

Fyzika pro matematiky — Mechanika NMFY 160 L

(předběžná pracovní verze)

J. Obdržálek

2017-03-07

Obsah

1	O fyzice obecně 2017-02-22	9
1.1	Fyzika coby věda	9
1.2	Fyzika v rámci ostatních věd	9
1.3	Výchozí představy fyziky	10
1.3.1	Fyzika klasická, relativistická, kvantová	10
1.3.2	Klasická fyzika	10
1.3.3	„Moderní fyzika“, současný pohled	11
1.4	Filozofie a fyzika (informativní body)	14
1.4.1	Přístup k popisu	14
1.4.2	„Je foton částice nebo vlna?“	15
1.4.3	Co s rozpory	15
1.4.4	Resumé	15
2	Základní pojmy („mechanikopis“) 2017-02-22	17
2.1	Literatura	17
2.2	Použité matematické pojmy	17
2.3	Základní fyzikální pojmy a termíny (připomenutí)	17
2.3.1	Rámec popisu; terminologie	17
2.3.2	Zkoumané objekty	18
2.3.3	Vlivy působící na zkoumané objekty	20
2.4	Přístup	20
2.4.1	Porovnání: vektorová (newtonovská) mechanika	20
2.4.2	Porovnání: analytická mechanika	21
2.5	Matematický aparát: vektorová algebra	22
2.5.1	Skalár α	22
2.5.2	Vektor \vec{v}	23
2.5.3	Vektorová funkce, vektorové pole	23
2.5.4	Pojetí geometrické a složkové	23
2.5.5	Součiny vektorů	23
2.5.6	Volný, vázaný, klouzavý vektor	25
2.5.7	Tenzor T_{ij} ; $T_{i,\dots,k}$	25
2.6	Matematický aparát: vektorová analýza	26
2.6.1	Parciální derivace (∂ , nabla ∇)	26
2.6.2	Gradient (grad , ∇)	26
2.6.3	Totální derivace (d)	26
2.6.4	Součiny operátoru nabla	26
2.6.5	Laplaceův operátor (laplacián Δ)	27
3	Kinematika hmotného bodu 2016-08-26	29
3.1	Předmět kinematiky	29
3.2	Základní pojmy	29
3.2.1	Vztažná soustava	29
3.2.2	Poloha, \vec{r} (bodu)	29
3.2.3	Trajektorie (= křivka)	29
3.2.4	Křivost κ (křivky)	30
3.2.5	Délka křivky, dráha	30
3.2.6	Rychlost \vec{v} , posuvná rychlost (bodu)	31
3.2.7	Zrychlení \vec{a} (bodu)	31
3.3	Poloha a rychlost obecných objektů	31

3.4	Úhlové veličiny	32
3.4.1	Úhlová poloha φ	32
3.4.2	Úhlová rychlost $\vec{\omega}$	32
3.4.3	Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$	32
3.5	Plošné veličiny	32
3.5.1	Plošná rychlost \vec{w}	32
3.5.2	Plošné zrychlení $\vec{\dot{w}}$	32
4	Dynamika hmotného bodu 2016-09-19	33
4.1	Předmět	33
4.2	Základní veličiny dynamiky hmotného bodu	33
4.2.1	Hmotnost m	33
4.2.2	Poloha \vec{r}	33
4.2.3	Rychlost \vec{v}	33
4.2.4	Hybnost \vec{p}	33
4.2.5	Síla \vec{F}	34
4.2.6	Síla: různé typy klasifikace	34
4.3	Silový diagram	35
4.4	Newtonovy pohybové zákony	35
4.4.1	Rámeček: Newtonův absolutní prostor a čas (původní pojetí)	35
4.4.2	Newtonovy pohybové zákony	35
4.4.3	Nultý Newtonův zákon – (přísně tajný) zákon výslednice	35
4.4.4	První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti (1NZ)	35
4.4.5	Druhý Newtonův zákon – zákon síly (2NZ)	36
4.4.6	Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce (3NZ)	36
4.5	Princip relativity; Galileo Galilei, Einstein	37
4.6	Další příbuzné mechanické veličiny	38
4.6.1	Silové pole $\vec{F}(\vec{r})$	38
4.6.2	Hustota síly $\vec{f}(\vec{r})$	38
4.6.3	Intenzita pole \vec{I}	38
4.6.4	Moment síly \vec{M} (vůči bodu)	38
4.6.5	Moment hybnosti \vec{b} (vůči bodu)	38
4.6.6	Impulz síly \vec{J}	39
4.7	Práce, energie	39
4.7.1	Potenciálová síla; potenciální energie	39
4.7.2	Intenzita \vec{I} ; potenciál φ	39
4.7.3	Práce W ; \dot{W}	39
4.7.4	Zákon zachování mechanické energie; konzervativní síla	40
4.7.5	Konzervativní síly	40
4.7.6	Výkon P	41
4.8	Tření	41
4.8.1	Klasifikace	41
4.8.2	Tření dynamické (kinetické)	42
4.8.3	Tření statické	42
5	Řešení pohybové rovnice: kmity 2016-03-28	43
5.1	Matematický aparát	43
5.1.1	Homogenní rovnice	43
5.1.2	Nehomogenní rovnice	44
5.1.3	Pohybová rovnice – 2. Newtonův zákon	44
5.2	Konkrétní tvary síly	44
5.2.1	Nulová síla: $F = 0$	44
5.2.2	Konstantní síla: $F = F_0$	44
5.2.3	Netlumený harmonický oscilátor: $F = -kx$	45
5.2.4	Harmonický oscilátor s předpětím: $F = -kx + F_0$	46
5.2.5	Tlumený harmonický oscilátor: $F = -kx - h\dot{x}$	47
5.2.6	Vynucené kmity: $F = -kx - h\dot{x} + F(t)$	49
5.2.7	Skládání kmitů	53
5.2.8	Vázané kmity. Kvazičástice	55

5.2.9	Řetízek oscilátorů	55
5.2.10	XXX Struna	56
5.2.11	XXX Řetízek s bází	56
5.3	Speciální pohyby 3D: centrální pole	56
5.3.1	Definice centrálního pole	56
5.3.2	Obecné vlastnosti centrálních polí	57
5.3.3	Prostorový harmonický oscilátor	57
5.4	Relaxační kmity	58
6	Setrvačné (zdánlivé) síly 2016-04-11	59
6.1	Mechanika v nenormálních situacích	59
6.1.1	Pohyb částice v normální situaci	59
6.1.2	První nenormální situace	60
6.1.3	Druhá nenormální situace: neinerciální soustava	60
6.1.4	Čtyři vysvětlující poznámky	62
6.1.5	Jak popisovat co nejlépe	63
6.2	Neinerciální vztažné soustavy – analytická metoda	63
6.3	Populárně: Neinerciální vztažné soustavy grafickou metodou	65
6.3.1	Diskretizace	65
6.3.2	Parametrizovaná trajektorie (označovaná cesta)	65
6.3.3	Rychlost	65
6.3.4	Zrychlení	66
6.3.5	Výsledná síla (výslednice)	66
6.4	Cvičení	66
6.5	Společné vlastnosti setrvačných sil	67
6.6	Slovní zmatky; dostředivá síla a jiná „odstředivá síla“	67
6.6.1	(Vazbová) dostředivá síla	68
6.6.2	Odstředivá síla (působící na vazbu)	68
6.7	Příklady	68
6.7.1	Košiková na kolotoči: zvláště názorný příklad	68
6.7.2	Střelba na židličky	69
6.7.3	Odklon pasátů	69
6.7.4	Pád z velké výšky	69
6.7.5	A nakonec Cimrmanovo „Tudy cesta nevede, přátelé!“	70
7	Soustava HB a tuhé těleso 2015-04-30	71
7.1	Soustava hmotných bodů	71
7.1.1	Zavedení, základní pojmy	71
7.1.2	Střed hmotnosti, hmotný střed, těžiště	72
7.1.3	První a druhá věta o hybnosti	72
7.1.4	Kinetická energie; Königova věta	72
7.1.5	XXX Zákony zachování	72
7.1.6	Srážka (ráz)	72
7.2	Pojem tuhého tělesa	72
7.2.1	Základní představy	72
7.2.2	Popis tuhého tělesa. Stupně volnosti	73
7.2.3	Volný, vázaný a klouzavý vektor	74
7.3	Kinematika tuhého tělesa	74
7.3.1	Přemístění tuhého tělesa	74
7.3.2	Kinematický šroub	75
7.3.3	Ekvivalence rotace kolem bodu a kolem osy	77
7.4	Dynamika TT: skládání sil, silová dvojice	78
7.4.1	Klouzavý vektor	78
7.4.2	Skládání dvou klouzavých vektorů. Silová dvojice	78
7.4.3	Skládání libovolného počtu klouzavých vektorů a silových dvojic	79
7.5	Dynamika tuhého tělesa	80
7.6	Rovnováha tuhého tělesa	81
7.7	Rotace kolem pevné osy	81
7.8	Tenzor setrvačnosti, Eulerovy rovnice	83
7.8.1	Tenzor setrvačnosti	83
7.8.2	Eulerovy rovnice	84

8	Základy teorie relativity	2014-06-05	87
8.1	Motivace		87
8.1.1	Co je a co není teorie relativity		87
8.1.2	Důvod pro STR: nyní, začátkem 21. století		88
8.1.3	Důvod pro STR v době jejího vzniku: začátek 20. století		88
8.2	Klasické pojetí času a prostoru (připomenutí)		88
8.2.1	Vztažná soustava; synchronizace		88
8.2.2	Událost		89
8.2.3	Synchronizace vztažných soustav		89
8.2.4	Současnost a souměrnost; relativní a absolutní		89
8.2.5	Galileova transformace		89
8.2.6	Měření dob a délek		90
8.2.7	Klasické skládání rychlostí		90
8.3	Princip konstantní světelné rychlosti		91
8.4	Lorentzova transformace		91
8.4.1	Speciální Lorentzova transformace		91
8.4.2	Odvození Lorentzovy transformace		92
8.4.3	Lorentzova transformace pro 3D prostor (x, y, z)		93
8.5	Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace		94
8.5.1	Transformace rychlostí („skládání rychlostí“)		94
8.5.2	Interval jako invariant Lorentzovy transformace		94
8.5.3	Relativita současnosti		95
8.5.4	Grafické znázornění		95
8.6	Klasické interpretace: kontrakce délek, dilatace času, éter		95
8.6.1	Kontrakce délek		95
8.6.2	Dilatace času		96
8.6.3	Éter		97
8.6.4	„Strhování světla“		98
8.6.5	Světlo v látkovém prostředí a relativita		98
8.7	Minkowského formalismus, čtyřvektory		98
8.7.1	Základní idea		98
8.7.2	Čtyřvektory		99
8.7.3	Grafické zobrazení		100
8.7.4	Vlastní čas (vlastní doba)		100
8.7.5	Polohový čtyřvektor X		101
8.7.6	Čtyřvektor rychlosti – čtyřrychlost U		101
8.7.7	Čtyřvektor hybnosti P ; klidová m_0 a relativistická m hmotnost		101
8.7.8	Čtyřvektor zrychlení A		102
8.7.9	Čtyřvektor síly. Pohybová rovnice		102
A	Keplerova úloha – problém dvou těles	2016-09-03	105
A.1	Formulace úlohy		105
A.1.1	Cíl		105
A.1.2	Co záměrně zanedbáme		105
A.1.3	Vztah k reálné situaci		105
A.1.4	Další možný rozvoj teorie		106
A.2	Problém dvou těles – Keplerova úloha		106
A.3	Těžišťová vztažná soustava		106
A.4	Redukovaná úloha		107
A.5	Rovinný problém; moment hybnosti		107
A.6	Zákony zachování		108
A.7	Řešení rovinného problému		108
A.7.1	Polární souřadnice		108
A.7.2	Výpočet závislosti vzdálenosti r a času t		109
A.7.3	Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$		109
A.7.4	Pohyb planety a slunce		111
A.7.5	Shrnutí a diskuse		111
A.8	Keplerovy zákony		112
A.8.1	1. Keplerův zákon		112
A.8.2	2. Keplerův zákon		112
A.8.3	3. Keplerův zákon		112

A.9	Označení	113
A.9.1	Elipsa	113
A.9.2	Označení užitá v Keplerově úloze	114
B	Srážka (ráz) <small>2016-08-24</small>	115
B.1	Srážka obecně	115
B.2	Srážka dvou těles	116
B.2.1	Strategie	116
B.2.2	Těžišťová soustava \mathcal{T}	116
B.2.3	Označení	116
B.3	Srážka dvou hmotných bodů podél přímky	117
B.3.1	Příklad úlohy	117
B.3.2	Popis v těžišťové soustavě \mathcal{T}	118
B.3.3	Popis srážky v laboratorní soustavě \mathcal{L}	119
B.4	Aplikace	119
B.4.1	Pružná srážka stejných těles	119
B.4.2	Kolmý odraz míčku od pevné zdi	120
B.4.3	Kolmý odraz pingpongového míčku od páčky	120
B.4.4	Necentrální srážka	120
B.4.5	Gravitační prak	120
B.5	Co ovlivňuje srážku	120
B.5.1	Geometrie srážky těles	120
B.5.2	Povrch těles	120
B.5.3	Materiál těles	121
C	Veličina, měření, zápis hodnot <small>2015-09-21</small>	123
C.1	Veličina: pojem, hodnota veličiny	123
C.2	Zápis číselných hodnot veličin	123
C.3	Popis os grafu, nadpis sloupce tabulky	124
C.4	Měření – základní pojmy	124

Kapitola 1

O fyzice obecně

2017-02-22

Doporučenou literaturou pro přednášku Fyzika pro matematiky (FyM002-3) je základní učebnice

- Halliday D., Resnick R., Walker J.: Fyzika. VUTIUM Brno, 2013 (dřívější překlad VUTIUM Brno + Prometheus Praha, 2001, dotisky 2003, 2006), dále uváděná jako **HRW**

Zajímavou literaturou o fyzice všeobecně je

- The Feynman lectures on physics. Addison-Wesley, 1963, 1966
existuje i překlad český (2000) a slovenský (1990, Alfa, Bratislava)

Hlavně ale využijte *texty ze stránky UTF*, např. výborné výklady doc. Langer a prof. Podolského k mechanice nebo skriptum doc. Semeráka k relativitě. Text této své přednášky (zhruba) dávám průběžně na svou webovou stránku utf.mff.cuni.cz/~jobdr, tamtéž je i shrnutí Kalkul aj.

1.1 Fyzika coby věda

Fyzika je **objektivní věda** (vědecký postup, přístup, pohled atd., versus umění, umělecký přístup; tedy objektivní vs. subjektivní) Snaží se proto o co nejmenší vliv **subjektu**, který vědu tvoří nebo ji přijímá, a maximální vliv **objektu**, který je vědou studován.

Věda formuluje **model** a vytváří **pojmy** vhodné pro popis reality, přiřazuje jim názvy – **termíny**; studuje vlastnosti tohoto modelu a porovnává ho s **pozorováním** či (dokonce) **experimentem**. Ideálem je pak možnost předvídat (na základě modelu), co se stane v budoucnu. V tomto modelu požívá (fyzikální) **veličiny** popisující ty vlastnosti objektů, které lze vyjádřit číslem (a referencí, viz str. 123) a měřit.

Objektivita: velký význam **měření**.

Galileo: Co lze změřit, máme změřit; co změřit nejde, máme převést na měřitelné.

Lord Kelvin (1906, IEC): If you can't measure it, you can't improve it. Viz též kap. C.1.

Kritérium pravdivosti teorie: konečkonců soulad teorie s pozorováním reálného světa. (Dílčí kritéria: vnitřní logická konzistence, jednoduchost teorie, vyvrátitelnost ...)

1.2 Fyzika v rámci ostatních věd

Fyzika je **přírodní věda** (vs. **společenské**, humanitní vědy o člověku a lidské společnosti). Další přírodní vědy jsou např. chemie, biologie, ale i mineralogie, geofyzika, astrofyzika, technické vědy apod. V aplikované fyzice se můžeme setkat s **filozofickými kategoriemi** jako jsou **příčina** či **důsledek**¹, ale předmětem našich úvah **nebudou** kategorie typu **vůle**, **vědomí**, myšlenka, víra, Bůh, smysl (života, věcí), **dobro**, zlo apod. (Mohou se samozřejmě vyskytnout ve styčných oblastech s historií vědy, didaktikou, v aplikacích apod.)

Fyzika zkoumá nejzákladnější procesy v přírodě, zejména neživé (i když biofyzika vykládá fyzikálními metodami i chování živých objektů). Je ze všech přírodních věd nejvíce „matematizovaná“ (fakticky: axiomatizovaná, má nejpřesněji formulované předpoklady i pracovní metody). V tomto smyslu je i „nejhlubší“ přírodní vědou: např. kvantová fyzika vysvětluje pojem *chemické vazby* (klíčový pro chemii), který chemie jen postuluje z experimentu.

¹ Akce a reakce vyskytující se ve 3. Newtonově zákonu *nemají* charakter příčiny a důsledku. Viz str. 37.

Samozřejmě existují **mezni obory**: *fyzikální chemie*, *kvantová chemie*, *biofyzika* (fyzikální základy základních projevů živých organismů), *biomechanika* (mechanika člověka — balet, sport).

V historii šel velmi často ruku v ruce vývoj *fyziky* a *matematiky* (např. Newton — diferenciální počet pro popis pohybu hmotného bodu; Cauchy, Riemann — parciální diferenciální rovnice pro popis mechaniky kontinua). Fyzika jednak využívala hotového matematického aparátu (např. teorie grup, zejména teorie reprezentací má rozsáhlé a klíčové aplikace v kvantové teorii), ale současně inspirovala matematiku pro aktivitu v nových oblastech (ve fyzice užívaná, ale matematicky nekorektní Diracova δ -funkce vedla v matematice k teorii distribucí).

1.3 Výchozí představy fyziky

1.3.1 Fyzika klasická, relativistická, kvantová

Základní je rozdělení na

- teorie nerelativistické vs. relativistické podle popisu prostoročasu (při vysokých rychlostech)
- teorie nekvantové vs. kvantové podle popisu hmoty a energie (při malých rozměrech a energiích).

Hodnoty klíčových konstant jsou:

světelná rychlost $c = 299\,792\,458$ m/s;

Planckova konstanta $h = 6,624\dots \cdot 10^{-34}$ J·s.

	nerelativisticky	relativisticky
nekvantově	$c \rightarrow \infty \quad \hbar \rightarrow 0$	$c < \infty \quad \hbar \rightarrow 0$
kvantově	$c \rightarrow \infty \quad \hbar > 0$	$c < \infty \quad \hbar > 0$

Někdy „klasicky“ = „nekvantově“, jindy „klasicky“ = „nekvantově & nerelativisticky“.

Označení „velké“ či „malé“ u veličin s rozměry: nutno srovnat s hodnotou jiné veličiny mající též rozměr (např. srovnávání s člověkem a jeho možnostmi — antropomorfismus).

1.3.2 Klasická fyzika

Rámec popisu:

Prostor (3D). Z geometrie: euklidovská metrika (prostor je plochý – není zakřivený)

Čas (1D) plyne jen jedním směrem. Z filosofie přebíráme *princip kauzality*: nejprve nastane příčina, po ní teprve důsledek; ve vlastní fyzice se však kauzalita vyskytuje zřídka².

V klasické fyzice jsou prostor a čas *nezávislé* na sobě a vytvářejí *pevný rámec pro popis* přírodních dějů zájímavých fyziku. V moderních partiích fyziky tomu tak už není: ve STR jsou prostor a čas svázány na **prostoročas**, v OTR má prostoročas aktivní účast na dynamice těles. Superstruny.

Objekt, který sledujeme: Modelem objektu bývá **těleso**. Má jistý **tvar** a jistou **polohu** v prostoru (vs. objekty abstraktní, jako např. MŠMT). Tvar se může s časem měnit: těleso **deformovatelné** (materiál: **kontinuum**), nebo se nemění: **tuhé těleso** (něco jiného je pevná látka, viz dále).

Látka = **hmota** = **materiál** (synonyma).

Tvar tělesa: nejjednodušší situace je, když na tvaru nezáleží a těleso lze pokládat za bodové (např. jeho vlastní rozměry jsou zanedbatelně malé vůči jeho vzdálenosti od ostatních uvažovaných objektů): **hmotný bod** (HB). Jeho poloha v prostoru je určena jen třemi souřadnicemi (např. kartézskými). Jako synonymum pro „hmotný bod“ zde často používáme kratší, jednoslovné označení „částice“.

Soustava (= **systém**) několika částic (hmotných bodů).

Spojitě prostředí (**kontinuum**) vs. diskrétní soustava (částice, tuhé těles). Vznikne abstrakcí, když počet částic v soustavě zvětšujeme do nekonečna a současně tyto částice zmenšujeme tak, aby vhodné veličiny (např. hustota látky) měly rozumnou limitu. Naopak kontinuum

²Jak už bylo na str. 9 pod čarou podotknuto a na str. 37 bude vysvětleno, síly vystupující ve 3. Newtonově zákonu jako akce a reakce *nejsou* v kauzálním vztahu.

při popisu často diskretizujeme na infinitezimální „částice“. V klasické matematické analýze předpokládáme následně limitní přechod, v alternativní analýze pracujeme s infinitezimálními veličinami přímo.

Představa spojitého prostředí, limity v definicích apod. má zpravidla rozumný fyzikální smysl, pokud nenarazíme na existenci molekul a atomů, a tím na diskrétní strukturu látky.

Atributy těles: **hmotnost** m , **náboj** q , na úrovni elementárních částic **spin** s coby vlastní moment hybnosti, ...

Interakci mezi látkovými objekty popisuje klasická fyzika pojmem **síla**; jejím spojitým zobecněním je silové **pole**: gravitační pole, elektromagnetické pole.

To je pole v užším smyslu. V širším smyslu se polem ve fyzice nazývá každá fyzikální veličina Q definovaná v části prostoru, tj. $Q(\vec{r})$. Může samozřejmě ještě záviset i na čase t a dalších fyzikálních či geometrických veličinách (teplotní pole, rychlostní pole proudící kapaliny apod.)

Klasická teorie elektromagnetického pole však už v sobě obsahuje veškerou matematiku teorie relativity (např. invariantnost vůči Lorentzově a nikoli Galileiho transformaci). Chybí jí k relativitě jen Einsteinův krok – zavedení pojmu časoprostoru, tj. pochopení, že např. Lorentzova kontrakce pohybujících se objektů není vlastností těchto objektů (či jejich materiálu), ale vlastností časoprostoru, v němž tyto objekty popisujeme a měříme.

V klasické fyzice jsou tedy dvojí základní „stavební kameny“, **částice** (korpuskule) a **pole**. Jsou diametrálně odlišné, proto byl rozpor mezi korpuskulární a vlnovou teorií světla. Tento rozdíl setře *kvantová fyzika*, která jak částice, tak pole popisuje stejně (např. vlnovou funkcí) a rozdíl je jen v tom, že pro „částice“ je $m > 0$, pro „pole“ je $m = 0$.

1.3.3 „Moderní fyzika“, současný pohled

Co nového

Termín „moderní fyzika“ se užívá zpravidla jako protiklad ke klasické fyzice a zahrnuje **teorii relativity** a zejména **kvantovou fyziku** (tedy obě disciplíny jsou už více než jedno století staré!).

U **relativity** nastává podstatná *změna názoru na prostor a čas* (spojují se v prostorčas, současnost se stává relativní, naproti tomu rychlost světla je absolutní, tedy stejná v každé inerciální soustavě).

V **kvantové** teorii nastává podstatná *změna v pohledu na částici* (korpuskule) a *pole* (objekt doposud „vlnové povahy“), tj. mění se i představa a pojem hmoty. Kvantová částice se chová stejně jako kvantové pole, liší se jen jediným parametrem – klidovou hmotností m_0 , která je kladná pro dosavadní částice (např. elektron) a nulová pro dosavadní pole (např. foton).

Nerozlišitelnost: Částice ztrácejí svou individualitu: částice téhož druhu jsou navzájem nerozlišitelné, asi jako jednotlivé koruny na elektronickém bankovním účtu nebo vlny na vodě. Vkládáte-li každý den po koruně, nemá smysl otázka, zda příští týden vybraná koruna je pondělní či páteční. Jdou-li proti sobě dvě vlny na rybníce, nemá smysl rozlišovat, zda se vlny od sebe odrazily nebo zda jedna prošla druhou („která je která“).

Kvantování: Podobně jako je kvantována hmota (např. molekulami), jsou kvantovány i fyzikální veličiny, např. energie. Atom vodíku tvořený navzájem se přitahujícími elektronem a protonem má povoleny jen některé stabilní stavy (se zápornou energií, bereme-li nulovou hodnotu energie pro situaci, kdy jsou obě částice od sebe tak daleko, že už na sebe prakticky nepůsobí). Při interakci atomu vodíku s okolím se energie vodíku mění jen o dané rozdíly energií jednotlivých stavů, nikoli tedy spojitě.

Měření je v principu interakce objektu s měřicím přístrojem, a to zcela jiného typu, než jeho „běžný“ časový vývoj. Zatímco v klasické fyzice se předpokládá možnost provést měření tak „šetrně“, aby tato interakce zřetelně neovlivnila měřený objekt, v kvantové fyzice je nutno počítat s tím, že každé měření změní měřený objekt. (Jedinou výjimkou je opakované měření, které však zase nepřináší novou informaci o měřeném objektu.)

Stav: vlnová funkce, stavový vektor; reprezentace

Soustava např. 5 klasických částic je popsána $2 \times 3 \times 5 = 30$ funkcemi času t v 3D prostoru, např. jejich polohami $\vec{r}_i(t)$ a hybnostmi \vec{p}_i (jde o vektory, každý má 3 nezávislé složky). Naproti tomu soustava 5 kvantových částic je popsána jedinou **vlnovou funkcí** v prostoru o $5 \times 3 + 1 = 16$ rozměrech: $\Psi(\vec{r}_i, t)$. Tato funkce se též nazývá *stavový vektor*, zejména je-li opravdu reprezentována

vektorem – svým rozvojem ve vhodné soustavě ortogonálních funkcí. Je-li tedy $\Psi = \sum_j a_j \psi_j$, kde ψ_j jsou vlastní funkce operátoru \hat{Q} , pak se (stavový) vektor a_j nazývá ***Q-reprezentací*** vlnové funkce Ψ . Vlnová funkce je komplexní, komplexní sdružení se značí hvězdičkou: ψ^* , někdy pruhem: $\bar{\psi}$.

U vlnové funkce není podstatná amplituda; funkce ψ a $(-5 + 2i)\psi$ by popisovaly přesně stejný stav. Pracujeme proto většinou s vlnovými funkcemi normalizovanými, zpravidla na jednotku, tj. aby např. $\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$.

Koherentní směs vlnových funkcí je popsána jejich lineární kombinací: $\psi = \sum a_k \phi_k$. Nejobecnějším popisem kvantového systému je pak *matice hustoty* M_{ik} popisující nekoherentní směs vlnových funkcí.

Veličina: operátor

Každé fyzikální veličině L je přiřazen *operátor*, tedy předpis přiřazující jedné funkci obecně jinou funkci; značí se stříškou: \hat{L} . V maticové reprezentaci, kde je vlnová funkce popsána vektorem (v Hilbertově prostoru), je operátor popsán maticí L_{ik} . Střední hodnota \bar{L} veličiny L ve stavu $\psi(x)$ je pak

$$\bar{L} \equiv \langle \psi | \hat{L} | \psi \rangle = \int \psi^*(x)L(x)\psi(x)dx \quad (1.1)$$

Měřitelné fyzikální veličiny L jsou popsány hermitovskými operátory (samosdruženými, $L_{ik} = L_{ki}^*$). Možné naměřitelné hodnoty jsou pak vlastní hodnoty λ_k tohoto operátoru; vlastní funkce ϕ_k vyhovují rovnici

$$\hat{L}\phi_k = \lambda_k \phi_k \quad (\text{nesčítá se přes } k) \quad (1.2)$$

Vlnová funkce ϕ_k popisuje stav mající hodnotu λ_k veličiny L . Při měření veličiny L ve stavu popsaném funkcí $\psi = \sum a_k \phi_k$ dostáváme jako výsledek měření náhodně veličiny λ_k , každou s pravděpodobností $a_k^* a_k$.

