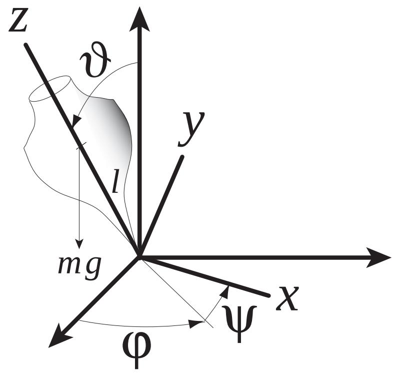
Příklad č. 3 z Úvodu do teoretické fyziky I (2017)

Pomocí Lagrangeova formalismu a Eulerových úhlů vyšetřete pohyb tzv. těžkého symetrického setrvačníku s pevným bodem. Jde o osově symetrické těleso hmotnosti m, které se volně otáčí v homogenním gravitačním poli g kolem pevného bodu vzdáleného l od těžiště tělesa.



1. Ukažte, že Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \tfrac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2 - mgl\cos\vartheta \ . \tag{1}$$

   Návod: Dosaďte z Eulerových kinematických rovnic za Ω_i do kinetické energie
   $$T = \tfrac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \tfrac{1}{2}I_3\Omega_z^2,$$
   kde $I_1 = I_2$ a I_3 jsou složky tenzoru setrvačnosti vůči hlavním osám v těžišti.

2. Z cykličnosti ψ a φ a z nezávislosti na t odvoďte tři integrály pohybu

$$I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta) \equiv L_\psi = konst. \ , \tag{2}$$
$$[(I_1 + ml^2)\sin^2\vartheta + I_3\cos^2\vartheta]\,\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi}\cos\vartheta \equiv L_\varphi = konst. \ , \tag{3}$$
$$\tfrac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2 + mgl\cos\vartheta \equiv E = konst. \ . \tag{4}$$

3. Řešením soustavy $(2,3)$ vyjádřete $\dot{\psi}$ a $\dot{\varphi}$ jako funkci ϑ, jejich dosazením do (4) odvoďte

$$\tfrac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot{\vartheta}^2 = \tilde{E} - U_{ef}(\vartheta) \ , \tag{5}$$

   kde $\tilde{E} = E - L_\psi^2/2I_3$ a „efektivní potenciál“ $U_{ef}(\vartheta)$ je dán

$$U_{ef}(\vartheta) = \frac{(L_\varphi - L_\psi\cos\vartheta)^2}{2(I_1 + ml^2)\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta \ . \tag{6}$$

4. Načrtněte typický průběh efektivního potenciálu $U_{ef}(\vartheta)$.

5. Ukažte, že existují speciální jednoduchá řešení $\vartheta = \vartheta_c = konst.$, kde hodnota ϑ_c je minimem efektivního potenciálu U_{ef} a platí $\tilde{E} = U_{ef}(\vartheta_c)$. Pro tato řešení pak integrací vztahů pro $\dot{\varphi}$ a $\dot{\psi}$ z části 3 ověřte, že $\varphi(t) = \omega_\varphi\, t + \varphi_0$, a $\psi(t) = \omega_\psi\, t + \psi_0$, kde ω_φ, ω_ψ, φ_0, ψ_0 jsou konstanty. Setrvačník tedy rotuje kolem své osy symetrie konstantní úhlovou rychlostí ω_ψ , přičemž tato osa se rovnoměrně pohybuje konstantní úhlovou rychlostí ω_φ po povrchu svislého kužele — setrvačník koná *regulární precesi.*

D. Heyrovský, R. Švarc, ÚTF, 8. 12. 2017