Teorie „skrytých parametrů“, předpokládající, že stav „ve skutečnosti“ má nějakou přesnou hodnotu měřené veličiny a že je jen otázkou naší (ne)dokonalosti ji naměřit, se ukázaly z principu nepravdivé a byly vyvráceny i experimentálně (Bellův teorém).

Z nerozlišitelnosti kvantových částic plynou symetrie kladené na jejich vlnovou funkci, viz dále.

Fermiony, bosony; Pauliho vylučovací princip

Kterákoliv z elementárních částic je buď **fermion**, nebo **boson**, podle statistiky (buď Fermiho-Diracova, nebo Boseho-Einsteinova), kterou se řídí. Tytéž částice (např. čtyři elektrony) jsou nerozlišitelné. Jsou popsány jedinou funkcí $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4)$ (zpravidla stručně $\Psi(1, 2, 3, 4)$, nevypisujeme pro jednoduchost možnou závislost na čase t), která je funkcí $4 \cdot 3 = 12$ proměnných, tedy v 12D prostoru, a tato funkce Ψ při záměně dvou trojic proměnných popisujících dvě vybrané částice téhož druhu (např. 2. a 3.) buď změní znaménko (fermiony, $\Psi(1, 3, 2, 4) = -\Psi(1, 2, 3, 4)$), nebo nezmění (bosony, $\Psi(1, 3, 2, 4) = \Psi(1, 2, 3, 4)$). Z toho plyne pro fermiony **Pauliho vylučovací princip**: dva fermiony v jednom systému nemohou být v tomtéž stavu. To by totiž záměnou dvou stejných fermionů změnila jejich vlnová funkce Ψ znaménko na $-\Psi$, ale vzhledem k nerozlišitelnosti těchto částic by musela zůstat stejná, tedy $\Psi = -\Psi$ a tedy Ψ by musela být nulová.

Nebylo by na místě zde vykládat kvantovou mechaniku. Ale důkaz, že pro kvantovou částici není jiná možnost než být bosonem nebo fermionem, je tak jednoduchý a názorný, že stojí za uvedení:

Zavedme zde operátor \hat{T}_{23} záměny druhé částice s třetí (transpozice) a hledejme vlastní funkce $\psi(1, 2, 3, 4)$ a vlastní hodnoty λ tohoto operátoru, tedy funkce, pro něž vede aplikace operátoru na pouhé vynásobení číslem λ :

$$\hat{T}_{23}\psi(1, 2, 3, 4) \equiv \psi(1, 3, 2, 4) = \lambda\psi(1, 2, 3, 4) \quad . \quad (1.3)$$

Opakovaná aplikace \hat{T}_{23} však vede k původní funkci, tedy

$$\hat{T}_{23}\hat{T}_{23}\psi(1, 2, 3, 4) \equiv \hat{T}_{23}\psi(1, 3, 2, 4) \equiv \psi(1, 2, 3, 4) = \lambda^2\psi(1, 2, 3, 4) \quad , \quad (1.4)$$

odkud plyne

$$\lambda^2 = 1 \quad (1.5)$$

$$\lambda = -1 \quad \text{anebo} \quad \lambda = 1 \quad , \quad (1.6)$$

vlastní hodnota λ operátoru částice je buď fermion (záměna částic mění znaménko vlnové funkce), anebo boson (záměna částic nemění znaménko vlnové funkce).

Standardní model

Základními prvky hmoty jsou podle současných představ tzv. **standardního modelu** fermiony, a to dvě šestice **leptonů** a **kvarků** (a ke každé částici ještě existuje antičástice s opačným nábojem, značka s pruhem nahoře: k elektronu to je pozitron, $\bar{e} = e^+$, k protonu antiproton $\bar{p} = p^-$). Tabulka shrnuje jejich značky, zaokrouhlené hmotnosti m (v MeV/c^2), náboje q a názvy. Hmotnost neutron je nepatrná a není dosud (2016) spolehlivě zjištěna, je však nenulová. Všechny tyto částice jsou fermiony, mají tedy poločíselný spin a platí pro ně Pauliho vylučovací princip.

Kvarky se v přírodě nikdy nevyskytují samostatně, ale jen ve dvojicích nebo trojicích držených spolu **gluony** a bosony W, Z vždy tak, aby výsledná „barva“³ byla neutrální – „bílá“. **Nukleony** (tvořící jádro atomu) a jiné **baryony** (těžší částice) jsou tvořeny trojicemi kvarků (např. **proton** $p^+ = uud$, **neutron** $n = udd$, $\Lambda = uds$, $\Omega^- = sss$), **mezony** jsou tvořeny kvarkem a antikvarkem (pion $\pi^+ = u\bar{d}$, kaon $K^- = s\bar{u}$).

Leptony

zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně
e^-	0,511	-1	elektron	μ^-	106	-1	mion	τ^-	1 777	-1	tauon
ν_e	$< 10^{-3}$	0	e-neutrino	ν_μ	$< 0,2$	0	μ -neutrino	ν_τ	< 20	0	τ -neutrino

Kvarky

zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně	zn.	m	q	vůně
u	3	$+\frac{2}{3}$	nahoru up	c	1 300	$+\frac{2}{3}$	půvabný charm	t	175 000	$+\frac{2}{3}$	svrchní top
d	6	$-\frac{1}{3}$	dolů down	s	100	$-\frac{1}{3}$	podivný strange	b	4 300	$-\frac{1}{3}$	spodní bottom

Interakce mezi fermiony – a tedy obecně mezi libovolnými hmotnými částicemi – se kvantově vykládá jako výměna bosonů coby kvantovaných polí příslušné interakce. Podle našich znalostí existují čtyři⁴ interakce, z nichž nejslabší, ale v makrosvětě na velké vzdálenosti prakticky jediná významná, gravitační interakce, se popisuje v obecné teorii relativity zakřivením prostoru, tedy geometricky; to bohužel zatím vzdoruje snahám o úspěšné kvantování. Přehledně:

jméno interakce	„síla“	dosah	zprostředkuje	důsledek (např.)
gravitační	10^{-40}	makro	??? (graviton)	stabilita sluneční soustavy
elektromagnetická	10^{-2}	makro	γ (foton)	stabilita atomu
silná	10^{+1}	mikro	g (gluon)	stabilita atom. jádra, protonu
slabá	10^{-5}	mikro	W^+, W^-, Z^0	stabilita elementárních částic

Makroskopické interakce: síla klesá se vzdáleností r jako r^{-2} , tedy energie jako $\frac{1}{r}$.

Mikroskopické interakce: závislost energie je jiná: $r e^{-r}$, proto je srovnání jen velmi přibližné. Uvedená hodnota „síla“ je řádová velikost energie na vzdálenost poloměru atomového jádra.

Interakce mezi fermiony jsou popsány kvantovými poli; jejich kvantováním dostáváme rovněž částice, ale *bozony*: pro elektromagnetickou interakci jsou to **fotony** (s nulovou hmotností), pro slabou interakci jsou to částice W (elektricky nabitě) a Z (elektricky nenabitě) s hmotnostmi $80,6 \text{ GeV}/c^2$ a $91,2 \text{ GeV}/c^2$ (tedy cca tisíckrát těžší než proton!), pro silnou interakci mezi kvarky jsou to **gluony** (s nulovou hmotností, elektricky nenabitě) popsané *kvantovou chromodynamikou* QCD.

Interakci elektromagnetickou a slabou se podařilo sjednotit na interakci zvanou **elektroslabá**. **Velké sjednocení** bude její spojení se silnou interakcí (GUT = grand unification theory).

Gravitaci se zatím kvantovat nedaří, lze ji však v obecné teorii relativity popsat geometrií prostoru (gravitace jako zakřivení prostoru). O její spojení se silnou a elektroslabou interakcí se snaží tzv. *teorie všeho* (TOE = theory of everything). Problémy: rovnice obecné teorie gravitace

³Tato charakteristika kvarku a gluonu nabývá jedné z hodnot červená, zelená, modrá a samozřejmě nemá s optickou barvou nic společného.

⁴Tzv. **výměnná interakce** není skutečnou interakcí, ale jen názornou interpretací principu nerozlišitelnosti kvantových částic.

jsou výrazně nelineární. Zatím však umíme pohodlně kvantovat jen lineární teorie.

1.4 Filozofie a fyzika (informativní body)

1.4.1 Přístup k popisu

Metoda: induktivní vs. deduktivně axiomatická. Příklady:

Indukce: Z Keplerova pozorování planet byly induktivně odvozeny 3 Keplerovy zákony. Na základě pozorování pádu pozemských těles (jablko!) a pohybu těles „nebeských“ (Měsíc) byl induktivně odvozen Newtonův gravitační zákon.

Dedukce: Z Newtonových pohybových zákonů + Newtonova gravitačního zákona lze deduktivně odvodit Keplerovy zákony (a to v obecnějším a přesnějším tvaru, než byly formulovány indukci z pozorování).

Vysvětlení: *kauzální* (příčinné) vs. *teleologické* (účelové). Výklad rovnovážných stavů: *statistický*.

Příklady na vysvětlení kauzální:

- Světlo (ale také částice) se na rozhraní odráží tak, že úhel odrazu = úhel lomu. Protože v okamžiku dopadu dopadá pod jistým úhlem, tak se v následujícím okamžiku odráží pod určeným úhlem odrazu.
- Částice se pohybuje pod vlivem síly (příčina) \vec{F} tak, že její zrychlení \vec{a} (důsledek) je rovno $\vec{a} = \vec{F}/m$ (odkud získám \vec{r} pomocí dvojí integrace).

Příklady na vysvětlení teleologické:

- Světlo (ale také částice) se pohybuje při odrazu po takové trajektorii, aby se z výchozího do cílového bodu dostalo (rychlostí odpovídající místnímu indexu lomu) v co nejkratším čase.
- Částice se pohybuje po takové trajektorii $q(t)$ a takovou rychlostí $\dot{q}(t)$, aby při dodržení zákona zachování energie byla minimální akce, tj. integrál

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad . \quad (1.7)$$

kde lagrangián \mathcal{L} je rozdíl kinetické a potenciální energie částice.

Popis statistický:

- Popis rovnovážného systému pomocí pravděpodobnostního výkladu dějů. Přejít k rovnováze je přechodem k makrostavu majícímu největší pravděpodobnost (makrostav realizovaný největším počtem mikrostavů).
- Popis fázových přechodů. Termodynamika. Statistická fyzika.

Mezi kauzálním a teleologickým popisem není v rámci klasické fyziky filozofický rozpor, protože jak mechanika, tak optika je přísně deterministická a není v ní tedy prostor pro vlastní vůli; oba výklady jsou ve svých důsledcích — jak se ve fyzice dokazuje — ekvivalentní.

Vědy **fenomenologické** (zkoumající jen jevy) vs. zkoumání příčin těchto jevů: termodynamika vs. molekulová nebo statistická fyzika. (Ovšem koneckonců i té „nejhlubší vědě“ vždy zbývá jen něco předpokládat, z toho vycházet a na základě toho vykládat pozorované jevy.)

1.4.2 „Je foton částice nebo vlna?“

Fyzika především popisuje jevy a hledá v jevech zákonitosti. Úspěšný bývá **redukcionismus**. Jev popisujeme na základě modelu, převedením či rozkladem na jiné (jednodušší) jevy, např. pohyb Země kolem Slunce převedeme s vyhovující přesností na gravitační zákon a pohybové rovnice pro dva hmotné body. (Chceme-li přesnost zvýšit, vezmeme jiný model, zahrneme další vlivy.) Má ovšem své meze i svá úskalí.

Vyslovíme-li otázku typu „Co je to plyn“, „Co je to hmota“, „Je foton částice nebo vlna?“, „Co je to kvark“, očekáváme úplné převedení daného objektu či jevu na objekty či jevy jednodušší. To jde celkem úspěšně u první otázky: prakticky vždycky nám stačí představa, že plyn je soubor obrovského počtu částic, které se na nejbližších vzdálenostech (rozměr molekul) silně odpuzují, na větších vzdálenostech jen slabě přitahují silou klesající jako dipólová interakce. U druhé otázky stačí fakticky jen podat výčet leptonů a kvarků a interakcí mezi nimi. U třetí otázky jsou však podsunuty pouhé dva klasické modely, z nichž ani jeden nevyhovuje úplně; foton sám však můžeme výstižně popsat v kvantové elektrodynamice. Otázka typu „**Co je to** kvark“ v tomto kontextu nemá smysl, protože kvark není na co jednoduššího převést. Smysl však má otázka jiná: „**Jak se chová** kvark, když ...“, „Co se stane s protonem (složeným ze 3 kvarků), když ...“.

Zjednodušující otázka typu „Co to je ...“ navádí v takovém případě k jednoduchému, případně elegantnímu, ale bezobsažnému výkladu užitím jiných nedefinovaných nebo záměrně vágních pojmů typu „Hmota je nesmírně zhuštěná energie“ (a co je pak ta energie? a z čeho je ta? jak lze tuto definici použít, co z ní lze odvodit?)

1.4.3 Co s rozpory

Rozpory teorie a přístup k nim:

- Rozpor teorie s praxí:
 - revize měření (Weberovo měření s rychlostí světla cca o 10 % větší; zřejmě šlo o omyl v experimentu);
 - revize toho, která teorie a jak byla použita (např. byl použit příliš zjednodušený model);
 - revize teorie samé (Rozbor Michelsonova-Morleyova pokusu vedl ke vzniku teorie relativity).
- Vnitřní rozpory a nekonzistence teorie.

Neměly by být, ale proces poznávání je opravdu obtížný. Občas jsou známa „bolavá místa“ teorie, kde jistá pragmatická nekonzistentnost je nejjednodušším (příp. zatím jediným známým) řešením. Tak v chemii předkvantového věku byl rozpor v chování celkem velmi stabilního benzenu popsaného jako vysoce nenasycený cyklohexatrien se třemi dvojnými vazbami v uhlíkovém cyklu; teprve kvantová mechanika vysvětlila jeho stabilitu pomocí úplné delokalizace π -elektronů vytvářejících tyto vazby. Podobně o historickém Bohrově modelu vodíku se žertem říkávalo, že podle něj se počítá jedním způsobem v pondělí, středu a pátek, jiným způsobem v úterý, čtvrtek a sobotu, a že v neděli se nepočítá.

1.4.4 Resumé

Víme toho na jednu stranu překvapivě mnoho, ovšem zdaleka ne ani to, co bychom dost urgentně potřebovali. To je samozřejmě docela dobře — je to šance pro mladé fyziky, ale i pro matematiky: Nobelovovu cenu v roce 1961 za rezonanční absorpci γ -záření a s tím spojený jev po něm nazvaný dostal matematik Rudolf Ludwig Mössbauer.

Kapitola 2

Základní pojmy („mechanikopis“) 2017-02-22

2.1 Literatura

Jde hlavně o připomenutí známých věcí a zasazení do kontextu. Mnohé z toho je v úvodním kurzu **HRW**. Důraz klademe na fyzikální *představy*, v žádném případě memorování vzorců či velký objem látky.

Pro rozšíření lze využít zejména *webové stránky ÚTF* (Langer, Podolský, Semerák), a dále standardní učebnice teoretické mechaniky

2.2 Použité matematické pojmy

Připomeňme, že **vektorový** počet i **infinitesimální** počet (limita, derivace, integrál) se vyvíjely souběžně s mechanikou a ve svých počátcích byly vytvořeny víceméně „na zakázku“ pro ni.

Vektorová (newtonovská) mechanika

Derivace: Grafický význam: určuje směrnici tečny. Fyzikální význam: derivace podle času dává obecně rychlost (pro souřadnici $\{speed\}$, $\{velocity\}$: $v = ds/dt$; pro jinou veličinu $\{rate\}$: rychlost koroze, růstu krystalu daná např. dm/dt apod.). Derivace podle prostorových souřadnic dává hustotu, např. hmotnosti (dm/dV), energie apod.. Pečlivěji viz str. 19.

Pro více nezávislých proměnných, např. v poli, zavádíme **parciální derivace** (∂) podle jednotlivých proměnných; ty musí být uvedeny, např. $(\partial f/\partial x)_{y,z}$ nebo $\partial f(x, y, z)/\partial x$.

Integrál = „spojitý součet“. Určitý integrál $\int_a^b f(x)dx$ udává obsah plochy pod křivkou $f(x)$ od $x = a$ do $x = b$. Integrál jako funkce horní meze = primitivní funkce $\int_a^x f(\xi)d\xi = F(x)$, často psáno $F(x) = \int f(x)dx$; potom platí $dF(x)/dx = f(x)$ („opak derivace“).

Viz též Kalkul na mé webové stránce.

Analytická mechanika

Funkcionál: přiřazuje funkci číslu. Typická úloha: která funkce minimalizuje daný funkcionál a vyhovuje přitom jistým podmínkám (např. ve dvou bodech má dané funkční hodnoty)? Nový pojem: **variace** δf funkce f . Variační počet zkoumá vliv malé změny δf průběhu funkce f na vhodný funkcionál (např. na akci, rov. (1.7)).

Operátor \hat{L} , např. $\hat{L}(f) = g$ přiřazuje funkci g k funkci f . Rovněž transformace $\mathcal{T}(\{f\}) = \{g\}$ přiřazuje funkci g k funkci f .

2.3 Základní fyzikální pojmy a termíny (připomenutí)

2.3.1 Rámec popisu; terminologie

- **(3D) prostor**¹; 3D kontinuum. Polohu v něm určuje **polohový vektor** \vec{r} ; jeho změnu (**vektor**) **posunutí** $\vec{d} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$;

¹3D je běžná zkratka za „trojrozměrný“; podobně 2D atp.

oblast; 3D-doména je 3D část prostoru (oblast i doména jsou objekty, nikoli veličiny);

objem V je jedna z veličin charakterizujících oblast, míra oblasti (dalšími charakteristikami oblasti jsou např. poloha jejího těžiště, hranic, geometrický tvar apod.);

plocha; 2D-doména je 2D část prostoru (plocha i doména jsou objekty, nikoli veličiny);

povrch, hladina je plocha, někdy jen myšlená, většinou oddělující dvě různá prostředí (povrch i hladina jsou objekty)

obsah A je veličina charakterizující plochu, míra plochy.

- **čas** (1D kontinuum). Slovo „čas“ se často používá v různých blízkých významech, nedorozumění zpravidla nehrozí. Přesto pro úplnost uvádíme:

okamžik je bod na časové ose (okamžik je objekt, nikoli veličina);

časový údaj; datum je veličina t charakterizující okamžik; počáteční čas (initial time) t_i , koncový čas (final time) t_f ;

(**časový interval** je úsek na časové ose (interval je objekt);

doba; doba trvání Δt , t je jedna z veličin charakterizujících časový interval.

Speciálně pro „hodinu“ rozlišují angličtina i němčina *časový údaj* (it is 5 o'clock, es ist 5 Uhr) od *doby* (during 5 hours, innerhalb 5 Stunden); čeština nikoli (pro obojí slouží „hodina“: je 5 hodin, během 5 hodin).

- **prostorčas** (v STR; 4D) je sjednocením prostoru a (k němu ortogonálního) času. I v zakřiveném prostoru v OTR je čas vždy lokálně ortogonální k prostoru.

Sv. Augustin v „De tempore“ („O čase“) odpovídá na otázku, co to je čas: když se mne neptáte, vím, co to je; když se mne zeptáte, nevím.) To ovšem nevysvětlí pojem času, ale ilustruje potíže s definicemi právě těch nezákladnějších pojmů, kdy již „není z čeho vycházet“. Výkladem pojmu či jevu rozumíme jeho převedení na pojmy a vztahy pokládané na dané úrovni za známé, tj. nevysvětlované hlouběji, nanejvýš přiblížené příkladem.

2.3.2 Zkoumané objekty

- **Prostředí** je nejobecnější pojem pro vše, co je rozloženo v prostoru a má nějakou fyzikálně podstatnou vlastnost; může to být hmota (látka), pole (např. elektromagnetické) i vakuum.

– **Látka; hmota** (vs. pole): materiál, z něhož je vytvořena většina objektů, které ve fyzice sledujeme. Termín *látka* se užívá zpravidla tam, kde je hmotnost materiálu málo podstatná (např. v elektrostatice: látkové prostředí vs. vakuum).

– **Substance**: Látku zpravidla pokládáme za *substanci*, tj. za něco, co trvá, nevzniká ani nezaniká a jehož části se nanejvýš jen přesunují v prostoru. Matematickým vyjádřením této vlastnosti (zachování substance v lokálním tvaru) je *rovnice kontinuity* pro hustotu ρ substance:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (2.1)$$

– **Kontinuum** je deformovatelné, spojité prostředí. To může být v jednom ze tří skupenství:

– **Skupenství**_{state} je pevné, kapalně nebo plynné. Ostřejší dělení dává fáze:

– **Fáze**_{phase} je homogenní prostředí fyzikálně odlišitelné od jiné fáze, např. dvě krystalické modifikace, třeba i téže látky (CaCO₃: vápenec a aragonit). Různá skupenství vytvářejí vždy různé fáze.

Specifika různých skupenství:

- * **Pevná látka**_{solid}, s , má jistý tvar, ale obecně je schopná deformace (otázky pružnosti, pevnosti)

Pod vlivem malé konstantní síly se pevné těleso deformuje, tj. jeho části získají v rovnovážném stavu jinou *polohu*, ale pak zůstanou v *klidu*.

Mikroskopicky: molekuly v typické pevné látce jsou uspořádány pravidelně až do značných vzdáleností.

Populárně řečeno: molekuly jsou „v dotyku“ v jisté rovnovážné poloze. Pevná látka má proto vysokou hustotu, je málo stlačitelná a je soudržná.

- * **Kapalina**_{liquid}, l, neudrží smykové napětí („nebrání se stříhání“).
Je málo soudržná – pod vlivem i malé stálé síly (tíže) převezme tvar nádoby, v níž se nachází, při zachování svého objemu, případně pod vlivem **povrchového napětí** zaujme kulovitý tvar.
Pod vlivem konstantní síly získá v rovnovážném stavu jistou *rychlost* (závislou na vazkosti, tj. vnitřním tření v kapalině), a pohybuje se tedy stále dál („teče“).
Má zpravidla jen o málo nižší hustotu a je trochu více stlačitelná než pevná látka, často se však uvažuje jako nestlačitelná (ve srovnání s plynem).
Mikroskopicky: molekuly v typické kapalině jsou pravidelně uspořádány jen do malých vzdáleností.
Populárně řečeno: molekuly jsou skoro v dotyku, ale kloužou po sobě jako zrnka písku.
 - * **Plyn**_{gas}, g, také získá pod vlivem konstantní síly v rovnovážném stavu jistou *rychlost*. Plyn má řádově 1 000× menší hustotu než kapalina či pevná látka, není soudržný (vyplní celý prostor nádoby) a je-li v uzavřeném prostoru, je celkem snadno stlačitelný. (Na druhou stranu, vzduch v otevřeném ovzduší se za obvyklých rychlostí cca do 30 m/s pohybuje jako prakticky nestlačitelný.)
Mikroskopicky: molekuly v plynu jsou rozloženy chaoticky a ve velkých vzdálenostech (za obvyklých podmínek asi 10× více, než je jejich vlastní velikost).
Populárně řečeno: molekuly rychle létají a jsou od sebe asi desetkrát dál, než je jejich vlastní velikost, takže kromě vlastního okamžiku srážky na sebe nepůsobí vůbec (ideální plyn) nebo jen slabě (neideální plyn).
 - * Kondenzovaná fáze_{condensed matter} je společný název pro *pevnou látku* a *kapalinu* (obě mají vysokou hustotu a malou stlačitelnost).
 - * Tekutina_{fluid} je společný název pro *kapalinu* a *plyn* (obě mají chaotickou mikroskopickou strukturu).
 - * Kritický stav (teplota t_{kr} , tlak p_{kr} , molární objem $V_{m\ kr}$): stav, v němž mizí rozdíl mezi plynem a kapalinou. Viz termodynamika.
- **Těleso** je prostorově vymezená část látky. V daném čase je určena poloha každé jeho části v prostoru.
 - **Individualita**: U těles zpravidla předpokládáme, že mají svou individualitu (vs. vlna na vodě, kvantové částice, text na displeji PC). Např. při srážce dvou stejných klasických částic lze po srážce odlišit, která byla která; u vln na vodě, u kvantových částic či u obrázků na displeji taková otázka ztrácí smysl.
 - **Charakteristiky tělesa: „míra hmoty“**
 - * **hmotnost** $m > 0$, $[m] = 1\text{ kg}$ je v mechanice nejčastější mírou.
Poznámky:
 - „Hmotnost jako míra množství hmoty“ – vhodné pro fyziku, nikoli pro filosofii. Klidová hmotnost se v TR nezachovává, pohybová hmotnost je různá v různých inerciálních soustavách. Vhodnější mírou je *látkové množství* s jednotkou mol (značka rovněž mol).
 - Setrvačná hmotnost: vyskytuje se ve vztahu $\vec{F} = m\vec{a}$;
 - Gravitační hmotnost: ve vztahu $|\vec{F}| = G\frac{m_1m_2}{r^2}$, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$.
 - Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je v klasické mechanice náhodná shoda, stává se významnou v teorii relativity.
 - * **látkové množství** N , $[N] = 1\text{ mol}$ je výstižnější mírou zejména tam (např. v termodynamice), kde se vyšetřuje i změna hmoty (např. chemickými reakcemi).
 - **Hustota**: Hustota $\rho(\vec{r})$ hmotnosti m je definována tak, aby hmotnost dm infinitezimální oblasti $d\Omega$ kolem bodu určeného polohou \vec{r} o objemu dV byla rovna $dm = \rho dV$.
Obecně: hustota $q(\vec{r})$ aditivní veličiny Q (lhostejno, zda skalární, vektorové atp.) je definována tak, aby $dQ = q(\vec{r})dV$, kde dQ je celková hodnota veličiny Q v infinitezimální oblasti $d\Omega(\vec{r})$ o objemu dV kolem bodu \vec{r} . Častý zápis derivací $q(\vec{r}) = \frac{dQ}{dV}$ může snadno mást (např. v termodynamice), pak je nutné vyjasnit souvislost V a závislosti V na \vec{r} .
 - **Některé speciální druhy těles:**

- * **Hmotný bod** (HB) je nejjednodušší těleso: jeho vlastní rozměry můžeme v dané úloze zanedbat a je tedy popsán hmotností ($m > 0$) a polohou v čase: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Pro zjednodušení textu ho zde nazýváme často **částice**.
- * **Soustava N hmotných bodů**; příklady:
 - planety kolem slunce;
 - hmotné body s vazbami \rightarrow pákové mechanismy; tuhé těleso.
 - Pro $N \rightarrow \infty$: kontinuum; molekulová fyzika; statistická fyzika.
- * **Tuhé těleso**: takové těleso, které se může přemísťovat, ale nedeformuje se (v dané úloze), tj. vzájemné vzdálenosti jeho částí se s časem nemění, bez ohledu na event. působící síly.
- * **Deformovatelné těleso, kontinuum**:
 - **elastické**, vrací-li se do původního tvaru poté, co síly přestaly působit,
 - **plastické**, zůstává-li po působení sil trvalá deformace.

2.3.3 Vlivy působící na zkoumané objekty

- **Síla** popisuje vnější působení na těleso. Síla může měnit polohu částí tělesa v prostoru (pohyb) nebo i jejich polohu navzájem (deformace). Síla je matematicky popsána vektorem: \vec{F} . U částice a soustavy částic viz *vázaný* vektor, u tuhého tělesa *klouzavý* vektor.
- **Silové pole**: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$, popis spojitě rozloženého silového působení.
- **Vazba**, které je těleso podrobena, omezuje jeho pohyb. Nechceme se přitom zabývat tím, jak je realizována (zda je těleso přivázáno, ve žlábkku, na kolejkách apod.), ale tím, jak se toto omezení projeví na pohybu tělesa prostorem. Pro úlohy s vazbami je zvláště vhodná analytická mechanika.

2.4 Přístup

V klasické mechanice jsou dva základní přístupy: vektorová (newtonovská) mechanika vs. analytická mechanika (např. Lagrangeův či Hamiltonův formalismus).

- **vektorová (newtonovská) mechanika** používá **pohybové rovnice**, které určují časovou změnu fyzikálních veličin popisujících zkoumané objekty (zpravidla diferenciální rovnice podle času t). Umožňují tak předpovídat (predikovat) chování systémů v časovém vývoji. Veličiny mají charakter vektorů (poloha, rychlost, síla);
- **analytická mechanika** formuluje **principy**, což jsou obecné výroky o vztazích či o chování fyzikálních veličin, natolik mohutné, aby v dané oblasti fyziky umožnily určit stav systému či jeho vývoj. Veličiny jsou zpravidla skalární a mají rozměr energie.

My se zde o analytickém přístupu zmíníme, ale nebudeme se mu věnovat systematicky.

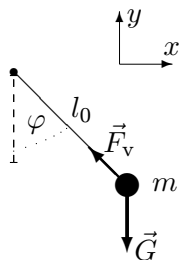
2.4.1 Porovnání: vektorová (newtonovská) mechanika

vykládá chování mechanických systémů (pohyb, rovnováha apod.) užitím základních pojmů

- **Hmotný bod** (částice), **tuhé těleso** (TT), **těleso**;
- **Síla** (působící na částici);
- Nepoužíváme však pojem **vazba** (které je objekt podroben), ale podle **principu uvolnění** doplníme **vazbovou sílu** takového směru a velikosti, aby výsledný pohyb vyhovoval vazbě.
- **Pohybové rovnice**: především 2. Newtonův zákon, tj. zákon síly: časová změna hybnosti $\vec{p} = m\vec{v}$ hmotného bodu je rovna výslednici $\sum \vec{F}$ sil, které na hmotný bod působí.

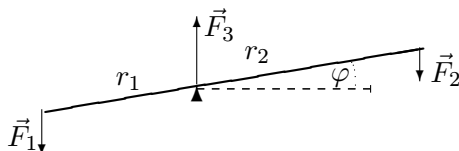
¶ Veličiny popisující soustavu, např. síla, polohový vektor, rychlost, hybnost, zrychlení, ... jsou matematicky popsány vektory; odtud označení „vektorová mechanika“. Newton ve svých Principiích jako první podal systematický výklad mechaniky s užitím zejména diferenciálního počtu, který pro tento účel vytvořil.

- 1. příklad: Matematické kyvadlo** v rovině – hmotný bod o hmotnosti m na nehmotné tyči délky l_0 . Na bod působí dvě síly: jednak tíže $\vec{G} = (0, -mg)$, jednak vazbová síla $\vec{F}_v = (2\lambda x, 2\lambda y)$ vystihující vazbu $x^2 + y^2 - l_0^2 = 0$. K vyřešení problému řešíme soustavu 2 rovnic pro 2 neznámé \vec{r}, λ (neboli po rozepsání do složek 4 rovnice pro 4 neznámé x, y, z, λ):



$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{G} + \vec{F}_v \quad ; \quad r^2 - l_0^2 = 0 \quad (2.2)$$

(Vazbová síla \vec{F}_v zde realizuje potřebnou dostředivou sílu $\vec{F}_d = m\omega^2\vec{r}$; toho lze použít pro zjednodušení řešení). Analytický přístup je naznačen v kap. 2.4.2.



- 2. příklad: Rovnováha na páce.** Můžeme vyšetřovat čistě newtonovsky jako tuhé těleso; rovnováha nastane právě tehdy, bude-li rovna nule i výsledná síla, i výsledný moment sil. Odtud

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \quad (2.3)$$

$$F_1 r_1 \cos \varphi = F_2 r_2 \cos \varphi . \quad (2.4)$$

Analytický přístup je naznačen rovněž v kap. 2.4.2.

2.4.2 Porovnání: analytická mechanika

zkoumá mechanický objekt spíše jako celek, popisovaný vhodně zvolenými proměnnými. Formuluje různé principy, popisující jeho chování, např. (zjednodušeně):

- princip virtuálních posunutí, resp. virtuální práce (**virtuální** posunutí je infinitezimální posunutí splňující vazby):
Soustava je v rovnováze, je-li práce vtištěných sil vykonaná při virtuálním posunutí nulová.
- d'Alembertův princip: I dynamický vývoj soustavy lze popsat principem virtuálních prací, *doplníme-li ke vtištěným silám síly „setrvačné“*, tj. člen $(-m\ddot{\vec{a}})$ ze 2NZ. Protože $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$, přejdouce tím algebraické rovnice na diferenciální, ale přístup zůstává stejný.
- Hamiltonův princip: Mezi všemi myslitelnými pohyby, splňujícími tytéž podmínky počáteční a koncové, je skutečným pohybem takový, při němž *časový integrál z lagranžiánu* $L(\vec{r}, \vec{v}, t) = E_k - E_p$ (tj. rozdílu kinetické a potenciální energie) *nabývá minimální hodnoty.*

Obecně ovšem principy nemohou vést k odlišným výsledkům ani navzájem, ani ve srovnání s vektorovým popisem a (např.) s Newtonovými pohybovými rovnicemi. Jejich tvar a formulace však

- mohou být v konkrétních případech podstatně výhodnější či nevýhodnější jak pro popis zkoumaného systému, tak i pro proces jeho řešení, tj. zpravidla nalezení rovnovážného stavu či popisu časového vývoje pro nás zajímavých parametrů;
- mohou umožňovat snadnější rozšíření do nových oblastí mechaniky či fyziky vůbec;
- umožní najít nejlepší aproximaci na třídě funkcí, do níž skutečné řešení nemusí patřit.

Někdy umožní zodpovědět globální otázku (např. stability řešení), aniž musíme detailně počítat celý dlouhý časový vývoj soustavy.

Veličiny charakterizující systém v analytické mechanice (např. energie, lagranžián, hamiltonián) jsou zpravidla skalární a mají rozměr energie.

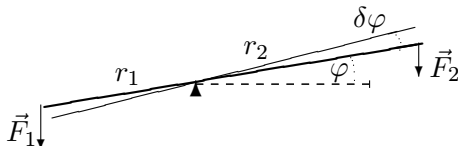
1. příklad: Matematické kyvadlo z předchozí úlohy bychom analyticky řešili např. zavedením polárních souřadnic r, φ , kde vazba je identicky splněna podmínkou $r = l_0$. Protože rovnovážná poloha bude pro $y = -l_0$, bude zřejmě výhodné odečítat úhel φ od této polohy, tedy např. zavést $x = r \sin \varphi$, $y = -r \cos \varphi$. Pomocí neznámé souřadnice φ vyjádříme potenciální energii $E_p = -mgl \cos \varphi$ a kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\varphi}^2$, z nich lagranžián $L(\varphi, \dot{\varphi}) = E_k - E_p$ a z něj pomocí tzv. *Lagrangeových rovnic 2.druhu* pohybovou rovnicí

$$ml_0^2\ddot{\varphi} + mgl_0 \sin \varphi = 0 . \quad (2.5)$$

Jiný přístup: Analytické ideji je rovněž blízký postup, kdy vycházíme ze zákonů zachování. Zde (1D případ) postačí jediný zákon zachování, např. energie:

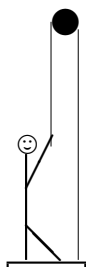
$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}ml_0^2\dot{\varphi}^2 - mgl_0 \cos \varphi, \quad (2.6)$$

což můžeme též získat z výše uvedené rovnice vynásobením $\dot{\varphi}$ a jednoduchou integrací.



2. příklad: Rovnováha na páce. Při vyšetřování páky principem virtuální práce si představíme malý pohyb soustavy kolem rovnovážné polohy (o úhel $\delta\varphi$) a spočteme vykonanou práci; poloha bude rovnovážná, je-li úhrnná vykonaná práce rovna nule:

$$\delta A = F_1 r_1 \cos \varphi \delta\varphi - F_2 r_2 \cos \varphi \delta\varphi = 0; \text{ tedy } F_1 r_1 = F_2 r_2. \quad (2.7)$$



To vede samozřejmě k témuž výsledku jako dříve, ale jinou cestou a s jinou interpretací. Příklad snadný analyticky, ale obtížný newtonovsky (nezmýlit se ve volbě sil): liftboy vytahuje sám sebe i s výtahem přes pevnou vnější kladku. (Obrázek vedle.)

Jak vektorové, tak i analytické pojetí je použitelné i mimo mechaniku, např. v teorii pole. Analytický popis lze zpravidla snadněji zobecnovat (systém je popsán jedinou veličinou).

2.5 Matematický aparát: vektorová algebra

Tato kapitola *není* výkladem, pouze *připomíná* užívaný aparát a označení.

2.5.1 Skalár α

Skalár² nabývá *jediné číselné* hodnoty (s event. rozměrem). Příkladem z fyziky může být teplota, energie, hmotnost, z geometrie třeba délka úsečky, objem tělesa. Rovněž obyčejná čísla jako -7.25 , π apod. můžeme pokládat za skaláry.

V teoretické fyzice zužujeme pojem skalár na takovou veličinu, která se navíc nemění při změně vztažné soustavy (tj. zůstává invariantní při transformaci souřadnic). Velikost vektoru $v = |\vec{v}|$ je tedy skalár, zatímco složka vektoru F_x nebo energie E nikoli, třebaže jsou popsány jediným číslem (s rozměrem). **Pseudoskalár** je skalární veličina, která při inverzi jedné prostorové osy změni znaménko, např. orientovaný objem $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Skaláry budeme zde ve vzorcích značit malými řeckými písmeny: α, β, γ .

V konkrétních aplikacích můžeme být samozřejmě vázáni jinými zvyklostmi co do označení skaláru.

Součet skalárů $\alpha + \beta$, rozdíl $\alpha - \beta$. Součin nejčastěji prostým zápisem po sobě $\alpha\beta$, případně hvězdičkou $\alpha * \beta$ tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění (např. součin dvou čísel: $3 * 2\pi$).

Tečku ($\alpha \cdot \beta$) a křížek ($\alpha \times \beta$) ponecháme pro jiné účely, totiž pro skalární a vektorový součin vektorů.

Připomeňme, že násobení skalárů je:

- komutativní: $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ resp. $\alpha\beta = \beta\alpha$
- asociativní: $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ resp. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
a lze je tedy psát i bez závorek:
 $\alpha * \beta * \gamma$ resp. $\alpha\beta\gamma$
- distributivní: $\alpha * (\gamma + \delta) = \alpha * \gamma + \alpha * \delta$ resp. $\alpha(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta$
 $(\alpha + \beta) * \delta = \alpha * \delta + \beta * \delta$ resp. $(\alpha + \beta)\delta = \alpha\delta + \beta\delta$

Skalární funkce: nabývá číselné hodnoty (s event. rozměrem). Např. teplota T se může měnit s časem t : píšeme $T = T(t)$.

Pole: funkce, závisující na prostorových souřadnicích. Příklad skalárního pole: teplota ovzduší T závisující na souřadnicích x, y a na nadmořské výšce z , tedy $T = T(x, y, z)$ (ev. dalších parametrech: $T = T(\vec{r}, t, \alpha)$). **Ekviskalární** čáry, příp. plochy (vrstevnice, izobary, izotermy apod.), na nichž je hodnota příslušného skaláru konstantní.

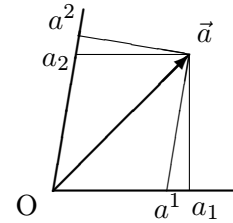
²lat. scala = žebřík, schody, „škála“; skaláry nabývají takových hodnot, které lze uspořádat do řady.

2.5.2 Vektor \vec{v}

Popis **složkový** – trojice čísel (v_1, v_2, v_3) , resp. (v_x, v_y, v_z) s definovanými operacemi rovnosti a sčítání (= skládání). Popis **geometrický** (směr a velikost).

V teoretické fyzice zužujeme pojem vektor na takovou veličinu, která se navíc při změně vztažné soustavy transformuje jako infinitezimální posunutí $d\vec{r}$. **Pseudovektor** při inverzi jedné prostorové osy nezmění znaménko, např. úhlová rychlost $\vec{\omega}$ či magnetická indukce \vec{B} (při jeho definici musíme užít nějakou konvenci typu pravidla pravé ruky apod.). Někdy se pseudovektor nazývá **axiálním** vektorem, „obyčejný“ vektor pak **polárním** vektorem.

Zde se zabýváme jen ortonormálními (kartézskými) souřadnicemi. V kosouhlých souřadnicích je nutno rozlišovat složky kovariantní a^i od kontravariantních a_i podle obrázku vedle. Totéž rozlišení je ovšem i u tenzorů libovolného řádu: T_{klm}^{ij} .



Souřadnice, složky vektoru

Jestliže vektor \vec{a} ve vztažné soustavě s jednotkovými vektory \vec{i}_k rozložíme na $\vec{a} = \sum_k a_k \vec{i}_k$, pak a_k se nazývají *souřadnice* vektoru \vec{a} , zatímco $a_k \vec{i}_k$ jsou *složky* vektoru \vec{a} .

Tato terminologie se často nedodržuje, zpravidla to však nevede k nedorozumění.

Polohový vektor \vec{r} popisuje bod v prostoru („koncový bod“ polohového vektoru; u jiného než polohového vektoru – např. rychlost \vec{v} , síla \vec{F} – nemá „koncový bod“ smysl).

Nulový vektor složkově: $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Geometricky: velikost 0, směr není definován. Prakticky: lze zvolit libovolný směr, který nám v úloze vyhovuje.

Jednotkové vektory \vec{j} , někdy je značíme exponentem 0, tedy např. $\vec{a}^0 = \vec{a}/a$. Platí $|\vec{j}| = 1$.

Rovnost vektorů \vec{a}, \vec{b} : složkově $a_k = b_k$, geometricky stejné směry i velikosti.

Sčítání (na SŠ skládání) vektorů: po složkách resp. pravidlo rovnoběžníka. Sčítání vektorů je komutativní, asociativní, existuje nulový prvek $\vec{0}$, opačný prvek (vektor $-\vec{v}$).

Odčítání: přičítání opačného prvku. Odčítání není asociativní, je antikomutativní.

Násobení vektoru skalárem: je distributivní v obou smyslech, tj.

$$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v} \quad (2.8)$$

$$a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w} \quad (2.9)$$

2.5.3 Vektorová funkce, vektorové pole

Zobrazení vektorového pole **siločárami** (vektorovými liniemi): \vec{v} je definováno všude, kde je $\vec{v} \neq \vec{0}$, je spojitě – každým bodem prochází právě jedna siločára, vystihuje *směr*. K vystižení velikosti lze použít *hustotu* siločar: zvolím jednu siločáru, $d\vec{\Sigma}$ kolmé k ní, skrz $d\vec{\Sigma}$ nechť prochází N siločar; pak hustota $N/d\Sigma$ určuje číselnou hodnotu pole. Tyto (vybrané) siločáry ovšem už nemusí být spojitě.

2.5.4 Pojetí geometrické a složkové

V **geometrickém pojetí** je vektor určen svou velikostí $r \geq 0$ a směrem (pro $r > 0$).

Ve **složkovém pojetí** má vektor tři kartézské složky; značíme je indexy.

- **volný** index a_i ; podobně tenzor $a_k b_j, T_{klmn}$ apod.
- **sčítací** index $\sum_{k=1}^3 a_k b_k$; lze pro něj užít jakékoli ve členu dosud neužité písmeno.

Einsteinova konvence sčítacího indexu: $a_k b_k \equiv \sum_{k=1}^3 a_k b_k$.

Index vyskytující se ve členu jen *jednou* je volný; index vyskytující se *dvakrát* je sčítací; index vyskytující se *třikrát* či vícekrát je chybný.

2.5.5 Součiny vektorů

Mezi vektory zavádíme součin **skalární, vektorový** a **přímý** (neboli direktní, tenzorový, dyadický).

Lze je aplikovat i na tenzory libovolných řádů; násobení vektoru skalárem je pak přímý součin skaláru a vektoru.

Definice

- Skalární součin dvou vektorů: $\alpha = \delta_{ik}v_iw_k = v_iw_i$; výsledkem je skalár.
- Vektorový součin dvou vektorů: $b_i = \varepsilon_{ijk}v_jw_k$; výsledkem je vektor (přesněji: pseudovektor, kap. 2.5.2).
- Přímý součin dvou vektorů: $T_{ij} = v_iw_j$; výsledkem je tenzor řádu 2.

Asociativita

- u skalárního $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ nemá smysl, a rovněž $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$;
- u vektorového smysl má, ale neplatí: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- přímý součin je asociativní: $a_i(b_jc_k) = (a_ib_j)c_k = a_ib_jc_k$.

Komutativita

- skalární součin je komutativní, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_ib_i$
- vektorový součin je antikomutativní, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$
- přímý součin není ani komutativní, ani antikomutativní: obecně $a_ib_j \neq a_jb_i$

Distributivní zákon platí pro všechny tři součiny.

Směšený součin $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ — objem rovnoběžnostěnu.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (2.10)$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (2.11)$$

Dvojnásobný vektorový součin $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Řešení rovnic Předpokládejme známý vektor $\vec{a} \neq 0$. Jestliže

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \gamma, \quad (2.12)$$

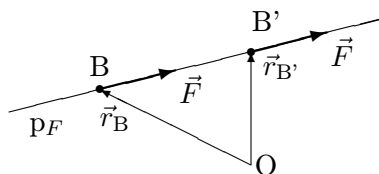
$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}, \quad (2.13)$$

$$\text{pak} \quad \vec{v} = \frac{1}{a^2} (\vec{a}\gamma - \vec{a} \times \vec{b}) = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (2.14)$$

Interpretace: rozklad vektoru \vec{v} na složku \vec{v}_{\perp} kolmou k \vec{a} a složku \vec{v}_{\parallel} rovnoběžnou s \vec{a} .

2.5.6 Volný, vázaný, klouzavý vektor

Pojem vektoru rozšiřujeme v mechanice tuhého tělesa (str. 78) tímto postupem:



- **Volný** vektor \vec{F} je dosavadní vektor, tj. veličina určená velikostí a orientovaným směrem, skládající se podle pravidel vektorového počtu.
- **Vázaný** vektor³ $[\vec{F}; B]$ je dvojice volný vektor \vec{F} a bod B, nazývaný **umístěním** vektoru \vec{F} , případně **působišťem**, jde-li o sílu. Bod B může být zadán svým polohovým vektorem \vec{R}_B .

Libovolná algebraická operace \otimes mezi vázanými vektory $[\vec{F}; B]$ a $[\vec{G}; C]$ má smysl jen tehdy, když $B = C$; pak je jejím výsledkem

$$[\vec{F}; B] \otimes [\vec{G}; B] = [\vec{F} \otimes \vec{G}; B]. \quad (2.15)$$

- **Klouzavý** vektor $\langle \vec{F}; B \rangle$ (síla působící na TT) je třída ekvivalentních (\sim) vázaných vektorů s tímž volným vektorem \vec{F} a s umístěním B' kdekoli na vektorové přímce p_F vektoru \vec{F} . Označíme-li \vec{F}_0 jednotkový vektor se směru vektoru \vec{F} , pak pro libovolné λ definovaný bod B' podle vztahu

$$\vec{R}_{B'} = \vec{R}_B + \lambda \vec{F}_0 \quad (2.16)$$

může být použit jako umístění pro klouzavý vektor:

$$\langle \vec{F}; B \rangle \sim \langle \vec{F}; B' \rangle. \quad (2.17)$$

2.5.7 Tenzor $T_{ij}; T_{i,\dots,k}$

Řád tenzoru (počet volných indexů). *Skalár* je tenzor řádu 0, *vektor* je tenzor řádu 1. Tenzor 2. řádu zpravidla zapisujeme maticí, tenzor libovolného řádu n složkově jako $T_{\underbrace{i,j,\dots,s}_n}$.

Nulový tenzor má všechny prvky rovny nule: $T_{ik} = 0$ pro vš. i, k .

Jednotkový tenzor I_{ik} má na diagonále 1, mimo ni 0, tedy $I_{ik} = \delta_{ik}$.

Tenzor je **symetrický** ve dvojici indexů i, k , když $T_{\dots i, \dots k, \dots} = T_{\dots k, \dots i, \dots}$. Někdy značíme $T_{(ik)}$.

Tenzor je **antisymetrický** ve dvojici indexů i, k , když $T_{\dots i, \dots k, \dots} = -T_{\dots k, \dots i, \dots}$. Někdy značíme $T_{[ik]}$.

Je-li tenzor v jednom páru indexů symetrický a v druhém se společným indexem antisymetrický, je nulový: Je-li $T_{ijk} = T_{jik}$ a také $T_{ijk} = -T_{ikj}$, pak $T_{ijk} = 0$ pro všechna i, j, k .

Úžení sníží řád vektoru o 2: $T_{ij} \rightarrow T_{kk}$.

Kronecker: δ_{ik} . Skalární součin: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_k \delta_{ik} = a_k b_k$.

Pozor, $\delta_{ii} = 3$, nikoli 1! Proč? (Einsteinova sčítací konvence).

Lévi-Civita: ε_{ikl} . Vektorový součin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$: pak $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} = \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} + \delta_{iq} \delta_{jr} \delta_{kp} + \delta_{ir} \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{ip} \delta_{jr} \delta_{kq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \delta_{kr} - \delta_{ir} \delta_{jq} \delta_{kp} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} = \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijp} = 2\delta_{kp} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad (2.21)$$

³Vzájemné rozlišení těchto vektorů není obecně kodifikováno a vyzrozumí se (nebo by se aspoň mělo vyzrozumět) z kontextu. Zde používáme závorky $[\]$ pro vázaný a $\langle \rangle$ pro klouzavý vektor.

2.6 Matematický aparát: vektorová analýza

2.6.1 Parciální derivace (∂ , nabra ∇)

Vektorový operátor⁴ **nabra**: $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

2.6.2 Gradient (grad, ∇)

$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi$ (přímý součin), neboli $u_k = \partial_k \varphi$.

Je-li $T(\vec{r}, t)$ pole teploty, udává **grad** $T(\vec{r}_0, t)$ směr největšího růstu teploty T v místě \vec{r}_0 v čase t . Vrstevnice na mapě jsou ekviskalární křivky $h(x, y) = h_0$ k funkci „nadmořská výška“ $h(x, y)$. Spádnice zobrazují směr jejího 2D gradientu.

2.6.3 Totální derivace (d)

neboli **úplná derivace** veličiny q , zpravidla podle času, značí se $\frac{dq}{dt}$, podle Newtona tečkou nad písmenem: \dot{q} ; jde o derivaci podle *jediné* proměnné t . Ve fyzice a v technice se užívají zápisy

$$\dot{q} = \dot{q}(\vec{r}, t) = \frac{dq(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial q}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} q \cdot \vec{v} + \frac{\partial q}{\partial t} = \vec{v} \cdot \nabla q + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2.22)$$

což není matematicky korektní: fyzikálně jde sice o tutěž veličinu, ale je vyjádřena v různých proměnných ($q(t)$ vs. $q(x, y, z, t)$) nebo jde o proměnnou jednou závislou, podruhé nezávislou ($x(t)$ vs. x). Matematicky korektní zápis ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad: Po rybníce plave loďka, má souřadnice $x(t)$, $y(t)$. Dá-li se rybník vypouštět, je v něm v místě $[\xi, \eta]$ na čase t závislá hloubka $h = h(\xi, \eta, t)$. Údaj $q(t)$ sonaru na loďce se s časem mění. Rychlost $\dot{q}(t)$ změny údaje sonaru s časem je rovna

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \quad (2.23)$$

Ve fyzice a v technice se obvykle ztotožňují $q \equiv h$, $z \equiv \xi$, $y \equiv \eta$.

Obvyklé názvy:

$$\begin{aligned} \dot{q} &\equiv \frac{dq}{dt} = \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial q}{\partial z} \dot{z}}_{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} q} + \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \text{neboli} \\ \frac{dq}{dt} &= \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} q + \frac{\partial q}{\partial t} \quad . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Člen $\frac{dq}{dt}$ se nazývá *úplná* čili *totální derivace*; v našem příkladu popisuje změnu údaje sonaru.

Člen $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} q$ se nazývá *konvekční* čili *proudová derivace*; je dán pohybem loďky a profilem dna.

Člen $\frac{\partial q}{\partial t}$ se nazývá *lokální* čili *místní derivace* a popisuje „vypouštění rybníka“.

Detaily k této rovnici viz Kalkul.

2.6.4 Součiny operátoru nabra

Derivuje-li vektorový operátor $\vec{\nabla}$ tutěž veličinu, na kterou se váže coby vektor příslušným součinem, užívají se pro něj speciální názvy:

Divergence váže-li se skalárním součinem: $\beta = \text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ neboli $\beta = \delta_{jk} \partial_j v_k = \partial_i v_i$.

Je-li $\vec{v}(\vec{r}, t)$ rychlost plynu v místě \vec{r} v čase t , udává $\text{div } \vec{v}$ vydatnost vzniku (zdroj, zřídlo, při negativní hodnotě nor) plynu v místě \vec{r}_0 v čase t .

⁴Omlouvám se čtenáři za své pedantství, se kterým píšu šipku i nad nablou, i nad gradientem a rotací, protože to jsou vektory. Obvykle se to nedělá, ale aspoň se příslušné značky z tohoto důvodu tisknou tučně.

Rotace váže-li se vektorovým součinem: $\vec{a} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$, neboli $a_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$.

Je-li $\vec{v}(\vec{r}, t)$ rychlost plynu v místě \vec{r} v čase t , udává $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$ svým směrem osu v prostoru, kolem které se má tendenci plyn točit (tvořit vír).

Gradient ve všech ostatních případech: $\overrightarrow{\text{grad}} \Theta$; $(\vec{a}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})(\vec{a}_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\varphi$.

2.6.5 Laplaceův operátor (laplacián Δ)

Skalární operátor:

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \quad (2.25)$$

Pro skalár φ bývá vhodný tvar $\Delta\varphi \equiv \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$;

Pro vektor \vec{v} bývá vhodné užít relaci $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}$.

Fyzikální aplikace: Pole φ (gravitační, elektrostatické) se zdrojem hustoty ρ vyhovuje vztahu

$$\Delta\varphi \sim -\rho \quad ; \quad (2.26)$$

součinitel úměrnosti závisí na volbě jednotek pro φ a ρ .

Pole φ v oblasti beze zdrojů ($\Delta\varphi = 0$) je **harmonickou funkcí** a splňuje větu o střední hodnotě: $\varphi(\vec{r}_0)$ je rovno střední hodnotě z $\varphi(\vec{r})$, kde \vec{r} určují povrch koule se středem v \vec{r}_0 , tedy

$$\varphi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\Gamma_a} \varphi(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (2.27)$$

kde Γ_a je povrch koule o poloměru a a středem v \vec{r}_0 .

Existenční věta: Znalost $\Delta\vec{u}$ uvnitř oblasti V + hraniční podmínky na hranici V určují \vec{u} uvnitř celé oblasti V jednoznačně.

Odtud plyne: Znalost $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}$ a $\text{div} \vec{u}$ uvnitř oblasti V + hraniční podmínky na hranici V určují pole \vec{u} uvnitř celé oblasti V jednoznačně.

Kapitola 3

Kinematika hmotného bodu 2016-08-26

3.1 Předmět kinematiky

Kinematika se zabývá jen *popisem* geometrie pohybu (poloha, čas, rychlost...), tedy *bez* zřetele k *příčinám* pohybu. Nepotřebuje proto pojmy jako síla, hmotnost, hybnost, energie ...

3.2 Základní pojmy

3.2.1 Vztažná soustava

Polohu objektu určujeme vzhledem k jiným tělesům zvaným **referenční tělesa**. Abstrakcí z referenčních těles dostáváme pojem **referenční systém** neboli **vztažná soustava**. Zde budeme používat především **kartézskou** vztažnou soustavu se třemi na sebe kolnými osami x, y, z . Poloha bodu v okamžiku t je určena jeho polohovým vektorem $\vec{r}(t) = (x, y, z)$, viz dále.

Newton předpokládal existenci „absolutního prostoru“ a „absolutního času“ jako referenční soustavy pro své zákony. V současném pojetí klasické mechaniky stačí k těmtož jakákoli inerciální soustava (viz kap. 4.4.4).

3.2.2 Poloha, \vec{r} (bodu)

Polohový vektor \vec{r}

Polohový vektor se zpravidla značí \vec{r} (z lat. radius, paprsek) a jeho souřadnice x, y, z , při indexování x_1, x_2, x_3 . Poloha se obecně mění s časem (= pohyb v užším smyslu): $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Posunutí $\Delta\vec{r}$

$\Delta\vec{r} := \vec{r}_f - \vec{r}_i$ je definováno jako vektor rozdílu koncové (finální) a počáteční (iniciální) polohy bodu.

Elementární posunutí $d\vec{r}$

(též **infinitesimální posunutí**) je popsáno diferenciálem polohového vektoru: $d\vec{r} \equiv d(\vec{r})$. Má rovněž charakter vektoru. Použití: např. $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}dt$. Častá je obrazná interpretace „dva sousední body“ (rozumí se velmi blízké z hlediska úlohy).

3.2.3 Trajektorie (= křivka)

je křivka Γ , kterou bod během svého pohybu prochází, tedy množina všech koncových bodů polohového vektoru $\vec{r}(t)$ pro jistý časový interval, tj. pro všechna $t \in (t_1, t_2)$. Může být zadána např. parametricky: $x = x(p), y = y(p), z = z(p)$. Často se užívají parametrizace časem ($p \equiv t$) a parametrizace uraženou dráhou ($p \equiv s$, tzv. přirozená parametrizace, např. kilometrovníky na silnici, krejčovský metr).

Tečný vektor $\vec{\tau}$ k trajektorii

Tečný vektor je definován jako $\vec{\tau} := \frac{d\vec{r}}{ds}$; má velikost 1.

Derivací $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$ dostaneme $0 = \frac{d(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau})}{dt} = 2\vec{\tau} \cdot \dot{\vec{\tau}}^0$, tedy derivace tečného vektoru je na tečný vektor kolmá.

Vektor normály $\vec{\nu}$

je kolmý na tečnu k trajektorii a leží v rovině dané vektory $\vec{\tau}$ a $\dot{\vec{\tau}}$. Má proto směr stejný jako $\dot{\vec{\tau}}$.

Vektor binormály $\vec{\beta}$

Je definován jako $\vec{\beta} := \vec{\tau}^0 \times \vec{\nu}$ a je kolmý na $\vec{\tau}^0$ i $\vec{\nu}$.

3.2.4 Křivost κ (křivky)

Oskulační kružnice prochází třemi „sousedními“ body křivky.



Definujte tento názorně zavedený pojem přesněji, třeba užitím pojmu limity.

Poloměr křivosti R je poloměr kružnice oskulační k trajektorii. Platí

$$R d\varphi = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = y'; \quad \varphi = \arctan y';$$

$$R \frac{d(\arctan y')}{dx} = R \frac{y''}{1+y'^2} = \sqrt{1 + y'^2}$$

odkud

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad (3.1)$$

Křivost (křivky) κ je převrácenou hodnotou poloměru křivosti:

$$\kappa = 1/R = y'' / (1 + y'^2)^{3/2} \quad (3.2)$$

Lze ji uvést na symetričtější tvar

$$\kappa = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2} \quad (3.3)$$

3.2.5 Délka křivky, dráha

Element délky křivky určíme podle Pythagorovy věty:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (3.4)$$

např. pro křivku danou vztahy $y = y(x)$, $z = z(x)$ je

$$ds = |dx| \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \quad (3.5)$$

Dráha (= délka křivky) s $s = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1$, je závislá na procházené trajektorii Γ , nejen na koncovém a počátečním bodě (jako *posunutí*, kap. 3.2.2).

Někdy se užívá slova dráha volně, ve smyslu trajektorie: „Dráhy planet jsou elipsy“.

3.2.6 Rychlost \vec{v} , posuvná rychlost (bodu)

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} := \frac{d\vec{r}}{dt} . \quad (3.6)$$

Podle definice (3.6) je rychlost vektorem. Angličtina rozlišuje **velocity** (vektor rychlosti \vec{v}) a **speed** (velikost rychlosti $v = |\vec{v}|$ tohoto vektoru). Čeština bohužel takové rozlišení nemá, norma doporučuje termín *rychlost* pro vektor rychlosti. V zadání fyzikální úlohy proto píšeme raději „Auto jede rychlostí o velikosti 50 km/h“.

Plný termín „posuvná rychlost“ užíváme, chceme-li zdůraznit, že nejde o rychlost úhlovou ap. \leftrightarrow Rychlost lze rozumně definovat nejen pro částici, ale i pro nehmotné objekty a abstrakta, lze-li jim přiřadit význačný bod. Jde-li o těleso (nikoli částici), míní se jeho rychlostí rychlost nějakého jeho význačného bodu (zpravidla rychlost těžiště, není-li výslovně určeno jinak). Jde-li o substanci (kontinuum), jde zpravidla o *pole* rychlosti (tj. o funkci $v = v(x, y, z, t)$).

U abstrakt není rychlost vůbec samozřejmá a je třeba ji definovat velmi pečlivě (např. rychlost vlny; fázová rychlost je definována jako rychlost pohybu míst stejné fáze, na rozdíl od grupové rychlosti či rychlosti přenosu energie; podobně u rychlosti obrazce moiré; „rychlost šíření tepla“ při difuzi je značně komplikovaný pojem). Tyto a podobné rychlosti je rozumné probrat nikoli obecně zde, ale až tam, kde se opravdu použijí.

3.2.7 Zrychlení \vec{a} (bodu)

$$\vec{a} := \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} . \quad (3.7)$$

Rozklad zrychlení na **tečnou** \vec{a}_t a **normálovou** \vec{a}_n složku:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \vec{\tau}^0 ;$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 + v \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0 + v \frac{d\vec{\tau}^0}{ds} \frac{ds}{dt} = \overbrace{\frac{dv}{dt} \vec{\tau}^0}^{\vec{a}_t} + \overbrace{\frac{v^2}{R} \vec{\nu}^0}^{\vec{a}_n}$$

Význam: \vec{a}_t popisuje **změnu velikosti** rychlosti, \vec{a}_n popisuje **změnu směru** rychlosti.

3.3 Poloha a rychlost obecných objektů

Poloha \vec{r} i rychlost $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ (i zrychlení $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$) byly jasně definovány pro bod. Lze je zobecnit i na jiné objekty (poloha tělesa), které ani nemusejí být substancí (fázová rychlost vlny či moiré obrazce). Definice pak ovšem musí být dosti obezřetná, nejde o „samozřejmost“. Připomeňme, že rychlost vlny na vodě, co do velikosti i směru, nesouvisí s pohybem částic tvořících tuto vodu (korek na hladině rybníka kmitá jen nahoru a dolů, zatímco vlna přeběhne od jednoho kraje rybníka ke druhému).

Jsou prakticky dvě možnosti tohoto zobecnění:

- objekt lze pro danou úlohu popsat jediným bodem (např. těleso jeho hmotným středem nebo metacentrem). Pak lze snadno mluvit o jeho poloze, rychlosti, zrychlení;
- zavedeme v jednom okamžiku každém bodě \vec{r} dané oblasti uvažovanou charakteristiku Q (fáze vlny, polohu jisté „částičky“ objektu), stanovíme novou polohu \vec{r}' , kterou tato charakteristika má za infinitezimální dobu dt a odtud určíme **rychlostní pole**

$$\vec{w}(\vec{r}) := \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{dt} \quad (3.8)$$

keré přiřadíme veličině Q .

Pokud ve druhém případě je $\vec{w}(\vec{r})$ táž pro všechna \vec{r} v dané oblasti („rychlostní pole je homogenní“), lze mluvit přímo o rychlosti veličiny Q bez zavedení pole; to je případ fázové rychlosti rovinné vlny. Výběr veličiny Q vůbec není samozřejmý např. při pokusu o definici rychlosti šíření tepla vedením (kondukcí). Není na místě zde rozebírat detaily, ale je třeba o tomto úskalí obecně vědět.

3.4 Úhlové veličiny

Úhlové veličiny se uplatňují např. při popisu pohybu tuhého tělesa (kap. 7.2) nebo při problému dvou těles (kap. A). Vždy existuje význačný bod O (počátek souřadnic, těžiště tělesa, ...), resp. orientovaná osa \mathbf{o} jím procházející, kolem které probíhá otáčení o měřený úhel φ .

3.4.1 Úhlová poloha φ

(častěji: **natočení**, **otočení**) je charakterizováno dvěma veličinami:

- úhlem φ
- orientovanou osou otočení (s orientací např. dle pravidla pravé ruky).

Pozor, dvojice $\{\varphi_i; \mathbf{o}_i\}$ se jako vektor $\vec{\Omega}_i$ chová **jen** ve dvou případech:

- otočení kolem pevné osy o libovolný úhel φ_i (poloha osy se přitom nemění ani vůči tělesu, ani vůči prostoru (tj. $\mathbf{o}_i = \mathbf{o}_k$ pro všechna i, k) nebo
- infinitezimální otočení $d\varphi_i$ (kolem libovolné osy \mathbf{o}_i).

V ostatních případech **nelze** takové otočení popsat vektorem (součet dvou otočení závisí na pořadí, není tedy komutativní na rozdíl od sčítání vektorů).

3.4.2 Úhlová rychlost $\vec{\omega}$

Definice:

$$|\vec{\omega}| = \dot{\varphi}, \text{ směr } \vec{\omega} \text{ je dán osou rotace.} \quad (3.9)$$

Úhlová rychlost je vektor, protože byla zavedena z *infinitezimálního*, nikoli konečného otočení. (Přesněji řečeno, jde o pseudovektor, kap. 2.5.2).

3.4.3 Úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$

Definice:

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} \quad . \quad (3.10)$$

3.5 Plošné veličiny

Plošné veličiny se uplatňují např. při problému dvou těles (kap. A).

3.5.1 Plošná rychlost \vec{w}

Definice:

$$\vec{w} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t')}{t' - t} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}. \quad (3.11)$$

Závisí na volbě počátku O .

3.5.2 Plošné zrychlení $\dot{\vec{w}}$

Definice:

$$\dot{\vec{w}} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{a} \quad (3.12)$$

Závisí rovněž na volbě počátku O .

Kapitola 4

Dynamika hmotného bodu 2016-09-19

4.1 Předmět

Dynamika se zabývá nikoli jen *popisem* pohybu (to dělá kinematika), ale hlavně jeho *příčinou*, přesněji řečeno příčinou *změny* pohybu; připomeňme, že pohyb je relativní, tedy že jeho popis je vázán na zvolenou *vztažnou soustavu*. Příčinu změny pohybu hledáme v interakci (vzájemném působení) mezi tělesy a v klasické vektorové (newtonovské) mechanice ji popisujeme pojmem **síla**. (V analytické mechanice studujeme navíc samostatně i **vazby** a namísto sil mezi tělesy se staráme o energii soustavy jako celku.) Síly se chovají jako vektory (mají nejen velikost, ale i směr; skládání sil vede na sčítání vektorů).

Speciální případ dynamiky je **statika**. Ta se zabývá soustavami v rovnováze – tj. jaké musí být síly mezi tělesy, aby soustava těmito tělesy tvořená byla a zůstávala v rovnováze.

Síla je tedy příčinou **změny** pohybového stavu soustavy; pohybový stav částice {particle}, na kterou nepůsobí síly, je klid nebo pohyb rovnoměrný přímočarý, jak poznáme z 1NZ.

Těleso (konečných rozměrů) se pod vlivem vnějších sil navíc může deformovat a měnit svou dosavadní orientaci v prostoru (otáčení = rotace).

Dřívější představy byly jiné: podle Aristotela mají předměty svá přirozená místa v přírodě (země dole, nad ní voda, ještě výše vzduch, nejvýše oheň) a tato místa se snaží zaujmout.

4.2 Základní veličiny dynamiky hmotného bodu

4.2.1 Hmotnost m

Hmotnost je jedním ze základních atributů hmotných objektů. Vždy platí $m \geq 0$.

Hmotnost tělesa se zpravidla uvažuje v čase neproměnná: $\frac{dm}{dt} \equiv \dot{m} = 0$. U soustavy s proměnnou hmotností je nutno zadat, jakou má mizející nebo přibývající hmota hybnost. Např. padající a odpařující se kapka vody ztrácí s hmotou nejen hmotnost, ale i hybnost (odpařující se molekuly mají střední počáteční rychlost rovnou rychlosti kapky), zatímco nabývající kapka deště získává s vodou kondenzující z okolí hmotnost, nikoli však hybnost (střední počáteční rychlost kondenzujících molekul je nulová vůči okolí, nikoli vůči kapce).

Hmotnost je v nerelativistické fyzice absolutní, tj. nezávislá na volbě vztažné soustavy (VS).

4.2.2 Poloha \vec{r}

Polohu $\vec{r}(t)$ známe z kinematiky, kap. 3.2.2. Poloha je relativní, tj. její hodnota závisí na volbě VS.

4.2.3 Rychlost \vec{v}

Rychlost $\vec{v}(t) := \frac{d\vec{r}}{dt}$ známe též z kinematiky, kap. 3.2.6. Rychlost je relativní, závisí na volbě VS.

4.2.4 Hybnost \vec{p}

Hybnost $\vec{p}(t) := m\vec{v}$ je rovněž „mírou pohybu“ tělesa (další mírou je kinetická energie).

Význam: platí **zákon zachování hybnosti**: Nepůsobí-li na soustavu vnější síly \vec{F} (nebo je-li jejich výslednice \vec{F}_Σ nulová), pak se hybnost soustavy zachovává. (Pokud na soustavu působí vnější síly, pak jejich výslednice \vec{F}_Σ je rovna časové změně hybnosti soustavy.)

Hybnost lze zobecnit i na některá pole (např. elektromagnetické).

Hybnost je relativní, tj. závislá na volbě VS.

I v teorii relativity lze zavést relativistickou hybnost (čtyřhybnost, kap. 8.7.7) analogických vlastností.

4.2.5 Síla \vec{F}

Síla popisuje interakci dvou těles nebo tělesa s polem; občas ji pro zdůraznění nazýváme skutečná síla, pravá síla apod. Součet všech sil působících na těleso nazýváme výslednicí a pro stručnost ji značíme \vec{F}_Σ . Naproti tomu „síly“ kinematické (neboli setrvačné, fiktivní, zdánlivé atp.), např. odstředivá, Coriolisova, unášivá, jsou jen pomocné členy doplněné do pohybové rovnice (tj. do 2. Newtonova zákona, $m\vec{a} = \vec{F}_\Sigma$), aby zákon „platil“ (= souhlasil s měřením v „nevhodné“ vztažné soustavě, kde naměříme jiné zrychlení \vec{a}). Viz dále kap. 6.

Síla je veličina absolutní, tj. nezávislá na volbě VS. (Na VS ovšem závisí *rozklad* síly na složky.)

O síle a příbuzných veličinách jsme se zmínili též v kap. 2.3.3.

4.2.6 Síla: různé typy klasifikace

Nebudu zkoušet vaši mechanickou či optickou paměť tím, že bych po vás chtěl vyjmenovat následující nesystematický a neúplný výčet. Je ale nutné si uvědomit, že existují různá kritéria a není pak rozumné je míchat stylem „Klobouky dělíme na slaměné, dámské a žluté.“.

- podle původu (typ interakce):
 - síla gravitační
 - síla tíhová
 - síla elektromagnetická
 - síla třecí
 - ...
- podle vztažné soustavy (VS), v níž systém popisujeme:
 - síly skutečné (interakce mezi tělesy nebo tělesem a polem)
 - síly kinematické = setrvačné, zdánlivé, fiktivní, ... (kompenzující neinerciální VS)
- podle geometrie dráhy (volná částice):
 - síla tečná (k dráze částice) – způsobí změnu velikosti rychlosti (a tím změnu energie)
 - síla normálová (k dráze částice) – způsobí změnu směru pohybu (zakřivuje trajektorii)
- podle geometrie zadání úlohy (částice vázaná na plochu):
 - síla tečná (k vazebné ploše): např. tření
 - síla normálová (k vazebné ploše): např. přítláčná síla
- podle způsobu přenosu dovnitř tělesa:
 - síly objemové (těleso v silovém poli): gravitace, elektromagnetická síla, ...
 - síly plošné (přes povrch tělesa): síly kontaktní, vztlak v tekutině, ...
- silové pole (rozložení v prostoru v rámci zkoumaného objektu):
 - *konstantní*: konstantní pole (silové, rychlostní) se zpravidla nazývá polem *homogenním*
 - *proměnné* = *nehomogenní*: je-li v rámci zkoumaného tělesa vnější silové pole dostatečně nehomogenní, pak rozdíl skutečných místních hodnot od vhodné střední hodnoty nazýváme **slapové síly**, případně jen **slapy**. Např. gravitační pole Měsíce či Slunce takto působí na rozlehlou Zemi s vodami a atmosférou na povrchu. U pole přitažlivé síly tedy slapy „natahují“ těleso v radiálním směru.

4.3 Silový diagram

V praktických úlohách budeme často sledovat síly působící mezi soustavou tuhých těles: třeba míč ležící na stole stojícím na Zemi. Namalujme si vždy náčrtek – obrázek, abychom rozuměli dobře, o co jde, a vedle vytvoříme **silový diagram** zobrazující všechny síly působící na zkoumané těleso. Takto zanesené síly můžeme pak snadno graficky sečíst, abychom dostali výslednici \vec{F}_Σ sil na dané těleso působících a mohli lépe formulovat pohybové rovnice.

4.4 Newtonovy pohybové zákony

4.4.1 Rámec: Newtonův absolutní prostor a čas (původní pojetí)

Newton postuluje existenci **absolutního prostoru** – poloha je v něm určena polohovým vektorem $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, a **absolutního času** t (zde občas zkracujeme **APČ**). Zavádí je takto:

Newton – Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687): „Absolutní, skutečný a matematický čas plyne sám od sebe a díky své povaze rovnoměrně a bez ohledu na vnější objekty. Absolutní prostor je vzhledem ke své podstatě a bez ohledu na vnější objekty stále týž a nepohyblivý.“

Toto zavedení je názorné, ale fyzikálně sporné: vůči čemu je absolutní čas rovnoměrný a absolutní prostor nepohyblivý? V novějším pojetí klasické fyziky se APČ neužívá. Všude nám místo něj stačí kterákoli inerciální soustava (IS, viz dále). Občas (při popularizaci) se místo IS užívá formulace typu „těleso je v klidu vůči stálícím“; míní se tím, že nerotuje. Jeho posuvný pohyb tím ovšem popsán není, zejména uvážíme-li, že se „stálíce“ pohybují vůči sobě, a to slušnými rychlostmi.

4.4.2 Newtonovy pohybové zákony

Tyto zákony jsou základními pohybovými zákony klasické mechaniky.

- Přívlastek „pohybový“ se používá k odlišení od Newtonova gravitačního zákona; zpravidla se však vynechává, uijeme-li řadové číslovky;
- Historicky se mluví o tělese, ale v současném (newtonovském) pojetí uvažujeme jen hmotný bod (částici, tedy těleso mající zanedbatelné vlastní rozměry a tvar). Formulace pro těleso konečných rozměrů by musela popisovat i jeho možné otáčení, což je ze současného pohledu zbytečná komplikace (třebaže Newton i o tomto uvažoval a do svých úvah zahrnoval). Nyní pokládáme za jednodušší nejprve formulovat mechaniku (jednoho) hmotného bodu, poté mechaniku soustavy hmotných bodů a až pak mechaniku tuhého tělesa coby speciální soustavu hmotných bodů spojených vazbami zaručujícími stále vzdálenosti.

4.4.3 Nultý Newtonův zákon – (přísně tajný) zákon výslednice

Pozor!!! Nikde neříkejte, že jsem vám toto prozradil!!! Neví o něm nic ba ani sama sv. Wikipedie!!! Jeho číslování odpovídá obvyklému číslování u zákonů termodynamiky. Newton sám však ctil zákony natolik, že toto tvrzení uvedl jen coby korolár.

*0NZ: Síly působící na tutéž částici se chovají jako vektory, zejména je lze sčítat.
Výslednou sílu zpravidla nazýváme výslednicí (těchto sil).*

Není to vůbec „samozřejmost“. Mimochodem, otočení v prostoru o konečný úhel (kap. 3.4.1) je také popsáno směrem v prostoru a velikostí, a **není** to vektor (dvě otočení nejsou komutativní)!

4.4.4 První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti (1NZ)

V historickém *Newtonově* pojetí je zákon formulován takto:

1NZ (klasicky): Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, dokud není donuceno působením vnějších sil svůj stav změnit.

- Těleso konečných rozměrů může i bez působení vnějších sil též rotovat; proto je lépe hovořit o částici neboli hmotném bodu.

Tato formulace předpokládá existenci význačné vztažné soustavy („absolutní prostor a čas“), vůči níž mluvíme o klidu či pohybu; tuto soustavu však nelze konstruktivně zavést. Proto se v současném pojetí 1NZ často formuluje jinak, totiž jako *existenční výrok* na základě definice **inerciální soustavy** $\{\textit{inertial frame}\}$, IS (lat. inertia, -æ, f. = setrvačnost).

Inerciální soustava je vztažná soustava, v níž se volné hmotné body pohybují bez zrychlení.

V současném *newtonovském* pojetí potom formulujeme 1NZ takto:

1NZ (nověji): **Existuje** inerciální vztažná soustava (IS).

- Jde tedy o *existenční teorem* zaručující existenci jisté významné vztažné soustavy; v ní budeme formulovat všechny další zákony.
- Tím mj. padá námitka E. Macha, že 1NZ je důsledkem 2NZ pro $\vec{F}_\Sigma = \sum \vec{F} = \vec{0}$.

Z definice je zřejmé, že IS není jediná: IS je i každá jiná IS', která se vůči IS pohybuje bez zrychlení (a bez otáčení). Neinerciální je však každá vztažná soustava, která se vůči některé IS pohybuje se zrychlením (nebo se vůči ní otáčí, což implikuje zrychlení bodů mimo osu otáčení).

4.4.5 Druhý Newtonův zákon – zákon síly (2NZ)

2NZ: Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici \vec{F}_Σ sil na ni působících.

Jako obvykle, „změnu“ vystihneme matematicky derivací, tedy

$$d\vec{p}/dt = \vec{F}_\Sigma \quad . \quad (4.1)$$

- Protože hmotnost m částice je v nerelativistické mechanice stálá, platí též

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_\Sigma \quad . \quad (4.2)$$

- Ani hmotnost, ani síla nezávisí na volbě vztažné soustavy, ale zrychlení (odvozené od polohy) na ní obecně závisí; v tom smyslu lze prohlásit, že 2NZ je platný jen v inerciální vztažné soustavě. Aby formálně platil i při měření v neinerciálních soustavách, lze doplnit k působícím silám ještě tzv. „setrvačné síly“ kompenzující rozdíly vzniklé měřením v neinerciální soustavě. Ty budou vyloženy později v samostatné kap. 6.
- Jak zjistíme později (rov. (7.16)), 2NZ platí i pro těleso konečných rozměrů: časová změna úhrnné hybnosti tělesa je rovna úhrnné síle, což je zostřeno 1. větou o hybnosti (1. impulzová věta) na úhrnnou *vnější* sílu (protože součet všech vnitřních sil je díky 3NZ nulový).

4.4.6 Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce (3NZ)

3NZ: Působí-li těleso \mathcal{T}_1 na těleso \mathcal{T}_2 silou \vec{F}_{12} , pak i těleso \mathcal{T}_2 působí na těleso \mathcal{T}_1 silou; označíme-li ji \vec{F}_{21} , pak platí $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

- Síla se v rovnosti chápe jako volný vektor, tj. bez ohledu na umístění (na „působišť síly“).
- Zákon má smysl i platnost nejen pro hmotné body, ale i pro tělesa konečných rozměrů, uvažujeme-li síly jako volné vektory, bez umístění.

- Zákon platí jen pro skutečné síly. Není použitelný na „setrvačné síly“ (ty nepopisují vzájemné působení těles).
- Akce a reakce vystupují plně symetricky: současně vznikají, trvají a zanikají. Je jedno, kterou ze sil \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} pojmenujeme akcí; ta druhá bude reakce. Proto *nesouvisejí* s filozofickými kategoriemi příčiny (akce) a důsledku (reakce).
- \leftrightarrow Zákon platí i pro *necentrální síly* (např. mezi dipóly).
- \leftrightarrow Zákon akce a reakce vypovídá jen o silách, nikoli o silových dvojicích; působí-li těleso \mathcal{T}_i na těleso \mathcal{T}_k také silovou dvojicí \vec{M}_{ik} , je obecně $\vec{M}_{ik} \neq \vec{M}_{ki}$.
- Zdůrazněme, že obě síly působí vždy na *různé* objekty: akce \vec{F}_{12} na těleso \mathcal{T}_2 , reakce \vec{F}_{21} na těleso \mathcal{T}_1 . Jsou-li tělesa v dotyku, pak obě síly působí v tomtéž bodě (v bodě dotyku), ovšem opět na různá tělesa. Proto je většinou nemá smysl počítat.
(Má to smysl jen tehdy, uvažujeme-li obě interagující tělesa za součást jednoho objektu, v němž pak jde o vnitřní síly.)
- Při působení na dálku je nutno předpokládat okamžité působení na dálku (např. klasická, nerelativistická gravitace). Použijeme-li však jako prostředníka síly pole (např. elektromagnetické), v němž se šíří signály konečnou rychlostí, pak je nutno připsat tomuto poli i hybnost, energii a moment hybnosti.

4.5 Princip relativity; Galileo Galilei, Einstein

Mechanický princip relativity (též: Galileův princip relativity) byl znám a formulován ještě před Newtonem (Galileo Galilei) a říká (v naší terminologii):

Mechanické jevy probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách.

Galileo popisuje, jak na lodi v kajutě za staženými záclonami nerozeznáme mechanickými pokusy – lití čaje, let komárů –, zda loď stojí (vůči břehu), nebo zda se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Urychlený pohyb však poznáme.

Na základě mechanických dějů tedy není důvod dávat nějaké IS přednost před jinou, a proto na základě mechanických dějů nelze ani rozlišit, která z IS je absolutní prostor a čas. Zdálo by se, že nemechanickými ději (elektromagnetismus, světlo) by to mohlo jít, ale v praxi se to také nepodařilo, viz speciální teorie relativity (STR), kap. 8.

Princip relativity je ekvivalentní s výrokem, že pohybové rovnice (2NZ) jsou invariantní vůči transformaci mezi inerciálními soustavami \mathcal{S} , \mathcal{S}' . Mají-li tyto soustavy rovnoběžné odpovídající osy a jestliže

- jistá událost B má v \mathcal{S} souřadnice \vec{r}, t
- táž událost B má v \mathcal{S}' souřadnice \vec{r}', t'
- \mathcal{S}' má vůči \mathcal{S} rychlost \vec{V} ,

pak podle Galileiho transformace platí:

$$\vec{r}' - \vec{r}'_0 = (\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{V}(t - t_0) \quad (\text{Galileova transformace}) \quad (4.3)$$

$$t' - t'_0 = t - t_0 \quad (4.4)$$

resp. při **synchronizaci** soustav, tedy když událost $(0, \vec{0})' \equiv ((t' = 0) \& (\vec{r}' = \vec{0}))$ je shodná s událostí $(0, \vec{0}) \equiv ((t = 0) \& (\vec{r} = \vec{0}))$, pak pro všechny události $U \equiv (t, \vec{r})$, $U' \equiv (t', \vec{r}')$, $U = U'$ platí

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \quad (\text{Galileova transformace}) \quad (4.5)$$

$$t' = t \quad (4.6)$$

Einsteinův princip relativity zobecňuje tento zákon na *všechny* fyzikální jevy:

Všechny fyzikální jevy probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách. (Einstein)

Aby však byl splněn i pro elektromagnetické jevy (světlo, Maxwellovy rovnice), nemůže platit transformace ve tvaru rov. (4.5) a je nutno přijmout transformaci Lorentzovu, viz kap. 8. Speciální teorie relativity jde ještě dále tím, že opouští samostatné pojmy prostor a čas a zavádí místo nich prostoročas.

4.6 Další příbuzné mechanické veličiny

4.6.1 Silové pole $\vec{F}(\vec{r})$

Silovým polem nazýváme prostor, kde v nějaké prostorové oblasti Ω působí síla $\vec{F}(\vec{r})$; přitom $\vec{r} \in \Omega$ (viz kap. 2.3.3).

4.6.2 Hustota síly $\vec{f}(\vec{r})$

Hustota síly $\vec{f}(\vec{r})$ je definována tak, aby úhrnná síla $d\vec{F}$ působící na prostorový element $d\Omega$ o objemu dV byla rovna $d\vec{F} = \vec{f}dV$ (viz obecněji kap. 2.3.2).

4.6.3 Intenzita pole \vec{I}

Intenzita \vec{I} je síla působící na „jednotkovou testovací částici“ (viz kap. 4.7.2).

4.6.4 Moment síly \vec{M} (vůči bodu)

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Nazývá se též „točivost“ a užívá se v dynamice tuhého tělesa (i ve statice). Referenčním bodem pro polohový vektor \vec{r} je zpravidla počátek souřadnic.

4.6.5 Moment hybnosti \vec{b} (vůči bodu)

je definován jako $\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$. Obecně zavádíme moment pro vektorovou veličinu takto:

Moment vektorové veličiny je rameno vektorově vynásobeno touto veličinou.

Rameno se měří od počátku souřadnic k bodu umístění veličiny (u síly k jejímu působišti). Platí věta analogická 2NZ, ale s momentem hybnosti a momenty sil:

Časová změna momentu hybnosti je rovna součtu momentů sil (= momentu výslednice sil).

Dokážeme ji snadno:

$$\frac{d}{dt} \vec{b} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (4.7)$$

protože $\vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Věta platí po vhodném zobecnění i pro tělesa konečných rozměrů a patří mezi základní pohybové rovnice tuhého tělesa (kap. 7.1.3).

4.6.6 Impulz síly \vec{J}

$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt$. Způsobí přírůstek hybnosti: $\vec{J} = \vec{p}_t - \vec{p}_i$.

Popisuje *časový účinek síly*; práce popisuje *dráhový účinek síly* a způsobí přírůstek energie.

4.7 Práce, energie

Motivace: V dobách vlády absolutního prostoru a času byla vznesena otázka, čím vyjádřit „míru pohybu“; zda hybností $\vec{p} = m\vec{v}$, či „živou silou“ mv^2 (dvojnásobkem kinetické energie). Šlo o nedorozumění, jde totiž o dvojí pohled na účinek síly – dráhový či časový.

4.7.1 Potenciálová síla; potenciální energie

Sílu \vec{F} nazýváme **potenciálovou**, pokud existuje skalární funkce $U(\vec{r})$ (zvaná **potenciální energie**, též **polohová energie**) taková, že

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U \quad \text{neboli} \quad (4.8)$$

$$F_i = -\partial_i U \quad \text{neboli} \quad (4.9)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right) \quad (4.10)$$

Ne každá síla je potenciálová (taky ne každou trojici funkcí – kartézských složek síly – lze vyjádřit jedinou funkcí skalární). Určitě to nejde u sil závislých nejen na poloze, ale i na rychlosti částice (např. síla tření nebo magnetická Lorentzova síla $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$). Jsou ale i jiné jednoduché příklady, např. síla

$$\vec{F}(x, y, z) = (1; 0; y) \quad (\text{neintegrabilní}) \quad (4.11)$$

není potenciálová.

4.7.2 Intenzita \vec{I} ; potenciál φ

Je-li testovaná síla \vec{F} působící na zkoumání tělíska lineárně úměrná jeho vhodné charakteristice q , pak zavádíme **intenzitu** $\vec{I} = \vec{F}/q$. Ta už charakterizuje silové pole bez ohledu na „velikost“ (tj. charakteristiku) zkoumání tělíska.

- Pro gravitační sílu \vec{F}_g působící na částici o hmotnosti m je intenzita $\vec{I} = \vec{F}_g/m$.

- Pro tíhovou sílu \vec{G} působící na částici o hmotnosti m je intenzita rovněž $\vec{I} = \vec{G}/m$.

- Pro elektrickou Coulombovu sílu \vec{F}_e působící na náboj q je elektrická intenzita $\vec{E} = \vec{F}_e/q$.

- Pro oscilátor tvořený částicí na pružině $\vec{F} = -k\vec{r}$ nezávisí síla pružiny na žádné charakteristice částice a intenzita je totožná se silou, $\vec{I} = \vec{F}$.

Podobně jako jsme zavedli potenciální energii k síle, zavedeme **potenciál** φ k intenzitě \vec{I} :

$$\vec{I} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad \text{neboli} \quad (4.12)$$

$$I_i = -\partial_i \varphi \quad \text{neboli} \quad (4.13)$$

$$\vec{I}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \quad (4.14)$$

Potenciál pak stejně jako intenzita popisuje „samotné pole“, bez ohledu na charakteristiku zkoumání částice.

4.7.3 Práce W ; dW

Předpokládejme, že zkoumaná síla \vec{F} působí na pohybující se částici po dobu dt . Za tu dobu se posune částice o $d\vec{r} = \vec{v} dt$ a urazí dráhu $ds = |d\vec{r}|$. Zavedme **elementární práci** coby *dráhový účinek* dW síly působící na částici pohybující se po trajektorii;

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \alpha \quad ,$$

kde α je úhel mezi směrem síly a tečnou k trajektorii částice.

↔ Značka \overleftarrow{d} , přeškrtnuté „d“, znamená, že jde o lineární kombinaci diferenciálů, ale výsledek nemusí být sám diferenciál, tj. nemusí existovat nějaká funkce W , jejímž diferenciálem by pak tento výraz byl.

Pro potenciálovou sílu lze elementární práci $\overleftarrow{d}W$ upravit takto:

$$\overleftarrow{d}W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -\overrightarrow{\text{grad}} U \cdot d\vec{v} dt \quad (4.15)$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}\right) dt \quad (4.16)$$

$$= -dU \quad (4.17)$$

neboli elementární práce vykonaná *potenciálovou* silou je totálním diferenciálem a je rovna úbytku potenciální energie částice. Obvyklé čtení je „Práce se konala na účet potenciální energie částice v silovém poli“.

Konečná (nikoli elementární) práce W však obecně závisí na trajektorii Γ (nejenom na krajních polohách), je to tedy *dějová veličina* (nikoli *stavová veličina*).

$$W = \int_{\Gamma} \overleftarrow{d}W \equiv \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.18)$$

Práce je veličina téhož druhu (a samozřejmě i rozměru) jako energie.

4.7.4 Zákon zachování mechanické energie; konzervativní síla

Upravujme pohybovou rovnici (2NZ) takto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} \quad | \cdot \vec{v} \quad (4.19)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = m\frac{1}{2}(\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) \quad (4.20)$$

$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \quad (4.21)$$

Zavedeme-li vedle potenciální energie $E_p = U$ částice v silovém pole ještě **kinetickou energii** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ pohybující se částice (též **pohybová energie**) a celkovou **mechanickou energii** $E = E_k + E_p$ částice, zjistíme, že platí

$$-\left(\frac{dE_p}{dt}\right) = \frac{dE_k}{dt} \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt}(E_p + E_k) = \frac{dE}{dt} = 0 \quad (4.23)$$

$$E = E_p + E_k = \text{konst} \quad (4.24)$$

tedy celková mechanická energie se při pohybu částice v potenciálovém silovém poli zachovává (**zákon zachování mechanické energie** v potenciálovém poli).

4.7.5 Konzervativní síly

Viděli jsme, že pro potenciálovou sílu \vec{F} platí $\overleftarrow{d}W = -dU$, a tedy práce W vykonaná při pohybu z bodu (1) do (2) (tzn. z bodu o polohovém vektoru \vec{r}_1 do bodu o polohovém vektoru \vec{r}_2) je rovna $U_1 - U_2 = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$ a nezávisí tedy na tvaru trajektorie Γ spojující oba body. To nám také dává jednoduchou možnost konstruktivního nalezení potenciálu v jednom bodě vůči jinému, totiž spočíst práci při přechodu mezi těmito body po vhodné křivce.

Dále, práce konzervativní síly po uzavřené trajektorii je rovna nule:

$$W = \oint_{\Gamma} \overleftarrow{d}W = 0 \quad (4.25)$$

pro libovolnou uzavřenou smyčku Γ . Pro konzervativní síly platí rovněž zákon zachování mechanické energie.

Každá síla, pro kterou platí zákon zachování mechanické energie ve smyslu rov. (4.25), se nazývá **konzervativní**. Tento pojem je širší než síla potenciálová: např. výše zmíněná Lorentzova magnetická síla $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ potenciál nemá (závisí na rychlosti náboje), ale je konzervativní, protože má směr vždy kolmý k rychlosti nosiče náboje a může sice změnit směr letu nabitě částice, ale nikoli velikost její rychlosti. Nemůže tedy ani změnit její kinetickou energii.

4.7.6 Výkon P

S výrazem

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt} \quad (4.26)$$

jsme se sešli už v rov. (4.15), kde znamenal rychlost konání práce, resp. rychlost předávání energie. Nazývá se (okamžitý) **výkon** (resp. **příkon**, podle orientace toku energie vůči uvažovanému objektu).

4.8 Tření

4.8.1 Klasifikace

Tření je v praxi velmi významný jev doprovázený nekonzervativní **třecí silou** (často rovněž stručně nazývanou **tření**). Je makroskopickým projevem jednak deformací, jednak vyrovnávání vzájemných rychlostí v mikroskopických oblastech materiálu. Můžeme rozlišit

tření vnitřní – uvnitř zkoumané tekutiny po obou stranách hranice (případně jen myšlené). Je podstatně menší než tření vnější. Proto se mažou mazadly ložiska a všechny části, kde by docházelo k vnějšímu tření, zejména vlečnému. Při malých rychlostech (kdy tekutina proudí laminárně) je tření zhruba úměrné relativní rychlosti v (případně gradientu rychlosti ve spojitém prostředí), při vyšších rychlostech v turbulentním proudění je zhruba úměrné v^2 .

tření vnější – mezi zkoumaným objektem a jeho okolím.

U vnějšího tření lze rozlišit:

tření vlečné – tzv. suché tření, když objekt a okolí mají nenulovou vzájemnou rychlost. Třecí síla \vec{F}_t je málo závislá na vzájemné rychlosti, ale je zhruba úměrná normálové (přítlačné) síle \vec{F}_n :

$$F_t = \mu F_n \quad (4.27)$$

Nejde o rovnici vektorovou, protože obě síly mají různé směry! Obvykle **činitel smykového tření** μ bývá cca 0,1 až 0,7 podle kvality a materiálu povrchů, činitel statický (viz dále) je vždy o něco větší než dynamický.

tření valivé – objekt a okolí jsou vůči sobě v klidu. Typickým příkladem je kolo o poloměru R valící se beze smyku po podložce.

$$F_t = \xi \frac{F_n}{R} \quad (4.28)$$

Ani zde nejde o rovnici vektorovou. **Součinitel valivého tření** ξ má rozměr *délky* (proto se nazývá součinitel; bezrozměrová veličina μ je zase činitel). Fyzikálně mu porozumíme představou, že se kolo vtiskne do podložky a vytvoří mělkou jamku; poloměr vtisknutí udává tento součinitel, protože k otáčení kola musí být moment tažné síly F s ramenem délky poloměru kola schopný překonat moment normálové síly s ramenem ξ .

Valivé tření je mnohem menší než vlečné, zejména jde-li o tvrdé materiály. Mívá hodnoty 0,001 mm (kulička v ložisku) až 0,3 mm (kolo na písku).

U vnějšího tření je dále potřeba pečlivě odlišit, zda jde o tření dynamické nebo statické:

tření dynamické – objekt se už pohybuje vůči okolí; činitel označíme indexem d .

tření statické – objekt dosud stojí vůči okolí; činitel označíme indexem s .

Jakkoli jsou si číselné hodnoty činitelů blízké, práce s nimi je zcela odlišná, jak ukážeme.

4.8.2 Tření dynamické (kinetické)

Tato situace je jednodušší na zpracování. Uplatní se, pokud se již předmět pohybuje vůči podložce a my počítáme všechny síly, které ovlivňují jeho pohyb. Je-li přítláčná síla (což je normálová síla, složka výslednice sil do směru normály k povrchu) známa, je dynamickým činitelem tření jednoznačně určena velikost třecí síly; její směr je proti směru pohybu. Spočteme a přičteme k ostatním působícím silám.

4.8.3 Tření statické

Tato situace je složitější. Uplatní se, pokud se předmět ještě nepohybuje vůči podložce a my počítáme, zda vydrží v klidu, nebo zda se „utrhne“. Je-li přítláčná síla známa, pak statický činitel tření udává *nikoli* skutečnou třecí sílu, ale její největší možnou hodnotu F_{\max} . Její směr není znám a nebude ani podstatný. Sečteme tedy všechny okolní síly kromě reakce podložky na výslednici $\sum \vec{F}$ a zjistíme její velikost a směr. Rozložíme ji do složky normálové (tu bude anulovat reakce podložky) a tečné; tu by měla – pro zachování stavu klidu – anulovat třecí síla. Na směru nezáleží, ale velikost musí být nanejvýš F_{\max} ; pak zůstane stav klidu zachován. Je-li však tečná složka výslednice větší, dá se předmět do pohybu a musíme počítat znova – tentokrát ovšem s dynamickým třením.

Kapitola 5

Řešení pohybové rovnice: kmity

2016-03-28

5.1 Matematický aparát

5.1.1 Homogenní rovnice

Pohybová rovnice bývá v nejjednodušších případech *homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty*, tedy

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = 0, \quad (5.1)$$

kde a_k jsou konstanty (obecně komplexní), N je řád diferenciální rovnice (v Newtonově zákoně $N = 2$) a $x(t)$ je neznámá funkce času – zpravidla souřadnice popisující pohyb částice.

Řešení rov. (5.1) hledáme ve tvaru

$$x(t) = e^{\lambda t}. \quad (5.2)$$

Dosazením do rov. (5.1) získáme

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t} = 0, \quad (5.3)$$

a protože $e^{\lambda t} \neq 0$, dostáváme **charakteristickou rovnici**

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0, \quad (5.4)$$

kteřá má obecně N kořenů λ_m , vedoucích na N řešení $e^{\lambda_m t}$. Obecné řešení rov. (5.1) je jejich lineární kombinace

$$x(t) = \sum_{m=0}^N C_m e^{\lambda_m t}, \quad (5.5)$$

kde (komplexní) konstanty C_m zvolíme tak, aby vyhovovaly *počátečním podmínkám* (obvykle podmínkám na x a všechny vyšší derivace v čase $t = 0$).

Pokud však některé kořeny splývají, např. je-li $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K$, neboli K -násobný (také K -krát degenerovaný) kořen λ , bylo by $K > 1$ funkcí $e^{\lambda_k t}$ lineárně závislých. Místo nich jsou však řešením funkce $t^k e^{\lambda t}$ pro $k = 0, 1, \dots, K - 1$. Řešením je tedy

$$x(t) = P^{K-1}(t) e^{\lambda t}, \quad (5.6)$$

kde $P^{K-1}(t)$ je polynom v proměnné t , jehož stupeň je roven $K - 1$.

5.1.2 Nehomogenní rovnice

Pokud lineární diferenciální rovnice není homogenní, tj. pokud má tvar

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = F(t), \quad (5.7)$$

pak

- vyřešíme nejprve v celé obecnosti rovnici homogenní;
- uhodneme libovolným způsobem jedno řešení rov. (5.7) (tzv. partikulární řešení);
- obecným řešením nehomogenní rovnice je pak součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení nehomogenní rovnice.

5.1.3 Pohybová rovnice – 2. Newtonův zákon

Budeme řešit pohybovou rovnici pro jednu částici o hmotnosti $m > 0$, nepodrobenou vazbám, na kterou působí výsledná vnější síla $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}$. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (5.8)$$

V jednorozměrných případech, kterými se budeme dále zabývat, má pohybová rovnice tvar

$$m\ddot{x} = F. \quad (5.9)$$

Tuto rovnici budeme v dalším řešit pro různé konkrétní tvary síly $F(x, t)$. Řešení uvažujeme pro $t \geq 0$, přičemž pro $t = 0$ máme zadány (reálné) počáteční podmínky:

$$\text{počáteční poloha } x_0 = x|_{t=0} \quad (5.10)$$

$$\text{počáteční rychlost } v_0 = v|_{t=0}. \quad (5.11)$$

5.2 Konkrétní tvary síly

5.2.1 Nulová síla: $F = 0$

Pokud na HB nepůsobí žádná výsledná síla (tedy pokud je výslednice \vec{F}_Σ všech vnějších sil v příslušném směru nulová), má pohybové rovnice tvar

$$m\ddot{x} = 0. \quad (5.12)$$

Tuto rovnici dvakrát integrujeme, čímž dostaneme řešení

$$\ddot{x} = 0 \quad (5.13)$$

$$\dot{x} = v_0 \quad (5.14)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad (5.15)$$

odpovídající rovnoměrnému přímočarému pohybu (samozřejmě podél zvolené osy x) s rychlostí v_0 a počáteční polohou $x_{(t=0)} = x_0$.

5.2.2 Konstantní síla: $F = F_0$

Konstantní síla F_0 působící na HB mu uděluje konstantní zrychlení $a = F/m$. Pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = F_0 \quad (5.16)$$

má rovněž zřejmé řešení (s toutéž interpretací x_0 a v_0)

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \quad (5.17)$$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{F_0}{m}t \quad (5.18)$$

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2} \frac{F_0}{m}t^2. \quad (5.19)$$

Známým příkladem je **volný pád** z výšky $z = h$. Počáteční rychlost je nulová ($v_0 = 0$), působící síla je $F_0 = -mg$ při obvyklé orientaci osy z vzhůru, takže řešení je

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.20)$$

Podobně **svislý vrh** z výšky $z = h_0$ vzhůru rychlostí $v_0 > 0$ má řešení

$$z(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.21)$$

5.2.3 Netlumený harmonický oscilátor: $F = -kx$

Ve fyzice nazýváme harmonickým oscilátorem hmotný bod mající jistou rovnovážnou polohu x_r a podrobený síle, která ho při vychýlení vrací do této polohy, přičemž velikost síly je úměrná výchylce od rovnovážné polohy; koeficientem úměrnosti je **pružnost** $k > 0$. Zvolíme-li pro jednoduchost počátek osy x právě v bodě x_r , má síla tvar

$$F(x) = -kx, \quad (5.22)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (5.23)$$

Zapišeme ji v obvyklém anulovaném tvaru

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (5.24)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.25)$$

Protože platí $m > 0$ i $k > 0$, můžeme zavést

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} > 0. \quad (5.26)$$

Obvyklým postupem hledáme řešení ve tvaru $e^{\lambda t}$, čímž dostaneme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (5.27)$$

s řešením

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad (5.28)$$

Fyzikálně relevantní řešení je ovšem jen reálná funkce; můžeme ji zapsat kterýmkoli z dále uvedených tvarů, vždy se dvěma konstantami volitelnými podle počátečních podmínek (označení indexů 1, 2 u φ , t , C je libovolné). Okamžitá poloha je

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad (x_m, \varphi_1) \quad (5.29)$$

$$= x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (x_m, \varphi_2) \quad (5.30)$$

$$= x_m \sin(\omega_0(t - t_1)) \quad (x_m, t_1) \quad (5.31)$$

$$= x_m \cos(\omega_0(t - t_2)) \quad (x_m, t_2) \quad (5.32)$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (A, B) \quad (5.33)$$

$$= \dots$$

$$= \Re C_{\pm} e^{\pm i\omega_0 t} \quad (\text{komplexní } C_{\pm} = C_{1\pm} + i C_{2\pm}) \quad (5.34)$$

V posledním případě se velmi často nepíše značka reálné části \Re a rozumí se jaksi automaticky, případně se připsuje „+ c.c.“, čímž se rozumí součet s komplexně sdruženým výrazem (slušelo by se doplnit $\frac{1}{2}$). Toto není problém při lineárních operacích; pozor je však potřeba dát tehdy, kdy potřebujeme např. druhou mocninu polohy či rychlosti, třeba pro výpočet energie.

Z časové závislosti polohy určíme snadno všechny ostatní fyzikální veličiny, např. podle rov. (5.30)

$$\text{rychlost } v = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) \quad (5.35)$$

$$\text{zrychlení } a = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = -\omega_0^2 x \quad (5.36)$$

Pro harmonické kmity se užívají následující termíny (formulované např. pro rov. (5.30)):

$$\text{amplituda} \quad x_m \quad (5.37)$$

$$\text{fáze} \quad \omega_0 t + \varphi_2 \quad (5.38)$$

$$\text{počáteční fáze} \quad \varphi_2 \quad (5.39)$$

$$\text{úhlová frekvence} \quad \omega_0 \quad (5.40)$$

$$\text{frekvence} \quad f = \omega_0 / 2\pi \quad (5.41)$$

$$\text{perioda} \quad T = 1/f \quad (5.42)$$

Synonyma: kruhová = úhlová; kmitočet = frekvence; doba kmitu = perioda. Někdy se místo „počáteční fáze“ užívá označení „fázová konstanta“. Není to moc vhodné, protože nejde o konstantu ve fyzikálním smyslu.

Připomeňme, že síla $F = -kx$ má **potenciál**

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 + U_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + U_0 \quad (5.43)$$

s libovolně zvolenou konstantou U_0 , protože platí $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$ (zde tedy $F = -dU/dx$). Odtud plyne, že se při pohybu harmonického oscilátoru zachovává celková mechanická energie.

Potenciál u síly pružnosti splývá s potenciální energií, protože síla pružnosti pružiny nezávisí na hmotnosti (náboji apod.) kmitajícího objektu.

Harmonický oscilátor se ve fyzice vyskytuje velice často, mj. jako první přiblížení pro chování soustavy (reprezentované HB) v blízkém okolí stabilní rovnováhy. Je to zřejmé z matematického hlediska: potenciál v místě x_r stabilní rovnováhy (zvolíme $x_r = 0$) musí nabývat minima. Je-li však potenciál v okolí nuly analytický, lze ho rozvinout v Taylorovu mocninnou řadu:

$$U(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad (5.44)$$

Z podmínky extrému plyne $U_1 = 0$ (pro minimum navíc $U_2 > 0$), takže při zanedbání členů x^3 a vyšších dostáváme právě potenciál harmonického oscilátoru (rov. (5.43)). Nelze-li členy $\mathcal{O}(x^3)$ zanedbat (např. vyjde-li $U_2 = 0$), jde o *anharmonický oscilátor*.

Obvyklá realizace je např. závaží hmotnosti m upevněné na pružině s tuhostí k . Zde je však nutno zajistit nesnadnou podmínku, aby vlastní hmotnost m_P pružiny byla zanedbatelná vůči hmotnosti m zkoumané částice. V opačném případě nelze zanedbat setrvačnost pružiny (resp. jejích částí) oproti setrvačnosti částice a museli bychom zkoumat limitní případ $N \rightarrow \infty$ složitě soustavy tvořené řetízem N částic hmotnosti $\mu = m_P/N$ spojených pružinami, každá o tuhosti k , zakončeným jednou částicí hmotnosti m .

Počáteční podmínky mohou být nejrůznější. Často se ale vyskytují dva typické případy:

- $x_0 \neq 0, v_0 = 0$: částici drženou mimo rovnovážnou polohu v okamžiku $t = 0$ volně vypustíme;
- $x_0 = 0, v_0 \neq 0$: částici vychýlíme z rovnovážné polohy úderem v okamžiku $t = 0$. Má-li narážející předmět rychlost w a je-li jeho hmotnost $M \gg m$ podstatně větší než hmotnost m částice, udělí jí rychlost $v_0 = 2w$.

5.2.4 Harmonický oscilátor s předpětím: $F = -kx + F_0$

Uvažujme sílu poněkud obecnější (např. na nehmotné pružině visí závaží a působí na něj i zemská tíže). Síla má pak tvar

$$F(x) = -kx + F_0, \quad (5.45)$$

a pohybová rovnice (nehomogenní, ale stále lineární) zní

$$m\ddot{x} + kx = F_0. \quad (5.46)$$

Její řešení je opět triviální. Jde o typ rov. (5.7) a její partikulární řešení je zřejmě např.

$$kx_r = F_0, \text{ tedy } x_r = \frac{F_0}{k}. \quad (5.47)$$

V případě pružiny se tedy závaží posune dolů o délku $d = \frac{mg}{k}$ a HB kolem nové polohy x_r harmonicky kmitá s toutéž frekvencí, rychlostí atd. jako dříve, bez předpětí.

Obecné řešení je (např. – viz rov. (5.30))

$$x - x_r = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (5.48)$$

kde nová rovnovážná poloha je $x_r = \frac{F_0}{k}$.

V řešení tedy nepřibyl žádný zajímavější jev. V dalším proto opět uvažujeme pro jednoduchost jen harmonický oscilátor bez předpětí.

5.2.5 Tlumený harmonický oscilátor: $F = -kx - h\dot{x}$

Chceme uvažovat realističtější situaci, kdy je pohyb harmonického oscilátoru nějak tlumen. Seznámili jsme se s třemi jednoduchými modely tlumení:

1. Suché tření (mezi pevnými tělesy; závislé na normálovém tlaku, málo závislé na rychlosti);
2. Odpor tekutého prostředí (kapalina či plyn) při malých rychlostech, kdy se uplatní hlavně vazkost prostředí; odpor prostředí je úměrný rychlosti pohybu HB;
3. Odpor tekutého prostředí při větších rychlostech, kdy se uplatní hlavně „rozhrnování“ prostředí; odpor je úměrný energii rozhrnované tekutiny, tedy čtverci rychlosti pohybu HB.

Označíme-li $1 M$ (jednotka: mach) velikost rychlosti vln v tekutině, pak cca od $\frac{1}{10} M$ se začne zřetelněji projevovat stlačitelnost tekutiny a s ní zcela nové jevy, jako rázová vlna u zvuku. Lze je hezky pozorovat na rozhraní voda-vzduch, kde je rychlost povrchových vln velmi nízká, centimetry za sekundu. Rychlost zvuku ve vzduchu je řádově 330 m/s, ve vodě asi 1 km/s.

Budeme se zabývat případem 2, který je velmi častý v praxi (např. kmitání tlumené vzduchem, ale i kmitání, kdy se po sobě pohybují pevná tělesa, jejichž styčná plocha je pro snížení odporu namazána olejem). Pro nás má nyní praktickou výhodu, že vede na lineární rovnici, kterou umíme vyřešit do všech podrobností.

Síla tření F_{tr} směřuje proti rychlosti pohybu. Výsledná síla má proto tvar

$$F(x) = F_{\text{pruž}} + F_{\text{tr}} = -kx - hv \quad , \quad (5.49)$$

a pohybová rovnice zní

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0 \quad . \quad (5.50)$$

Stejně jako dříve zavedeme

$$\omega_0 := \sqrt{k/m} \quad (5.51)$$

a dále součinitel tlumení vztahem

$$\delta := h/2m ; \quad \delta > 0 \quad . \quad (5.52)$$

Jeho převrácená hodnota se často nazývá časová konstanta: $\tau = 1/\delta$. (Opět: termín „časový parametr“ by byl správnější.) Pohybová rovnice dostane tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (5.53)$$

Řešíme ji opět stejně: hledáme řešení ve tvaru $x = e^{\lambda t}$. Charakteristická rovnice zní

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad . \quad (5.54)$$

Je to kvadratická rovnice s diskriminantem $D = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$ a řešení zřejmě závisí na tom, která z veličin δ a ω_0 je větší. Podle toho můžeme rozlišit tři případy:

1) **tlumené harmonické kmity:** $\delta < \omega_0$;

2) **aperiodický pohyb:** $\delta > \omega_0$;

3) **mezní aperiodický pohyb:** $\delta = \omega_0$.

Probereme je postupně.

1) **Tlumené harmonické kmity:** $\delta < \omega_0$

Zavedeme-li

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0 \quad , \quad (5.55)$$

dostaneme ihned obecné řešení, např.

$$x(t) = C_+ e^{(-\delta+i\omega)t} + C_- e^{(-\delta-i\omega)t} \quad (5.56)$$

$$= (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\delta t} \quad (5.57)$$

$$= C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad , \quad (5.58)$$

z něhož je zřejmý tvar pohybu. HB kmitá (teoreticky nekonečněkrát) kolem rovnovážné polohy, přičemž každý další kmit je oproti předchozímu zeslaben ve stálém poměru

$$1 : \beta = 1 : e^{-\delta T} = 1 : e^{-\frac{2\pi\delta}{\omega}} \quad . \quad (5.59)$$

Je zřejmé, že nulové body funkce $x(t)$ jsou od sebe vzdáleny o $\frac{1}{2}T$, kde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je perioda tlumených kmitů. Výpočtem však ověříme, že i maxima a minima této funkce (zjistíme je obvyklým způsobem, tj. anulováním derivace) mají tutéž periodu, třebaže *neleží* uprostřed mezi nulovými body.

2) **Aperiodický pohyb:** $\delta > \omega_0$

Tentokrát zavedeme naopak

$$\Delta := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} > 0 \quad (0 < \Delta < \delta) \quad (5.60)$$

a dostaneme ihned jako obecné řešení např.

$$x(t) = x_1 \exp^{-(\delta+\Delta)t} + x_2 \exp^{-(\delta-\Delta)t} \quad , \quad (5.61)$$

Protože je zřejmé $\delta > \Delta$, jsou oba exponenty v rov. (5.58) pro $t > 0$ záporné a s rostoucím časem výchylka x klesá exponenciálně k nule.

Snadno ověříme, že počáteční výchylka x_0 je rovna $x_0 = x_1 + x_2$, počáteční rychlost v_0 je rovna $v_0 = -\delta x_0 + \Delta(x_2 - x_1)$.

Okamžitá výchylka má (v závislosti na hodnotách a znaménkách x_1, x_2) nejvýše jeden extrém na intervalu $]0, +\infty[$.

Snadný rozbor ukáže, že jsou právě tři možnosti: HB se z počáteční polohy své rovnovážné poloze

1. monotonně přibližuje;
2. vzdaluje až do nejvzdálenějšího bodu trajektorie, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy.
3. přibližuje, přeběhne ji a pokračuje do nejvzdálenějšího bodu trajektorie, odkud se už monotonně vrací do rovnovážné polohy;

3) Mezní aperiodický pohyb: $\delta = \omega_0$

V tomto případě má charakteristická rovnice dvojnásobný kořen 0. Řešení má proto poněkud jiný tvar (viz rov. (5.6)):

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} \quad . \quad (5.62)$$

Charakter řešení i jeho vlastnosti jsou však podobné předchozímu, tedy aperiodickému pohybu; speciálně i zde je nejvýše jeden extrém a tři typy přiblížování k rovnovážné poloze.

Z praktického hlediska je zvláště významné, že za stejných okolností (m , k) a při různém tlumení h (resp. δ) vede mezní tlumení k nejrychlejšímu přiblížení rovnovážné poloze.

Přesněji řečeno: Při zadané odchylce ε je to právě mezní tlumení $\delta = \omega_0$, při kterém je minimální ten čas $T(\varepsilon, \delta)$, pro který v každém pozdějším čase $t > T(\varepsilon, \delta)$ platí

$$|x(t)| < \varepsilon. \quad (5.63)$$

Společná terminologie pro oscilátor s tlumením

Ve všech třech případech se pro $t \rightarrow \infty$ poloha HB exponenciálně blíží rovnovážné poloze $x_r = 0$.

Pro puntikáře: „blíží se exponenciálně“ neznamená, že jde o exponenciálu (i součet dvou exponenciál s různými exponenty již není exponenciála), ale že průběh pohybu lze majorizovat exponenciální funkcí.

Popisujeme-li časový průběh popsaný funkcí

$$x = x_m e^{-\delta t} \cos(\omega(t - t_0) + \varphi_0), \quad (5.64)$$

pak veličinu δ nazýváme **součinitel tlumení**, součin tohoto součinitele s periodou nazýváme **logaritmický dekrement** Λ . Pro čistě exponenciální útlum

$$x = x_m e^{-\delta t} \quad (5.65)$$

zavádíme **časovou konstantu** (během které poklesne rozkmit na 1/e-násobek) τ . Platí tedy

$$\text{počáteční amplituda: } x_m \quad (5.66)$$

$$\text{počáteční fáze: } \varphi_0 \quad (5.67)$$

$$\text{úhlová frekvence: } \omega \quad (5.68)$$

$$\text{frekvence: } f = \omega/2\pi \quad (5.69)$$

$$\text{perioda: } T := 1/f = 2\pi/\omega \quad (5.70)$$

$$\text{součinitel tlumení: } \delta \quad (5.71)$$

$$\text{logaritmický dekrement: } \Lambda := -\ln \beta = \delta T = 2\pi\delta/\omega \quad (5.72)$$

$$\text{časová konstanta (časový parametr): } \tau := 1/\delta. \quad (5.73)$$

$$\text{(útlum): } \beta := e^{-\delta T} \quad (5.74)$$

Veličina β (značení ani název není předepsán normou) se často prostě nazývá útlum a udává, kolikrát poklesne amplituda za jednu periodu.

5.2.6 Vynucené kmity: $F = -kx - h\dot{x} + F(t)$ **Obecné řešení**

Předpokládejme, že na kmitající oscilátor působí vtištěná vnější síla F_{vt} . Budeme se zabývat silou konkrétního tvaru

$$F_{vt}(t) = F_0 \cos \Omega t, \quad (5.75)$$

a to z několika důvodů, zejména

- jde o případ velmi častý a významný v praxi;
- protože pohybové rovnice jsou lineární, je každá lineární kombinace jejich řešení rovněž řešením původních rovnic. Z funkcí typu \cos na pravé straně pak lineární kombinací (Fourierova transformace) můžeme ze získaných výsledků odvodit řešení pro prakticky všechny časově závislé vtištěné síly $F_{vt}(t)$ na pravé straně, se kterými se v praxi můžeme setkat.

Pohybová rovnice má tedy tvar

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t, \text{ resp.} \quad (5.76)$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \Omega t, \quad (5.77)$$

kde jsme zavedli označení

$$a_0 := F_0/m. \quad (5.78)$$

Řešení budeme hledat způsobem uvedeným v kap. 5.1.2. Řešení příslušné homogenní rovnice, tedy rov. (5.53), známe – jde o jeden ze tří dříve rozebraných případů rov. (5.58), (5.61), (5.62), přičemž všechny alternativy ubývají s rostoucím časem exponenciálně k nule. Nyní tedy potřebujeme najít jedno řešení (partikulární integrál) rov. (5.76).

Pomůže nám fyzikální představa. Pod vlivem stále působící periodické síly tvaru $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ bude zřejmě nakonec HB oscilovat s toutéž (vynucenou) úhlovou frekvencí Ω , jen s neznámou amplitudou x_m a fází φ_0 :

$$x(t) = x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (\text{pro } x \rightarrow \infty). \quad (5.79)$$

Tato funkce se obvykle nazývá **řešením v ustáleném stavu**. (Úplné řešení vycházející z počátečních podmínek a zahrnující proto i řešení příslušné homogenní rovnice se nazývá **řešením v přechodovém stavu**, zejména pro malé hodnoty t , kdy členy s časem exponenciálně ubývající ještě nejsou zanedbatelné.)

Dosadíme proto funkci z rov. (5.79) do rov. (5.77), provedeme všechny derivace a upravíme na tvar

$$F \sin \Omega t + G \cos \Omega t = 0, \quad (5.80)$$

z něhož plynou (díky lineární nezávislosti funkcí $\sin \Omega t$ a $\cos \Omega t$) rovnosti

$$F = 0, \quad (5.81)$$

$$G = 0. \quad (5.82)$$

Dosazování je zcela mechanické, ale zabere dosti místa a času. Zjednodušíme si proto zápis zkratkami

$$\sin \Omega t \equiv S \quad (5.83)$$

$$\cos \Omega t \equiv C \quad (5.84)$$

$$\sin \varphi_0 \equiv s \quad (5.85)$$

$$\cos \varphi_0 \equiv c, \quad (5.86)$$

takže do rov. (5.77)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 C \quad (5.87)$$

dosazujeme rov. (5.79) ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) = x_m c C - x_m s S \\ \dot{x} &= -\Omega x_m \sin(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega x_m c S - \Omega x_m s C \\ \ddot{x} &= -\Omega^2 x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) = -\Omega^2 x_m c C + \Omega^2 x_m s S \end{aligned}$$

s výsledkem (po vytknutí x_m):

$$-\Omega^2 c C + \Omega^2 s S - 2\delta\Omega c S - 2\delta\Omega s C + \omega_0^2 c C - \omega_0^2 s S = \frac{a_0}{x_m} C \quad (5.88)$$

To je již naše požadovaná rov. (5.80), takže podle následujících rov. (5.81) a rov. (5.82) dostáváme dvě rovnice pro dvě neznámé a_0 a φ_0 (prostřednictvím $s = \sin \varphi_0$ a $c = \cos \varphi_0$):

$$-(\Omega^2 - \omega_0^2)c - 2\delta\Omega s = \frac{a_0}{x_m} \quad (\text{podle } C) \quad (5.89)$$

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)s - 2\delta\Omega c = 0 \quad (\text{podle } S) \quad (5.90)$$

Umocněním každé z těchto rovnic na druhou a následným sečtením dostaneme

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 = \left(\frac{a_0}{x_m}\right)^2, \quad (5.91)$$

takže po konečném dosazení $a_0 = F_0/m$ dostáváme řešení pro amplitudu výchylky

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad (\text{amplituda}), \quad (5.92)$$

zatímco z rov. (5.90) vydělením c dostaneme pro fázový posuv vztah

$$\tan \varphi_0 = s/c = \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad (\text{fáze}). \quad (5.93)$$

Tím je partikulární řešení, totožné s ustáleným stavem, nalezeno; přičtením řešení homogenní rovnice, tedy podle okolností rov. (5.58), rov. (5.61), nebo rov. (5.62) získáme obecné řešení (zvané též „přechodové řešení“, zejména v čase t krátce po počátku:

$$\begin{array}{l} \text{řešení homogenní rovnice} \\ x(t) = \overbrace{x_{00} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_1)} + \overbrace{x_m \cos(\Omega t + \varphi_0)} \quad , \quad \text{resp.} \\ x(t) = x_{10} e^{-\delta t} + x_{11} t e^{-\delta t} + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad , \quad \text{resp.} \\ x(t) = x_{01} e^{-(\delta+\Delta)t} + x_{02} e^{-(\delta-\Delta)t} + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad . \end{array}$$

Dva parametry (x_{00}, φ_1 , resp. x_{10}, x_{11} , resp. x_{01}, x_{02}) v přechodovém řešení volíme tak, abychom splnili počáteční podmínky pro výchylku x_0 a rychlost \dot{x}_0 kmitající částice. Ostatní parametry byly definovány dříve.

Rozbor; rezonance výchylky při malém tlumení

Při malém tlumení δ oscilátoru se může stát, že při proměnné úhlové frekvenci Ω vnější síly bude mít výchylka x (nebo energie E, \dots) výrazné maximum při jisté hodnotě $\Omega = \Omega_0$; říkáme, že dochází k *rezonanci* výchylky (energie, \dots). Rozebereme tuto situaci analyticky.

Jde o případ tlumených harmonických kmitů (nikoli o aperiodický pohyb) a řešení je tedy dáno vzorcem

$$x(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_m \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad , \quad (5.94)$$

v němž zvolíme C, φ_1 tak, abychom splnili počáteční podmínky pro $x_{(t=0)}$ a $v_{(t=0)}$, zatímco amplituda x_m a fázový posuv φ_0 v ustáleném stavu jsou určeny rov. (5.92) a rov. (5.93):

$$x_m = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad , \quad (5.95)$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (5.96)$$

Kdy mají výrazy smysl? Jmenovatel výrazu v rov. (5.96) není nebezpečný, protože i pro $\Omega \rightarrow \omega_0$, kdy se jmenovatel blíží nule, se prostě φ_0 blíží $\frac{\pi}{2}$. V rov. (5.95) je ale jmenovatel odmocninou ze součtu dvou čtverců. Výraz má tedy smysl vždy, kromě jediného případu, když platí $\Omega = \omega_0$ (rezonance energie, jak uvidíme) a současně $\delta = 0$ (nulové tlumení); v takovém případě roste amplituda kmitů neomezeně.

Obvykle předpokládáme i $\Omega > 0$. Cvičně uvažte i případ $\Omega = 0$ (tj. stálá, „stejnoseměrná“ síla), kdy výraz v rov. (5.92) diverguje. Rozeberte si podrobně, co a proč znamená divergence výrazu fyzikálně; příslušná úloha je vám známa už z dřívějšíka – z kap. 5.2.2.

Vyšetříme, jak závisí amplituda x_m ustálených kmitů na úhlové frekvenci Ω vynucených kmitů. V krajních hodnotách platí

$$\text{Pro } \Omega \rightarrow 0 : \quad x_m \rightarrow \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0/m}{k/m} = \frac{F_0}{k} \quad , \quad (5.97)$$

a to je, jak se dalo čekat, právě statická výchylka částice pod konstantní silou F_0 .

$$\text{Pro } \Omega \rightarrow \infty : \quad x_m \rightarrow \frac{F_0/m}{\sqrt{\Omega^4}} \rightarrow 0 \quad ; \quad (5.98)$$

čím rychlejší vynucené kmity, tím hůř je oscilátor stačí sledovat.

Maximum funkce $x_m(\Omega)$ nalezneme obvyklou cestou – anulováním derivace:

$$0 = \frac{dx_m}{d\Omega} = \left(\frac{F_0}{m} ((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2)^{-1/2} \right)' \quad (5.99)$$

$$= \frac{F_0 - 1}{m} \frac{1}{2} \left(((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2) \right)^{-3/2} (2(\Omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2\Omega + 4\delta^2 \cdot 2\Omega) \quad (5.100)$$

$$= \text{konst } 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \quad (5.101)$$

Vedle krajních bodů $(0; \infty)$ je tedy derivace nulová nanejvýš v jediném bodě Ω_r :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (5.102)$$

pokud ovšem platí

$$\omega_0 > \sqrt{2}\delta \quad (5.103)$$

Tato podmínka je ostřejší než podmínka $\omega_0 > \delta$ nutná pro existenci tlumených kmitů (a nikoli aperiodického pohybu). Je-li splněna, pak při úhlové frekvenci Ω_r dojde k rezonanci amplitudy.

Limitní případ: nulové tlumení

Pokud by bylo opravdu $\delta = 0$ a vnucená frekvence by se přesně rovnala vlastní $\Omega = \omega_0$, pak by pohybová rovnice rov. (5.76) přešla na tvar

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_0 t, \text{ resp.} \quad (5.104)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos \omega_0 t, \quad (5.105)$$

opět s označením

$$a_0 := F_0/m. \quad (5.106)$$

Partikulární řešení rovnice by však bylo nyní jiné. Podle toho, že by amplituda měla být s časem stále rostoucí sinusoida s frekvencí ω_0 , zkusíme funkci

$$x(t) = x_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.107)$$

a postupem stejným jako výše dostaneme konkrétní hodnoty x_0, φ_0 jako

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t) \quad (5.108)$$

Jak je vidět, amplituda, rychlost i zrychlení by kolísavě rostly do nekonečna, což by jistě rychle narazilo na limity (působící síla pružnosti přestala být lineární a řídit se tedy vztahem $F = -kx$, s rostoucí rychlostí by přestalo být zanedbatelné tření apod.).

Energie

Zabývejme se nyní energií buzených tlumených kmitů.

Celková mechanická energie E_Σ se u netlumeného oscilátoru s časem nemění. Uvažujeme-li např. rov. (5.30): $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$, $\dot{x}(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$, pak platí

$$E_\Sigma = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2. \quad (5.109)$$

U tlumeného oscilátoru klesá E_Σ s časem exponenciálně k nule díky činiteli $e^{-\delta t}$:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = \dot{x}(-h\dot{x}) = -h\dot{x}^2. \quad (5.110)$$

U vynucených kmitů se zabýváme jen ustáleným stavem. Ten má průběh stejného tvaru jako volný harmonický oscilátor a udržuje si proto i stejnou energii. Je to však vyváženo tím, že vtíštěná síla koná práci a dodává energii, která se díky tlumení ztrácí. Výkon síly je roven skalárnímu součinu síly a rychlosti (rov. (4.26)).

Rezonance energie

Energie E_z dodaná vtištěnou silou za dobu $T = 2\pi/\Omega$ jedné periody v ustáleném stavu je rovna

$$E_z = \int_0^T (-h\dot{x}^2)dt = -2\pi\delta\Omega mx_m^2 \quad (5.111)$$

a průměrný ztrátový výkon je

$$P = -\frac{E}{T} = \delta\Omega^2 mx_m^2 = \frac{\delta\Omega^2 F_0^2/m}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \quad (5.112)$$

Tato funkce má sice podobný průběh jako amplituda kap. 5.95 vyšetřovaná dříve, obvyklým způsobem můžeme najít extrémy anulováním derivace podle Ω , ale tentokrát je podmínkou rezonance (energie)

$$2\Omega\omega_0^2(\Omega^2 - \omega_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_0 \quad (5.113)$$

nezávisle na tlumení δ , resp. h .

Činitel jakosti

Činitelem Q jakosti kmitající soustavy (např. rezonančního obvodu) nazýváme poměr průměrné energie kmitající soustavy ku průměrné energii E_z , kterou vtištěná síla dodá během jednoho cyklu, aby udržela ustálené kmitání:

$$Q = \frac{E_\Sigma}{E_z} = \frac{2\pi\frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2}{2\pi\delta\Omega mx_m^2} \quad (5.114)$$

$$\text{v rezonanci: } Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (5.115)$$

5.2.7 Skládání kmitů**Princip superpozice**

Pokud součet příčin dává prostý součet důsledků, říkáme že platí princip superpozice. Lze snadno nahlédnout, že tento princip je splněn právě tehdy, jsou-li pohybové rovnice lineární (v proměnných, které popisují konfiguraci soustavy). Protože až dosud probírané pohybové rovnice lineární byly, byl tím splněn předpoklad principu superpozice.

Princip superpozice umožňuje používat plně redukcionismus a řešit namísto složité rovnice několik jednodušších dílčích rovnic — konkrétně zde namísto složité pravé strany (vtištěné síly) vyřešit pohybovou rovnici s pravou stranou sinusoidální; pro libovolný jiný průběh pravé strany použijeme její Fourierovy řady a převedeme tím novou úlohu na součet úloh známých, tj. řešením složité úlohy bude prostý součet řešení úloh jednodušších.

Kmity ve stejném směru

Úlohy s netlumenými kmity a s ustálenými stavy vynucených kmitů vedly na sinusoidální řešení typu např.

$$x_1 = x_{m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (5.116)$$

$$x_2 = x_{m2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.117)$$

Často se vyskytují dva speciální případy: úhlové frekvence ω_1, ω_2 jsou

stejné, tj. $\omega_1 = \omega_2$, amplitudy různé

blízké, tj. $\omega_1 \approx \omega_2$, přesněji $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$, amplitudy stejné.

Pro **stejně** úhlové frekvence lze snadno dokázat, že součtem dvou sinusoidálních funkcí s týmiž frekvencemi je opět sinusoidální funkce téže frekvence, jen s jinou amplitudou i fází:

$$x_1 + x_2 = x_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) + x_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.118)$$

$$= x_{m12} \cos(\omega t + \varphi_{12}) \quad (5.119)$$

kde

$$x_{m12} = \sqrt{x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (5.120)$$

$$\varphi_{12} = \arctan \frac{x_{m1} \sin \varphi_1 + x_{m2} \sin \varphi_2}{x_{m1} \cos \varphi_1 + x_{m2} \cos \varphi_2} \quad (5.121)$$

Odvození (nemáme-li právě po ruce Wolfram Mathematica):

Označme pro stručnost $s := \sin \omega t$, $c := \cos \omega t$, $S_k := \sin \varphi_k$, $C_k := \cos \varphi_k$, $X_k := x_{mk}$. Potom máme dokázat, že pravé strany rov. (5.118),(5.119) jsou si rovny. Upravíme funkce součtu úhlů:

$$X_1 c C_1 - X_1 s S_1 + X_2 c C_2 - X_2 s S_2 = X_{12} c C_{12} - X_{12} s S_{12} \quad (5.122)$$

Protože s , c jsou lineárně nezávislé, musí platit

$$X_1 C_1 + X_2 C_2 = X_{12} C_{12} \quad (5.123)$$

$$X_1 S_1 + X_2 S_2 = X_{12} S_{12} \quad (5.124)$$

Umocněním rovnic na druhou a sečtením dostáváme rov. (5.120), z podílů obou rovnic pak rov. (5.121).

Amplituda je zřejmě největší, jsou-li oba kmity „ve fázi“, tj. $\varphi_1 = \varphi_2$ a nejmenší, jsou-li oba kmity „v protifázi“, tj. $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$; ve druhém případě pro $x_{m1} = x_{m2}$ kmity vymizí, amplituda výsledku je nulová.

Pro **blízké** úhlové frekvence se stejnou amplitudou x_m upravíme součet s využitím rovnosti $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$x_1 + x_2 = x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.125)$$

$$= 2x_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \quad (5.126)$$

Rázy Výsledek rov. (5.126) interpretovat jako *modulované kmity*, tj. kmity s úhlovou frekvencí $(\omega_1 + \omega_2)/2$ a s (poměrně pomalu) proměnnou amplitudou, avšak nikoli $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ (jak by se zdálo z rov. (5.126)), ale dvakrát vyšší, totiž $|\omega_1 - \omega_2|$. „Záporná amplituda“ není totiž odlišitelná od kladné a *obalová křivka* — funkce typu $|\cos \alpha|$ — má periodu dvakrát větší než funkce $\cos \alpha$.

Jsou-li si v akustice úhlové frekvence ω_1 , ω_2 blízké natolik, že odpovídající rozdíl frekvencí $|f_1 - f_2| = |\omega_1 - \omega_2|/2\pi$ je menší než cca 10 Hz, dokážeme maxima sluchem vnímat a odlišit. Tento akustický jev se pak nazývá *rázy* (dříve též *zázněje*).

Kmity ve směrech navzájem kolmých. Lissajousovy obrazce

Kmitá-li částice dvěma harmonickými kmity ve směrech navzájem kolmých, např.

$$x(t) = x_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (5.127)$$

$$y(t) = y_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (5.128)$$

je zajímavé sledovat její trajektorii $F(x, y) = 0$, tedy vyloučit čas t z právě uvedených závislostí. Amplitudy x_m , y_m jen určují měřítko výsledné křivky a nejsou zajímavé; zvolíme je $x_m = y_m = 1$.

Jsou-li úhlové frekvence ω_1 , ω_2 v *racionálním* poměru $\omega_1 : \omega_2 = l : m$ s celými nesoudělnými l , m , pak je trajektorii uzavřená křivka dotýkající se opsaného čtverce právě v l bodech ve směru x a v m bodech ve směru y . Označíme-li totiž $\omega_{12} = \omega_1/l = \omega_2/m$, pak doba $T_{12} = 2\pi/\omega_{12}$ je nejmenší společnou periodou funkcí $x(t)$, $y(t)$, tj. platí $x(t) = x(t + T_{12})$, $y(t) = y(t + T_{12})$ a částice (poprvé) znovu pokračuje po své předchozí trase. Protože mezitím nabyla l -krát funkce $x(t) = \cos(l\omega_{12}t + \varphi_1)$ svého minima i maxima, má trajektorie se svou (čtvercovou) hranicí l společných bodů ve směru osy x a podobně m společných bodů ve směru osy y .

Je-li poměr úhlových frekvencí $\omega_1 : \omega_2$ iracionální, pak trajektorie vyplňuje hustě čtverec, tj. ke každému bodu B uvnitř čtverce a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje čas t takový, že v okamžiku t je bod trajektorie bodu B blíže než ε .

Generujeme-li na počítači trajektorii tak, že se s plynoucím časem t zobrazuje vždy úsek trajektorie $[t-t_0; t]$ s pevným t_0 , dostaneme esteticky hezké časově proměnné obrazce — „hada“ elegantně se vinoucího uvnitř jednotkového čtverce. Viz Wikipedie, Lissajousovy obrazce.

Lissajousových obrazců generovaných dvěma signály na osciloskopu se dříve, kdy nebyla digitální technika rozvinutá jako nyní, často užívalo pro měření frekvence neznámého signálu porovnáním se signálem známé frekvence.

5.2.8 Vázané kmity. Kvazičástice

Uvažujme dva stejné oscilátory kmitající samostatně s touž úhlovou frekvencí $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Zavedeme-li mezi nimi vazbu

$$F_P := -k_P(x_2 - x_1) \quad (5.129)$$

(např. pružinou s tuhostí k_P), pak vedle ω_1 se objeví i nová úhlová frekvence $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_P}{m}}$. Pro slabou vazbu ($k_P \ll k$) zde může dojít k rázům uvedeným výše; původní oscilátory si navzájem jakoby přelévají energii. Vše snadno zjistíme řešením soustavy pohybových rovnic:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_P(x_2 - x_1) = (k + k_P)x_1 + k_Px_2 \quad (5.130)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k_P(x_1 - x_2) = k_Px_1 - (k + k_P)x_2 \quad (5.131)$$

odkud sečtením a odečtením rovnic dostaneme ihned

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = -k(x_1 + x_2) \quad (5.132)$$

$$m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1 = -(k + 2k_P)(x_2 - x_1) \quad (5.133)$$

a dosazením $\xi_1 = x_1 + x_2$, $\xi_2 = x_2 - x_1$

$$m\ddot{\xi}_1 = -k \xi_1 \quad (5.134)$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -(k + 2k_P)\xi_2 \quad (5.135)$$

$$(5.136)$$

Soustavu dvou spřažených oscilátorů jsme převedli na dvě nezávislé rovnice popisující nové dva oscilátory – nezávislé *kvazičástice* s polohami ξ_1 , ξ_2 , s efektivními hmotnostmi m a s úhlovými frekvencemi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.137)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_P}{m}} \quad (5.138)$$

$$(5.139)$$

Takto se vyšetřují např. kmity v pevné látce a kvantují se na *fonony*, viz dále.

Je poučné rozmyslet si zde, jak se to má s „existencí“ a „neexistencí“ částic a kvazičástic. Soustava interagujících částic se pod vlivem vnějších vln opravdu chová (rezonuje či nerezonuje) jako soustava dvou neinteragujících kvazičástic, jejichž přítomnost v soustavě tedy opravdu můžeme zjistit přímým měřením. Polohu kvazičástic však přímým měřením nezjistíme. Tu můžeme vypočítat z poloh skutečných částic se započtením jejich interakcí — a naopak, ze známých hodnot veličin kvazičástic bychom mohli vypočítat i polohu a ostatní veličiny skutečných částic.

5.2.9 Řetízek oscilátorů

Uvažujme řetízek N stejných částic pohyblivých jen po ose x ; číslujme je 1 až n . Každá nechtě je spojena pružinou s tuhostí k se svým nejbližším sousedem. Předpokládejme, že v rovnováze mají částice tutéž vzájemnou vzdálenost a (u krystalů „mřížkový parametr“) a tedy n -tá částice má

$$\text{rovnovážnou polohu} \quad x_{n0} = na, \quad (5.140)$$

$$\text{okamžitou polohu (odchýlenou o } u_n(t)) \quad x_n(t) = na + u_n(t) \quad (5.141)$$

a pohybové rovnice jsou tedy

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}) \quad (5.142)$$

$$\text{resp. } \ddot{u}_n = -\omega_0^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (5.143)$$

s obvyklým zavedením $\omega_0 := \sqrt{k/m}$. Rovnice platí pro $n = 2$ až $n = N - 1$; krajní body 1 a N však nemají po jedné straně souseda a tedy by chyběla příslušná síla. Zesymetrizujeme rovnice *cyklickými okrajovými podmínkami*¹; rozšíříme řetízek, ale periodicky s periodou N . Ztotožníme tedy N -tou částí s nultou; můžeme se představit při větším N , že řetízek stočíme do kruhu. Pak budou rov. (5.142), (5.143) univerzálně platné pro všechna n (můžeme je brát mod N). Rovnice jsou sprážené a potřebovali bychom je separovat. Cítíme přitom, že v cyklickém řetízku si jsou všechny částice „rovnoprávné“, nemělo by záležet na tom, která — v kruhu — bude první. Hledejme proto u_n ve tvaru periodické funkce proměnné n se zatím neznámými parametry q, ω

$$u_n = u_m e^{i(2\pi qn/N - \omega t)} \quad (5.144)$$

Pro celočíselná q má u_n periodu N v parametru n (jak požadujeme). Dosazením dostaneme

$$-\omega^2 u_n = \omega_0^2 u_n (-e^{-i2\pi q/N} + 2 - e^{i2\pi q/N}) \quad (5.145)$$

$$= -\omega_0^2 u_n \left(2 + 2 \cos \frac{2\pi q}{N} \right) \quad (5.146)$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \left(1 + \cos \frac{2\pi q}{N} \right)^2 = 4 \left(\sin \frac{2\pi q}{2N} \right)^2 \quad (5.147)$$

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{2\pi q}{2N} \right| \quad (5.148)$$

Tím jsme dostali pro různá celá q povolené úhlové frekvence $\omega(q)$.

Fyzikální smysl parametru q :

5.2.10 XXX Struna

5.2.11 XXX Řetízek s bází

5.3 Speciální pohyby 3D: centrální pole

5.3.1 Definice centrálního pole

Silové pole $\vec{f}(\vec{r})$ nazýváme centrálním, jestliže

- síla $\vec{f}(\vec{r})$ směřuje vždy k jistému bodu² O zvanému *centrum síly*;
- má velikost f závislou jen na vzdálenosti r od tohoto bodu (nikoli na směru \vec{r}_0).

V bodě O zpravidla volíme počátek vztažné soustavy; pole \vec{f} v něm není definováno. Pak

$$\vec{f}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}_0 \quad (5.149)$$

kde $\vec{r}_0 = \vec{r}/r$ je jednotkový vektor příslušný nenulovému polohovému vektoru \vec{r} .

¹Ve 3D případě se takové cyklické okrajové podmínky nazývají *Bornovy-Kármánovy*.

²Pokud je centrální silové pole odpudivé, směřuje síla pochopitelně *od centra*, nikoli k němu; jinak ovšem platí totéž. S takovým polem se setkáme např. při rozptylu (kladně nabitých) α -částic na (kladně nabitým) jádru atomu.

5.3.2 Obecné vlastnosti centrálních polí

Lze dokázat, že každé centrální pole je *konzervativní*. Nejjednodušší je konstruktivní důkaz:

Označme $F(r)$ primitivní funkci k funkci $f(r)$, tj. platí $F(r) = \int f(r)dr$; $f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$.

Pak $U(r) = -F(r) + \text{konst} = -\int fdr + \text{konst}$ je potenciální energií silového pole \vec{F} , tj.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} U(r) \quad (5.150)$$

Důkaz si proveďte přímou derivací.

Dále, zadání úlohy je sice 3D, ale dokážeme, že pohyb v centrálním poli je *rovinný*, tedy jen 2D. Odehrává se v rovině určené centrem a počátečními podmínkami: leží v ní počáteční polohový vektor \vec{r}_0 a počáteční rychlost $\vec{r}_0 = \vec{v}_0$. Těmi je totiž určen počáteční moment hybnosti $\vec{b}_0 = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$, a jak dokážeme, moment hybnosti se při pohybu v centrálním poli zachovává.

Konečně, v rovině pohybu se zachovává *plošná rychlost* v_p , tedy plocha opsaná průvodičem dělená dobou pohybu (z definice plošné rychlosti platí totiž $v_p = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{b}/m$).

Zákon zachování momentu hybnosti $\vec{b} := \vec{r} \times \vec{p}$ v centrálním poli dostaneme snadno. Moment \vec{M} centrální síly vůči centru je totiž vždy roven nule:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times f\vec{r}_0 = \vec{0} \quad (5.151)$$

a protože časová změna momentu hybnosti je rovna momentu výslednice sil (rov. (4.7)), nemění se moment hybnosti s časem, a to ani co do směru (z toho plyne rovinný pohyb), ani co do velikosti (z toho plyne zachování plošné rychlosti).

Dále probereme dva speciální případy centrálních sil:

pružnost, kde $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$. Jde o (prostorový) harmonický oscilátor;

gravitace, kde $\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{1}{r^2}\vec{r}_0$. Tuto úlohu vyřešíme jako část obecnější úlohy — pohybu dvou těles, které se gravitačně přitahují (Keplerova úloha).

První úlohu probereme zde, druhou v samostatné kap. A.

5.3.3 Prostorový harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je charakterizován přitažlivou silou přímo úměrnou odchylce z rovnovážné polohy tedy (vektorově)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \vec{r} \quad (5.152)$$

Z kap. 5.3.2 víme, že půjde o rovinný pohyb. Zvolíme kartézské souřadnice a rozepíšeme pohybové rovnice do složek:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (5.153)$$

$$m\ddot{y} = -ky \quad (5.154)$$

s řešením podle kap. 5.2.3, rov. (5.30) a dále u Lissajousových obrazců, kap. 5.2.7, rov. (5.127):

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (5.155)$$

$$y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.156)$$

tedy se stejnou úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Trajektorií je obecně elipsa, jak dostaneme eliminací času t z těchto rovnic: označíme $\xi := x/x_m$, $\eta := y/y_m$, $c_k := \cos \varphi_k$, $s_k := \sin \varphi_k$ a rozepíšeme:

$$(a) \quad \xi = c_1 \cos \omega t - s_1 \sin \omega t \quad (5.157)$$

$$(b) \quad \eta = c_2 \cos \omega t - s_2 \sin \omega t \quad (5.158)$$

a eliminujeme funkci $\cos \omega t$ kombinací $c_2(a) - c_1(b)$, funkci $\sin \omega t$ kombinací $s_2(a) - s_1(b)$:

$$c_2\xi - c_1\eta = (-s_1c_2 + c_1s_2) \sin \omega t \quad (5.159)$$

$$s_2\xi - s_1\eta = (c_1s_2 - s_1c_2) \cos \omega t \quad (5.160)$$

Obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Do výsledku dosadíme $s_1c_2 - c_1s_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$, $c_1c_2 - s_1s_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $\xi = x/x_m$, $\eta = y/y_m$ a dostaneme

$$\left(\frac{x}{x_m}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_m}\right)^2 - 2\frac{x}{x_m}\frac{y}{y_m}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad , \quad (5.161)$$

což je rovnice elipsy s poloosami x_m , y_m ve středové poloze s hlavní osou natočenou o úhel $\varphi_1 - \varphi_2$. Po ní se tedy pohybuje částice realizující prostorový harmonický oscilátor. (Zdůrazněme, že centrum pole leží ve *středu* elipsy, zatímco v Keplerově úloze pro gravitační pole řešené v kap. A leží centrum pole v *ohnisku* elipsy).

5.4 Relaxační kmitý

Podstatou harmonických kmitů částice kolem rovnovážné polohy je, jak jsme viděli, síla navracející částici zpět s velikostí přímo úměrnou vzdálenosti od této rovnovážné polohy. Nemusí také jít o časici; harmonicky kmitat může i jiná fyzikální veličina (např. elektrické napětí či proud), je-li snadno realizovatelná její druhá derivace podle času.

Kmitý tohoto typu mívají v praxi víceméně *pevnou frekvenci*, vnější rušivé vlivy ovlivní spíše amplitudu.

Vedle těchto kmitů se v technice i v živé přírodě často vyskytují **relaxační kmitý** vznikající zcela jiným mechanismem, a to střídáním dvou režimů.

Uvažujme např. elektrický obvod podle obrázku. Ze zdroje pevného napětí U_0 se přes rezistor R nabíjí kapacitor s kapacitou C s paralelně zapojenou doutnavkou. Doutnavkou zatím prakticky neprochází proud. Nabíjením roste napětí $U(t)$ na kapacitoru i doutnavce a exponenciálně by se blížilo hodnotě U_0 . Jakmile však dosáhne zápalného napětí U_Z doutnavky, nastane v doutnavce výboj, náboj do té doby kumulovaný na kapacitoru poklesne, až při hodnotě U_A nestačí k udržení výboje a výboj zhasne. Doutnavkou přestane téct proud a kapacitor se opět nabíjí v prvním režimu.

Obě větve děje — nabíjení i vybíjení — mají charakter relaxace, tj. uvolnění, přechod z nerovnováhy do rovnováhy; odtud název *relaxační kmitý*. (Nejprve je to neúplně nabitý kapacitor zapojený na nabíjející zdroj napětí, poté nabitý kapacitor z možnosti vybití náboje přes doutnavku.)

Charakteristická proměnná (zde napětí U kapacitoru) probíhá interval od U_A do U_Z prvním režimem (nabíjení kapacitoru); při hodnotě U_Z dojde ke změně režimu a napětí se výbojem v doutnavce mění obráceně, od U_Z do U_A , v režimu vybíjení. (Může, ale nemusí být tedy symetrický k režimu prvnímu; zde zřejmě není, vybíjí se přes jiný odpor, než přes který se předtím nabíjelo.) Při napětí U_A se opět situace změní. Přejde se na první režim a celý děj se stále opakuje.

Výsledkem je sice periodický průběh proměnné veličiny x (zde U), ale určitě nikoli harmonický (který by měl sinusoidální závislost). Je tvořen dvěma větvemi (nárůst, pokles) obecně různé povahy, a proto obecně různého průběhu. Fáze relaxační bývá dána exponenciálou klesající asymptoticky k jisté limitní hodnotě, pokud platí, že rychlost \dot{x} je úměrná odchylce x (u harmonických kmitů to nebyla rychlost, ale zrychlení odchyly \ddot{x}). Rychlost může být např. i konstantní (pak je větev popsána parabolickým obloukem) nebo může kmitající objekt získávat impuls jen v okamžiku změny režimu (pak je větev popsána úsečkou), apod. Podle povahy tohoto průběhu lze např. v biologii uvažovat a odhadovat podstatu a původ působící zobecněné síly.

U kmitů tohoto typu zůstává stálý *rozkmít*, tedy amplituda kmitů. Vnější poruchy ovlivňují zpravidla spíše frekvenci.

Teoretické studium pak spočívá ve zkoumání jednak mechanismů relaxací, jednak mechanismů změn režimů.

Kapitola 6

Setrvačné (zdánlivé) síly

2016-04-11

Tato kapitola vznikla pro samostatný výklad problematiky. Připomíná proto občas (nadbytečně) některá základní fakta z mechaniky a užívá i elementární grafické konstrukce. Věřím, že mi to čtenář promine.

Motto:

Setrvačné „síly“ jsou jen přílepek pro to, aby 2. Newtonův zákon platil třeba i na kolotoči.

6.1 Mechanika v nenormálních situacích

K termínům: v hovorovém jazyce se užívá termín *pohyb* předmětu pro změnu jeho polohy (s časem); je fyzikálně vyjádřen jeho (nenulovou) rychlostí \vec{v} . *Setrvačnost* je vlastnost tělesa vyjádřená jeho (nenulovou) hmotností $m > 0$; podle prvního Newtonova zákona lze říct, že se volná částice pohybuje setrvačností. Chybná je formulace, že se pohybuje *setrvačnou silou*. To by odpovídalo aristotelovskému pojetí, kdy je k pohybu potřeba síly, zatímco podle Newtona je síla potřeba ke *změně* pohybu. Termín setrvačná síla (nepříliš šťastný) je zaveden pro jiný, dále vysvětlený pojem.

Tato kapitola zavádí „setrvačné síly“ neboli fiktivní, zdánlivé, nověji kinematické; je to např. síla Coriolisova, unášivá, odstředivá, Eulerova. Vysvětluje, že nejde o pravé síly (popisující interakci tělesa s okolím), ale jen o dodatečné členy s rozměrem síly, doplněné proto, aby pohybové rovnice zachovaly svůj tvar, i když souřadnice, rychlosti a zrychlení měříme ve vztazných soustavách *neinerciálních*, třeba vůči rotující Zeměkouli, rozjíždějícímu se rychlíku apod..

6.1.1 Pohyb částice v normální situaci

Zatím budeme provádět veškerá měření v inerciální soustavě a všechny proměnné měřené v inerciální soustavě budeme značit velkými písmeny: $m, \vec{R}, \vec{F}, \vec{A}, \vec{V}$. Omezíme se pro jednoduchost na nejjednodušší těleso — částici neboli hmotný bod, tedy těleso, jehož vlastní rozměry jsou v dané úloze zcela zanedbatelné a jehož poloha je plně popsána jediným bodem B, resp. jeho polohovým vektorem \vec{R}_B .

Částice je *volná*, když na ni nepůsobí žádné vlivy, tj. ani síly = interakce (např. magnetismus), ani vazby = omezení v pohybu (např. koleje), resp. když se všechny na ni působící vlivy navzájem dohromady vyruší. V těchto „normálních“ situacích dodržuje volná částice *první Newtonův zákon (1NZ)* neboli *zákon setrvačnosti*:

1NZ: Volná částice se pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo je v klidu).

Co se týče účinku sil, poradí nám *druhý Newtonův zákon (2NZ)* neboli *zákon síly*, totiž

Výsledná síla \vec{F}_Σ udělí volné částici s hmotností M zrychlení \vec{A} , kde $M\vec{A} = \vec{F}_\Sigma$. (1)

Zde je výsledná síla \vec{F}_Σ rovna součtu $\vec{F}_{\Sigma\text{skut}}$ všech skutečných sil na částici působících:

$$(2NZ:) \quad M\vec{A} = \vec{F}_\Sigma \quad (6.1)$$

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_{\Sigma\text{skut}} \quad (\text{zatím}). \quad (6.2)$$

6.1.2 První nenormální situace

Vedle síly je ještě jiná možnost, jak ovlivnit částici, a to je *vazba*. Vazbou nazýváme každé omezení pohybu, ať už co do polohy nebo co do směru. Příklady z technické praxe jsou třeba čepy, klouby, kladky, kolejnice. Částice podrobená vazbě ovšem už není volná. Pro jednoduchost uvažme časově neproměnné vymezení povolené trati¹ dané např. rovnicí $f(X, Y, Z) = 0$ vymežující plochu, po níž se jediná může bod se souřadnicemi X, Y, Z pohybovat a kterou nemůže opustit. Co s tím? Jak upravit 2NZ, aby platil i nadále, když částice není volná?

Pomůžeme si trikem: naši *vazbu* nahradíme vhodnou *vazbovou silou*. Ta bude právě taková, aby sice udržela částici „na cestě pravé“, ale jinak ji nijak neovlivnila, zejména aby jí nedodávala nebo neubírala energii. Pro zachování energie stačí, když tato síla \vec{F} bude zásadně kolmá na dráhu, tj. na posunutí $d\vec{r}$ částice; pak $dW \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Tím je určen směr: normála k trajektorii. Velikost je pak dána jednoznačně: tak „akorát“, aby částici „dotlačila“ přesně na dráhu, ale nepřetlačila o kus dál.

Příkladem budiž táta s klukem na cestičce v parku; v pozadí bdí hlídač. Jak zaručit, aby kluk dodržel vazbu, tj. nešlapal na trávnik? Stačila by klasická *vazba*, tj. tyč podél křivolaké cestičky, na ní navlečený kroužek, a ten je přikován k nožičce dítěte. Otec coby vnější vliv je pak nadbytečný. V praxi ale taková vodítka podél cest nemáme, a proto nezbývá, než aby otec fungoval jako *vazbová síla*: při pokusu kluka o vychýlení na něj zapůsobí vhodnou silou $\vec{F}_{\Sigma \text{vazb}}$: má směr kolmo k cestičce, a velikost právě takovou, aby kluka přiměl dojít až na cestičku, ale ne dál.

Vazbovou sílu (nahrazující tedy vazbu), formulujeme snadno:

$$\vec{F}_{\Sigma \text{vazb}} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f \quad , \quad (6.3)$$

kde f je známá skalární funkce popisující vazbu $f(x, y, z) = 0$ a $\lambda(x, y, z)$ je neznámá skalární funkce; určuje velikost síly a spočte se tak, aby vazba $f(x, y, z) = 0$ byla splněna pro pohyb popsaný řešením, tj. funkcemi $x(t), y(t), z(t)$.

Tím jsme zobecnili dosavadní pojem síly: k silám skutečným jsme přidali ještě *síly vazbové* $\vec{F}_{\Sigma \text{vazb}}$ vypočítané tak, aby nahradily jistou „nenormálnost“, totiž že částice nebyla volná:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_{\Sigma \text{skut}} + \vec{F}_{\Sigma \text{vazb}} \quad (6.4)$$

a i nadále platí 2NZ ve tvaru rov. (4.2), tedy

$$(2NZ:) \quad M\vec{A} = \vec{F}_{\Sigma} \quad .$$

6.1.3 Druhá nenormální situace: neinerciální soustava

Někdy však potřebujeme popis pohybu částice v soustavě, která není inerciální. (Takovou soustavu budeme za trest značit malým písmenem \mathcal{N} , malé písmo uijeme taky pro vše, co s ní souvisí: x, a, \dots) Zajímá-li nás Foucaltovo kyvadlo nebo stáčení pasátů, musíme uvážit, že Země, na níž stojíme a vůči níž provádíme měření, se otáčí kolem své osy. Soustava \mathcal{N} s ní spjatá proto není inerciální, jenže popis „mimo Zemi“ by byl evidentně nepraktický². Uvažme nyní³, co při novém popisu v pohybové rovnici zůstává a co se mění:

- (stejně) Hmotnost částice M je na vztažné soustavě nezávislá: $m = M$. Dále uijeme proto jen malé písmeno, značku m .
- (stejně) Časy T i t plynou „stejně rychle“. Mohou sice mít navzájem posuv (host z jiného časového pásma má čas $t = T - T_0$), ale protože všude používáme jen *dobu* $\Delta T = T_2 - T_1$, resp. $\Delta t = t_2 - t_1$, tedy rozdíl dvou časových údajů, toto T_0 se nikde neuplatní: $\Delta t = \Delta T$. Uijeme proto i zde nadále jen malé písmeno, t .

¹Tj. plným jménem vazba holonomní, skleronomní, oboustranná.

²Např. obvodová rychlost bodu na povrchu Země otáčející se kolem své osy je u nás cca 300 m/s, rychlost daná obíháním Země kolem Slunce je cca 30 000 m/s.

³Samozřejmě klasicky. V relativitě je $M \neq m$ a $\Delta T \neq \Delta t$; i s tím bychom si uměli poradit, ale teď se tím nezdržujeme.

- (stejně) Skutečné síly \vec{F} popisují interakci mezi částicemi, a ta rovněž nezávisí na tom, zda a kdo ji odkud popisuje. Obě dynamické veličiny tedy zůstávají stejné, na volbě vztažné soustavy nezávislé: $\vec{f} = \vec{F}$.

Rozklad vektoru do složek podle os X, Y, Z anebo x, y, z ovšem na volbě vztažné soustavy závisí, protože *vztažné trojhrany* xyz a XYZ mohou být vůči sobě natočené. Proto $\vec{f} = \vec{F}$, ale obecně⁴ $f_x \neq F_X$, $f_y \neq F_Y$ a $f_z \neq F_Z$.

- (změna) Zrychlení \vec{A} je časovou změnou rychlosti \vec{V} a ta je časovou změnou polohy \vec{R} . Počítáme ho z časového průběhu polohy částice jako

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}; \quad \vec{V} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} \quad \text{a podobně} \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}; \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (6.5)$$

Protože je obecně $\vec{r} \neq \vec{R}$, platí i $\Delta \vec{r} \neq \Delta \vec{R}$, $\vec{v} \neq \vec{V}$, $\vec{a} \neq \vec{A}$.

- (náprava) Vzájemná poloha $\vec{R}_B - \vec{R}_A = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ bodů A, B nezávisí na volbě vztažné soustavy. Provedeme tedy odvození nikoli pro \vec{R} , ale pro $\vec{R}_B - \vec{R}_A$, a za bod A vezmeme konkrétně počátek oné neinerciální soustavy \mathcal{N} . Pak je ovšem $\vec{r}_A = \vec{r}_{\mathcal{N}} = \vec{0}$, $\vec{R}_A = \vec{R}_{\mathcal{N}}$ a platí

$$\vec{R}_B - \vec{R}_{\mathcal{N}} = \vec{r}_B - \vec{0} \quad , \text{ čili} \quad (6.6)$$

$$\vec{R} - \vec{R}_{\mathcal{N}} = \vec{r} \quad (6.7)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{R} - \vec{R}_{\mathcal{N}}) = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}) \quad (6.8)$$

$$\vec{A} - \vec{A}'_{\mathcal{N}} = \vec{a} \quad (6.9)$$

(Jak uvidíme, derivace v neinerciální soustavě není zcela přímočará, proto $\vec{A}'_{\mathcal{N}}$.) Poslední rovnici vynásobíme hmotností M a využijeme rovnosti $M = m$:

$$M\vec{A} + (-m\vec{A}'_{\mathcal{N}}) = m\vec{a} \quad . \quad (6.10)$$

V inerciální soustavě \mathcal{S} má pohybová rovnice (2NZ) tvar $M\vec{A} = \vec{F}_{\Sigma}$, kde \vec{F}_{Σ} je součet všech (skutečných i vazbových) sil. My bychom tento tvar rádi zachovali i v neinerciální soustavě \mathcal{N} , tedy

$$(\text{rádi bychom:}) \quad m\vec{a} = \vec{f}_{\Sigma} \quad .$$

Tady ale přebývá člen $(-m\vec{A}'_{\mathcal{N}})$. Ten má fyzikální rozměr síly; nazveme ho tedy *setrvačnou silou*

$$\text{„setrvačná síla“:} \quad \vec{f}_{\text{setr}} \equiv (-m\vec{A}'_{\mathcal{N}}) \quad (6.11)$$

a při popisu v neinerciální soustavě ho vždy přidáme ke skutečným silám \vec{F}_{Σ} . Bude tedy

$$\vec{F}_{\Sigma} + \vec{f}_{\text{setr}} = \quad (6.12)$$

$$\vec{F}_{\Sigma \text{ skut}} + \vec{F}_{\Sigma \text{ vazb}} + \vec{f}_{\text{setr}} = \vec{f}_{\Sigma} \quad (6.13)$$

a s přidanou „setrvačnou silou“ platí i v neinerciální soustavě \mathcal{N} pohybová rovnice

$$m\vec{a} = \vec{f}_{\Sigma} \quad , \quad (6.14)$$

Měřeno z neinerciální soustavy se částice pohybuje podle 2NZ tak, jako by na ni vedle všech skutečných a vazbových sil navíc působila tzv. setrvačná síla $\vec{f}_{\text{setr}} = (-m\vec{A}'_{\mathcal{N}})$.

⁴To úsloví, že „obecně $a \neq b$ “ varuje, že někdy může náhodou být i $a = b$, ale spolehnout se na to nelze. Např. „Různí lidé mají obecně různá jména.“

Výraz pro zrychlení \vec{A}_N sestává z více členů. Tyto členy mají své názvy a podle nich nazýváme i jim odpovídající dílčí setrvačné síly: *unášivá*, *odstředivá*, *Coriolisova*, *Eulerova*, viz kap. 6.2.

↔ Můžeme totiž jít ještě dále, až k obecné teorii relativity. To nejprve odvodíme pohybové rovnice v nejobecnějších křivočarých souřadnicích. Pak do nich zahrneme, že prostor a čas spolu úzce souvisejí (přes konstantní rychlost světla). Nakonec si uvědomíme, že kvůli existenci gravitace⁵ *neexistuje* žádná inerciální soustava (S_0 , tedy ani S). Ale naše nejobecnější pohybové rovnice pro svou platnost již žádnou inerciální soustavu nepotřebují, a proto platí i tak. Tím už pak ovšem nejsme v klasické mechanice, ale zvládli jsme obecnou teorii relativity. Ale o tom jinde.

6.1.4 Čtyři vysvětlující poznámky

1) Právě zavedená setrvačná „síla“ $\vec{f}_{\text{setr}} = (-m\vec{A}_N)$ je zřejmě jen kinematickou, z polohy a času spočítanou berličkou, aby nám zůstal zachován 2. Newtonův zákon coby pohybová rovnice, a nepopisuje tedy žádnou skutečnou *interakci* mezi částicí a „něčím okolo“ – tělesy ani vazbami. Proto k ní *neexistuje* žádná reakce; nelze na ni použít 3. Newtonův zákon (zákon akce a reakce). Totéž ovšem platí i pro všechny dílčí síly, na které ji pro názornost rozkládáme. Speciálně setrvačná síla odstředivá *není* reakcí na dostředivou sílu!

Rozmyslete si do důsledků, že „setrvačná síla“ není nikdy síla ve smyslu interakce, ale jen způsob popisu zrychlení v jiné (neinerciální) soustavě. Pokud si narazím nos, když tramvaj prudce zabrzdí, pak z hlediska (neinerciální) tramvaje mnou tlačila setrvačná síla proti stěně, a ta svou pevností (neprohnula se, neprotřhla se) mi způsobila úraz. Z hlediska mého však stěna nebyla klidná, ale pohybovala se mi vstříc, až mne udeřila. Setrvačnou sílu potřebuji „do počtu“ – pro soulad s relativním zrychlením, aby mi vyšel 2NZ při výpočtu vůči tramvaji. Ale úraz mi způsobí vždy nějaká *skutečná* síla – interakce (zde: kontaktní síla) mezi mým nosem a zdí!

2) Všimněte si, že důsledně říkáme, že polohu a pohyb částice **popisujeme** v inerciální nebo neinerciální soustavě, a vyhýbáme se výrokům typu *částice je v inerciální (neinerciální) soustavě*. Řečeno lehčím slohem: částice *nepřísluší* žádné vztažné soustavě, anebo přísluší stejným právem všem soustavám – jak si vyberete⁶. Částice **je** (existuje) sama o sobě a je jí naprosto jedno, zda ji popisujeme a z jaké vztažné soustavy.

3) Když běžně popisujeme pohyb Slunce (a celé nebeské klenby) vůči Zemi (ve vztažné soustavě spojené se Zemí), tak říkáme, že se Slunce otáčí kolem Země, a máme pravdu stejně jako zelení mužičci na zcela jiné planetě, tvrdící, že (v jejich vztažné soustavě) se naše Slunce s celou oblohou točí kolem nich. Kolem čeho se tedy opravdu naše Slunce točí? To je jen otázka popisu, a popisů je tolik, kolik je pozorovatelů, třebaže naše Slunce je jen jediné. (Rozmyslete si krásný výrok „Sluníčko zašlo za mraky“, i když i prostý pasáček ví, že po obloze spíš plují rychleji mraky než sluníčko.)

V heliocentrické soustavě Koperníkově obíhá Země kolem Slunce, v geocentrické Ptolemaiově obíhá Slunce kolem Země. Běžná hovorová fráze „heliocentrická soustava je správná, geocentrická je nesprávná“ není pravdivá: vůbec žádná vztažná soustava není (a z principu ani nemůže být) nesprávná. Pravda je, že geocentrická soustava *není inerciální*, a proto popis pohybu, tj. kinematika ostatních planet v ní vychází složitější, a tím spíš i popis sil – dynamika. Heliocentrická soustava s počátkem v těžišti sluneční soustavy a s osami neotáčejícími se vůči „stálícím“ má k inerciální soustavě mnohem blíže a kinematika i dynamika jsou v ní podstatně jednodušší. To je vše, co se dá pravdivě říct: ale složitost a tím i „neobratnost“ neznamená nesprávnost. Můžeme s klidem, jak je nám libo, užívat kterékoli z obou soustav, anebo třeba soustav ještě divočejších (třeba soustavu spjatou s kolotočem, rozjíždějícím se na otáčející se Zemi, nebo soustavu spjatou s kývajícím se houpačkou). Jen se nám bude dost složitě počítat. . .

4) Konstatujeme-li tedy v rozjíždějící se tramvaji \mathcal{N} , že na nás působí setrvačná síla a tlačí nás do sedadla, pak stejně oprávněně musíme konstatovat, že na domy, koleje, stromy atd. působí v \mathcal{N} tatáž setrvačná síla jako na nás. Protože však tyto objekty nemají za sebou pro opření tramvajové sedadlo, které by bylo v klidu (vůči \mathcal{N} = tramvaji), neopřou se a musejí se pohybovat vůči \mathcal{N} se zrychlením daným touto setrvačnou silou, a to dozadu (opět vůči \mathcal{N} = tramvaji).

⁵Žádná volná částice totiž neexistuje: na každou působí gravitace, a tu není čím odstínit, když působí na všechny hmoty úplně stejně!

⁶Asi jako muž, který je věrný všem ženám.

Toto vše si důkladně rozmyslete. Student mívá totiž často zábrany: je ochoten počítat s odstředivou silou působící na broučka sedícího na podlaze kolotoče, ale váhá o působení setrvačných sil při popisu pohybu dravé mouchy sledující tohoto broučka a letící stále těsně nad ním, a vůbec si nepřipouští (byť stále při popisu vůči kolotoči) potřebu použít odstředivé síly pro popis vysoko nad kolotočem kroužícího kosa zaujatého broučkem i mouchou, nebo dokonce pro popis stromu stojícího opodál, z něhož vše sleduje se zájmem kosice. Chceme-li ale zkoumat fyziku z kolotoče (rozumí se: popisovat fyzikální děje z neinerciální vztažné soustavy spojené s otáčejícím se kolotočem), pak nutně zjistíme, že se např. domy na náměstí točí dokola kolem osy kolotoče. Zdůvodníme to tím, že na ně (v soustavě kolotoče) působí setrvačná síla odstředivá a Coriolisova, a to stejným právem jako na broučka, mouchu, kosa, kosici, strom, domy kolem i Slunce nad nimi všemi. Setrvačné síly jsou prostě univerzální daní odvedenou pohybovým rovnicím za to, že zůstanou platné i při popisu polohy, rychlosti a zrychlení vůči neinerciální soustavě, jakou je v tomto případě kolotoč.

6.1.5 Jak popisovat co nejvýhodněji

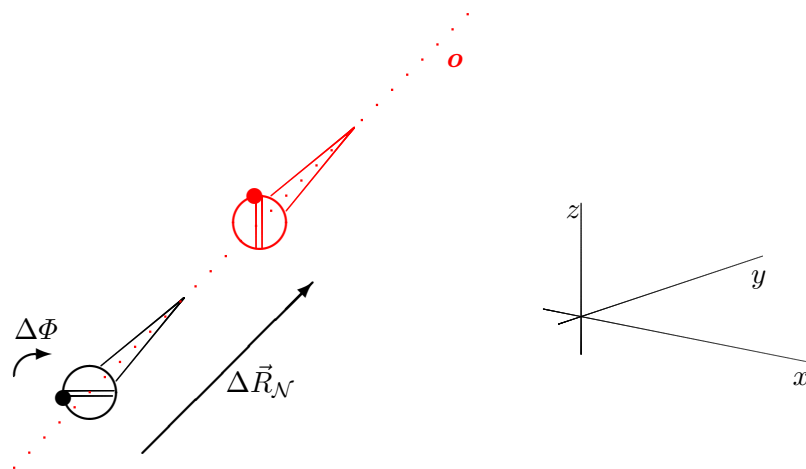
Pro popis dějů v neinerciální soustavě \mathcal{N} jsou vhodné takové pohybové rovnice, v nichž se budou vyskytovat

- *souřadnice* (a rychlosti i zrychlení) *zkoumaných objektů* vyjádřené výhradně v neinerciální soustavě \mathcal{N} (např. že na Zemi se na severní polokouli stáčí pasáty doprava – vůči Zemi \mathcal{N});
- a jenom *popis pohybu neinerciální soustavy* \mathcal{N} (tj. pohyb jejího počátku a její případná rotace) budou vyjádřeny v soustavě inerciální \mathcal{S} , např. že Země \mathcal{N} se kolem své osy točí od západu k východu úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ (vůči „stálícím“, \mathcal{S}).

Všechny proměnné v rovnicích budou tedy mít značky buď malé (\vec{a}) a popisovat zkoumaný objekt vůči \mathcal{N} , nebo velké s indexem \mathcal{N} ($\vec{A}_{\mathcal{N}}$, příp. $\vec{\Omega} \equiv \vec{\Omega}_{\mathcal{N}}$) a popisovat pohyb celé soustavy \mathcal{N} vůči \mathcal{S} .

6.2 Neinerciální vztažné soustavy – analytická metoda

Dokážeme, že nejobecnější přemístění \mathcal{N} vůči \mathcal{S} lze popsat pomocí posunutí $\Delta\vec{R}_{\mathcal{N}}$ jejího počátku $O_{\mathcal{N}}$ a otočení $\Delta\Phi$ kolem směru tohoto posunutí (*kinematický šroub*, podrobněji viz kap. 7.3.2).



Obrázek 6.1: Kinematický šroub

Jde-li o přemístění infinitezimální („elementární“, $\Delta \rightarrow d$) a trvá-li toto přemístění dobu dt , lze ho popsat vektory rychlosti $\vec{V}_{\mathcal{N}} = \frac{d\vec{R}_{\mathcal{N}}}{dt} \equiv V_{\mathcal{N}}\vec{j}$ a úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = \frac{d\Phi}{dt}\vec{j}$, kde $|\vec{j}| = 1$. Tato přemístění jsou komutativní. Vliv přechodu popisu z \mathcal{S} na \mathcal{N} lze tedy rozložit a můžeme studovat samostatně posunutí a otočení.

Posuvný pohyb je jednoduchý: každý bod jsoucí v klidu vůči \mathcal{N} má vůči \mathcal{S} totéž zrychlení $\vec{A}_{\mathcal{N}}$ a zrychlení se sčítají, takže – jak už víme z rov. (6.8) –

$$\vec{A} - \vec{A}_{\mathcal{N}} = \vec{a} \quad (6.15)$$

Otáčivý pohyb je složitější: při otáčení je časová změna $\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}}$ každého vektoru \vec{B} (ať už polohy, rychlosti či síly), měřená v neinerciální soustavě, dána jednak jeho časovou změnou $\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}}$ měřenou v inerciální soustavě, jednak úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ neinerciální soustavy \mathcal{N} vůči inerciální \mathcal{S} , a to vztahem

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\Omega} \times \vec{B}. \quad (6.16)$$

Druhý člen popisuje skutečnost, že i pro vektor časově neproměnný (v \mathcal{S}) se mění jeho složky v \mathcal{N} tím, že se otáčí neinerciální vztažený trojhran xyz vůči inerciálnímu XYZ úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$.

Kinematický šroub Obecný polohový vektor \vec{R} v \mathcal{S} a odpovídající polohový vektor \vec{r} v \mathcal{N} souvisí s polohovým vektorem $\vec{R}_{\mathcal{N}}$ počátku $O_{\mathcal{N}}$ soustavy \mathcal{N} vůči \mathcal{S} vztahem $\vec{R} - \vec{R}_{\mathcal{N}} = \vec{r}$ neboli

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R}_{\mathcal{N}} \quad (6.17)$$

Pak dvojnásobná aplikace rov. (6.16) na rov. (6.17) vede postupně na vztahy

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{v}_{\text{u}}, \quad \text{kde značíme} \quad (6.18)$$

$$\text{unášivá rychlost } \vec{v}_{\text{u}} = \vec{V}_{\mathcal{N}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}; \quad (6.19)$$

a dále

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{a}_{\text{C}} + \vec{a}_{\text{u}}, \quad \text{kde značíme} \quad (6.20)$$

$$\text{Coriolisovo zrychlení } \vec{a}_{\text{C}} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (6.21)$$

$$\text{unášivé zrychlení } \vec{a}_{\text{u}} = \vec{A}_{\mathcal{N}} + \vec{a}_{\text{E}} + \vec{a}_{\text{do}} \quad \text{zahrnující} \quad (6.22)$$

$$\text{unášivé posuvné zrychlení } \vec{a}_{\text{up}} = \vec{A}_{\mathcal{N}} \quad (6.23)$$

$$\text{Eulerovo zrychlení } \vec{a}_{\text{E}} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} \equiv \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \quad (6.24)$$

$$\text{dostředivé zrychlení } \vec{a}_{\text{do}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) \vec{\Omega} - \Omega^2 \vec{r} \quad (6.25)$$

$$= -\Omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad (6.26)$$

kde vektor \vec{r}_{\perp} směřuje kolmo od osy otáčení $\vec{\Omega}$ (nikoli od počátku $O_{\mathcal{N}}$ jako \vec{r}).

Tato zrychlení vynásobíme hmotností a změníme znaménko⁷, čímž dostaneme

$$\text{Coriolisovu sílu } \vec{f}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (6.27)$$

$$\text{unášivou sílu } \vec{f}_{\text{u}} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}} + \vec{f}_{\text{E}} + \vec{f}_{\text{od}} \quad \text{zahrnující} \quad (6.28)$$

$$\text{unášivou posuvnou sílu } \vec{f}_{\text{up}} = -m\vec{A}_{\mathcal{N}} \quad (6.29)$$

$$\text{Eulerovu sílu } \vec{f}_{\text{E}} = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \quad (6.30)$$

$$\text{odstředivou sílu } \vec{f}_{\text{od}} = m\Omega^2 \vec{r}_{\perp} \quad (6.31)$$

⁷Tím se změní i název: **d**ostředivé zrychlení vede na **o**dstředivou sílu.

Shrnutí I v neinerciálních soustavách platí 2NZ jako pohybová rovnice, pokud k výslednici \vec{F}_Σ skutečných a vazbových sil přidáme ještě setrvačné síly: Coriolisovu \vec{f}_{Cor} a unášivou \vec{f}_u , zahrnující unášivou posuvnou \vec{f}_{up} , odstředivou \vec{f}_{od} a Eulerovu \vec{f}_E :

$$m\vec{a} = \vec{f} = \vec{F}_\Sigma + \vec{f}_{\text{Cor}} + \vec{f}_u \quad (6.32)$$

$$= \underbrace{\vec{F}_\Sigma}_{\text{skutečná}} + \underbrace{(-2m\vec{\Omega} \times \vec{v})}_{\text{Coriolisova}} + \underbrace{(-m\vec{A}_N)}_{\text{unáš. posuvná}} + \underbrace{(m\Omega^2\vec{r}_\perp)}_{\text{odstředivá}} + \underbrace{(-m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r})}_{\text{Eulerova}} \quad (6.33)$$

Konkrétně např. při popisu pohybu na otáčející se Zeměkouli ($\Omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) zůstanou zpravidla jen dvě síly:

$$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}_\Sigma}_{\text{skutečná}} + \underbrace{(-2m\vec{\Omega} \times \vec{v})}_{\text{Coriolisova}} \quad (6.34)$$

6.3 Populárně: Neinerciální vztažné soustavy grafickou metodou

6.3.1 Diskretizace

Dnes jsou běžné digitální fotoaparáty. Většinou umožňují udělat nejenom jediný snímek, ale i movie – několik snímků „těsně za sebou“ (po době dejme tomu $\tau = \frac{1}{10} \text{ s}$), což se nám při pozorování s troškou tolerance jeví jako pohyb⁸: jako bychom sledovali živý děj.

Ukážeme si, jak ze dvou po sobě jdoucích snímků poznáme *rychlost* fotografované částice a ze tří snímků i jeho *zrychlení*, a tím z 2NZ (známe-li hmotnost částice) i *sílu*, která na ni v tom prostředním okamžiku působila. Tím budeme znát všechno potřebné i pro kinematiku, i pro dynamiku v onom prostředním okamžiku.

6.3.2 Parametrizovaná trajektorie (označková cesta)

Jak jsme výše naznačili, při grafické metodě vyjdeme z křivky zaznamenávající pohyb částice (ať už v \mathcal{S} nebo v \mathcal{N}), na níž budou vyznačeny i časy, ve kterých částice příslušné místo „navštívila“. Je to *parametrizovaná trajektorie*, a to konkrétně trajektorie parametrizovaná *časem* – našimi elementárními dobami τ .

↔ Trajektorie by mohla být parametrizovaná i jinak, třeba vlastní délkou – asi jako látkový krejčovský metr nebo silnice s patníky; byla by to tzv. přirozená parametrizace.

6.3.3 Rychlost

Rychlost popisuje časovou změnu *polohy*. K jejímu určení nám stačí dva po sobě jdoucí snímky: částice, která má na prvním snímku polohu \vec{r}_1 a na druhém \vec{r}_2 , má rychlost

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\tau} . \quad (6.35)$$

Pokud je na obou snímcích bod na tomtéž místě (tj. $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$), vyjde nám rychlost nulová: $\vec{v} = \vec{0}$ a bod je ve sledovaném okamžiku v klidu (alespoň s tou přesností, na jaké jsme se dohodli).

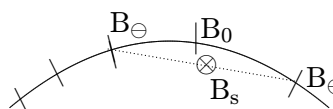
K danému času zřejmě můžeme určit jednak „rychlost před“ z r_\ominus a r_0 , jednak „rychlost po“ z r_\oplus a r_0 . A nejlépe je z nich pak vzít střed: $v_0 = \frac{1}{2}(r_\oplus - r_\ominus)/\tau$.

⁸Komu to nestačí, ať vezme $\tau = 1 \mu\text{s}$ (a počítá na víc desetinných míst). A kdo to chce úplně přesně, ať udělá limitní přechod $\tau \rightarrow 0$. Tím pak s pomocí kalkulu dostane s derivacemi přesně úplně všechno.

6.3.4 Zrychlení

Zrychlení popisuje časovou změnu *rychlosti*. Jestliže potřebujeme dva snímky pro zjištění rychlosti, pak pro určení zrychlení jsou nutné snímky tři: zjistíme, jak se rychlost změnila za danou elementární dobu. Z trajektorie na obrázku, parametrizované časem t v pěti polohách (tři, B_{\ominus} , B_0 , B_{\oplus} jsou pojmenované), je z prodlužování úseků zřejmé, jak se částice při pohybu zleva napravo zrychlovala.

Chceme-li určit zrychlení v čase t_0 , spočteme sousední časy $t_{\ominus} = t_0 - \tau$ a $t_{\oplus} = t_0 + \tau$ a pro všechny tři odpovídající polohy B_{\ominus} , B_0 a B_{\oplus} , resp. polohové vektory \vec{r}_{\ominus} , \vec{r}_0 a \vec{r}_{\oplus} . Z nich určíme rychlosti „před“ a „po“:



$$\begin{aligned}\vec{v}_{\ominus} &= (\vec{r}_0 - \vec{r}_{\ominus})/\tau, \\ \vec{v}_{\oplus} &= (\vec{r}_{\oplus} - \vec{r}_0)/\tau.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Zrychlení je rovno rozdílu těchto rychlostí vydělenému dobou τ mezi snímky:

$$\vec{a}_0 = (\vec{v}_{\oplus} - \vec{v}_{\ominus})/\tau = (\vec{r}_{\oplus} - 2\vec{r}_0 + \vec{r}_{\ominus})/\tau^2.\tag{6.37}$$

Tento výraz můžeme názorněji vyjádřit geometricky. Najdeme „střední polohu“ – bod B_s ležící přesně uprostřed mezi body B_{\ominus} a B_{\oplus} . Ten je popsán polovičním součtem polohových vektorů krajních bodů, tedy

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2}(\vec{r}_{\ominus} + \vec{r}_{\oplus})\tag{6.38}$$

a dosazením do rov. (6.37) dostaneme

$$\vec{a} = \frac{2}{\tau^2} (\vec{r}_s - \vec{r}_0).\tag{6.39}$$

Při pevné volbě doby τ tedy platí:

Zrychlení částice je úměrné odchylce její **střední** polohy B_s od **skutečné** polohy B_0 .

6.3.5 Výsledná síla (výslednice)

Výslednici \vec{f}_{Σ} působící na částici určíme podle 2NZ ze zrychlení \vec{a} a hmotnosti m :

$$\vec{f}_{\Sigma} = m\vec{a} = \frac{2m}{\tau^2}(\vec{r}_s - \vec{r}_0) .\tag{6.40}$$

Heslovitě řečeno, výslednou sílu působící na částici určíme graficky takto:

Výslednice je podle 2NZ úměrná odchylce **střední** polohy B_s od **skutečné** polohy B_0 .

Konstanta úměrnosti je rovna $\frac{2m}{\tau^2}$ a během celého pozorování se nemění (protože m je hmotnost částice a τ je dohodnutá „elementární“ doba mezi snímky = mezi měřeními poloh).

6.4 Cvičení

Na SŠ se řeší úlohy na některé speciální druhy pohybů v \mathcal{S} . Graficky se tyto pohyby projeví takto:

- **klid:** body B_{\ominus} , B_0 , B_{\oplus} splynou v jeden;
- **rovnoměrný přímočarý pohyb:** B_{\ominus} , B_0 , B_{\oplus} leží na přímce, jsou stejně daleko od sebe:
 $\overline{B_{\ominus}B_0} = \overline{B_0B_{\oplus}}$;
- **zrychlený přímočarý pohyb:** B_{\ominus} , B_0 , B_{\oplus} leží na přímce, jsou různě daleko od sebe:
 $\overline{B_{\ominus}B_0} \neq \overline{B_0B_{\oplus}}$;
- **rovnoměrný kruhový pohyb:** B_{\ominus} , B_0 , B_{\oplus} neleží na přímce, jsou stejně daleko od sebe:
 $\overline{B_{\ominus}B_0} = \overline{B_0B_{\oplus}}$;
- **rovnoměrně zrychlený pohyb (třeba volný pád):**
 $\overline{B_{\ominus}B_0} \neq \overline{B_0B_{\oplus}}$, ale rozdíl $\Delta s = \overline{B_{\ominus}B_0} - \overline{B_0B_{\oplus}}$ se během pohybu nemění;
- **obecný pohyb:** B_{\ominus} , B_0 , B_{\oplus} neleží na přímce, jsou různě daleko od sebe:
 $\overline{B_{\ominus}B_0} \neq \overline{B_0B_{\oplus}}$.

Vše, co potřebujeme vědět o pohybu (poloha, rychlost, zrychlení, síla) v jistém okamžiku, poznáme z oněch třech sousedících bodů na papíře při záznamu v konkrétní vztažné soustavě (ať už S či N).

6.5 Společné vlastnosti setrvačných sil

Setrvačné síly „působí“⁹ na *všechny* objekty popisované z hlediska neinerciální soustavy. Tyto síly tedy např. z hlediska kolotoče „nutí“ budovy kolem, aby se pohybovaly po kruhových drahách kolem osy kolotoče apod. Jinými slovy, zavedeme-li je, můžeme i z hlediska kolotoče úspěšně popisovat svět, a to jak předměty spojené s kolotočem, tak i stojící mimo něj. Odstředivá a Coriolisova síla tedy (z hlediska Země točící se kolem vlastní osy) správně popisují pohyb Foucaultova kyvadla, stáčení pasátů, ale i pohyb stálic na noční obloze. Shrnutí dohromady tedy každá setrvačná síla

- „působí“ – ve smyslu poznámky pod čarou – na (každý) *pozorovaný objekt*;
- nepopisuje žádnou interakci (mezi dvěma tělesy), a proto nemá smysl k ní hledat reakci ve smyslu 3NZ;
- je to fakticky jen umělý přílepek ($-m\vec{A}_N$) vymyšlený proto, aby 1NZ i 2NZ platily i při popisu z neinerciální vztažné soustavy;
- neexistuje (chcete-li, je identicky rovna nule) v inerciální vztažné soustavě.

6.6 Slovní zmatky; dostředivá síla a jiná „odstředivá síla“

Pojem odstředivé síly právě vyložený je sám o sobě dosti obtížný. Ale ještě horší je, že podobný termín – dostředivá síla – je úplně jiné kategorie. A nejhorší je, že stejný termín – odstředivá síla – se také užívá, ale pro něco zcela jiného.

⁹Méně emotivně řečeno: Setrvačné síly musíme zahrnout do pohybových rovnic pro *libovolný* objekt, který popisujeme v neinerciální soustavě.

6.6.1 (Vazbová) dostředivá síla

K tomu, aby se částice pohybovala rovnoměrně po kružnici, musí být výsledná síla kolmá k jejímu směru pohybu. Obvykle bývá tato síla vazbová (provázek, koleje apod.), u planet je to gravitační síla centrálního slunce. Při rovnoměrném pohybu částice směřuje tato síla do středu oskulační kružnice, a proto se nazývá *dostředivá síla*. Pokud se velikost rychlosti mění, tak „dostředivá“ síla *nemá* směr do středu oskulační kružnice. Shrnutí: dostředivá síla (zajišťující křivočarý pohyb)

- působí na *pozorovaný objekt* (od vazby či od ostatních okolních objektů);
- popisuje skutečnou interakci (mezi dvěma tělesy), a proto k ní existuje reakce ve smyslu 3NZ;
- existuje i v inerciální vztažné soustavě.

6.6.2 Odstředivá síla (působící na vazbu)

Pokládáme-li vazbovou dostředivou sílu za akci, pak reakcí k ní je síla, kterou obráceně působí částice na vazbu (provázek, kolejnici . . .). Někdy se tato síla nazývá *odstředivou*: „Koleje poškodila odstředivá síla projíždějících vlaků; ložisko vymlela odstředivá síla špatně vyváženého kola“. Není to moc šťastné z více důvodů. Jednak v případě ložiska ho tato síla poškodí směrem do osy, nikoli od osy¹⁰. Dále, její zavedení pro planetu obíhající kolem slunce by bylo rozporuplné; uvažte nikoli lehkou planetu, ale dvojhvězdu. A především je tato síla něco úplně jiného než právě vyložená (setrvačná) odstředivá síla:

- nová odstředivá síla *působí na vazbu* (závěs, kolej. . .), nikoli na částici;
- nová odstředivá síla je skutečná síla a existuje při popisu v kterékoli vztažné soustavě;
- nová odstředivá síla je ve vztahu akce – reakce s dostředivou silou, nutící částici k pohybu po kružnici;
- nová odstředivá síla nemá dobrý smysl, je-li zakřivení dráhy zkoumaného tělesa dáno nikoli vazbou, ale obecným silovým působením, např. gravitací jiného tělesa.

Nicméně, říká se to takto, a těžko najít něco jiného, co by se ujalo¹¹. Nezbyvá než uvážit vždy, o co se jedná: výše uvedené rozdíly vám určitě pomohou jednoznačně rozhodnout.

6.7 Příklady

6.7.1 Košíková na kolotoči: zvláště názorný příklad

Oblíbeným pouťovým trikem na kolotoči bývá volejbalový koš na ose: během zastavování kolotoče se vhodí mezi vozíci se zákazníkovi volejbalový míč s tím, že každý, kdo se trefí do koše, se může vozit znovu zadarmo.

Každý to rád zkusí, přesně zamíří – ale většinou se velice mine: míč namířený na koš se v letu jaksi zahne doprava a proletí dost daleko od koše. Fyzik sedící na kolotoči si řekne: „Inu, odehnula ho Coriolisova síla spolu s odstředivou.“ Fyzik stojící na zemi vedle kolotoče si řekne: „Ten míč letí ve svislé rovině, a ne po nějaké zahnuté ploše. Ale proč s ním ten člověk míří na koš a ne doleva, když ví, že se sám pohybuje doprava?“ On totiž vidí, že házející, který míří na koš, se sám pohybuje kolmo ke směru, kterým hází. Je to stejné, jako kdyby házela z auta, které projíždí okolo rychlostí stejnou, jakou má na kolotoči házející, tedy $U = R\Omega$. Je-li míč vržen rychlostí \vec{v} k ose, má vůči zemi rychlost \vec{W} , která je vektorovým součtem těchto rychlostí: $\vec{W} = \vec{v} + \vec{U}$; rychlosti \vec{v} , \vec{U} jsou k sobě kolmé. Po době $\tau = R/v$ proletí ve vzdálenosti $D = U\tau = RU/v$ od osy.

¹⁰No vážně: osa ložiska je prý vymlelá *odstředivou silou* – ale je snad nafouklá od středu osy, ven? Nikoli, je vmačkaná, a to samozřejmě ke středu osy, dovnitř!

¹¹Zkuste přemluvit lidi, aby říkali *teplotoměr* namísto *teploměr*, protože měří teplotu, a ne teplo!

6.7.2 Střelba na židliče

K otáčivé židli je našroubována vzduchová pistole mířící radiálně od osy otáčení a o něco dále terč. Roztočíme-li židli, dopadnou střely jinam, než když je židle v klidu.

Pozorovatel na židli měří zakřivený let střely a vysvětlí ho Coriolisovou a odstředivou silou, působící na pohybující se střelu. Pozorovatel na zemi vidí shora přímý let střely. Vidí však, že střela má vedle své rychlosti \vec{w} vůči zbrani i složku o velikosti $V = R\Omega$ danou tím, že se zbraň ve vzdálenosti R od osy otáčí úhlovou rychlostí Ω , a dále že během doby letu τ se cíl posune po oblouku o středovém úhlu $\Omega\tau$.

K oběma popisům přistupuje ovšem ještě mírný pokles ve výšce daný volným pádem střely během letu.

6.7.3 Odklon pasátů

Předmět, který stojí na rovníku, se vůči inerciální, nerotující soustavě \mathcal{S} spojené s osou Země pohybuje úctyhodnou rychlostí. Rovník má zhruba 40 030 km, Země se otočí zhruba jednou za 24 hodin (přesněji ovšem musíme uvažovat hvězdný den, cca 86 164 s), čili předmět má vůči \mathcal{S} nadzvukovou rychlost: $V_{0^\circ} \approx 465$ m/s. Posune-li se předmět o 30° na sever, měl by mít rychlost nižší: $V_{30^\circ} = 465 \cdot \cos 30^\circ$ m/s ≈ 400 m/s, aby byl v klidu vůči Zemi.

Pokud si tedy předmět o hmotnosti m setrvačností ponechal svých 465 m/s, tak přesunem na sever o 30° získal slušnou rychlost $\Delta v = 65$ m/s vůči Zemi, a také tomu odpovídající hybnost $\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v}$ (se směrem na východ). Z hlediska Země se předmět urychlil; toto zrychlení \vec{a}_{Cor} , stejně jako přírůstek $\Delta \vec{p}$ hybnosti, se jeví jako důsledek Coriolisovy síly \vec{f}_{Cor} „působící“ na točící se Zemi: $\vec{a}_{\text{Cor}} = -\vec{f}_{\text{Cor}}/m$.

A konkrétně k pasátům a vůbec k proudění vzduchu na naší Zemi: když se vzduch přesouvá na severní polokouli směrem od rovníku k pólu (to nastává v horních vrstvách troposféry), tak se právě popsaným mechanismem „předbíhá“ doprava (na východ). Na jižní polokouli při přesunu směrem od rovníku k jižnímu pólu se předbíhá rovněž na východ, tentokrát je to ovšem z jeho hlediska doleva. Naopak, proudí-li vzduch obráceným směrem, tedy směrem od pólů k rovníku (to pozorujeme ve spodních vrstvách atmosféry), pak „nestíhá Zemi“, zpožďuje se oproti zemskému povrchu, a tedy z hlediska svého pohybu se stáčí na západ (opět je to na severní polokouli doprava, na jižní doleva).

Obecně vzato je toto „Coriolisovo stáčení“ při pohybu předmětu na (otáčející se) Zemi tím výraznější, čím blíže jsme pólu. Na rovníku samotném se Coriolisova síla uplatní jen nepatrně – tím, že při pádu z výšky se předmět uchyluje na východ, při pohybu po rovníku směrem východním je předmět nadlehčován. Při pohybu od rovníku směrem k pólu (kterémukoliv) je ovšem přímo na rovníku Coriolisova síla nulová, protože tam je směr pohybu rovnoběžný s osou rotace Země.

6.7.4 Pád z velké výšky

Kámen padající z Eifelovy věže (ve vakuu) by padal asi 7 s a nepadl by přesně podle olovnice, ale zhruba 7 cm na východ. Proč? *Z hlediska Země*: na kámen působila během pádu odstředivá a Coriolisova síla. *Z hlediska inerciální soustavy*: vršek věže je od osy otáčení Země dál, a proto má větší posuvnou rychlost než spodek, takže fakticky nejde přesně o volný pád, ale o vodorovný vrh na východ, po hlavní kružnici ve směru otáčení Země.

Občas se můžete setkat s „aristotelovským“ výkladem: během pádu se Země pod kamenem stačí trochu pootočit (jako by se kámen ve svém rotačním pohybu se Zemí v okamžiku upuštění měl náhle zastavit!). Za dobu pádu kamene se však spodek i vršek věže posunou o několik kilometrů na východ. Kdyby tedy „aristotelovský“ kámen zapomněl obíhat kolem zemské osy, jakmile ho nedržíte, dopadl by na *obrácenou* stranu, a to s pěkně velkou odchylkou – o několik kilometrů.

6.7.5 A nakonec Cimrmanovo „Tudy cesta nevede, přátelé!“

Při zájezdu do rovníkové Afriky či Equadoru se na rovníku můžete setkat s ochotnými obchodníky, kteří vám (za mírný bakšiš) ukážou, jak na severní polokouli se při vytékání vody z nádoby malým otvorem ve dně tvoří vír doprava, zatímco o metr dále – už na jižní polokouli – v téže nádobě vytvoří táž voda při vytékání vír levotočivý. Je to velice efektní. (Vy se o to ani nepokoušejte. Nejspíš se vám ten jejich pokus nějak nepovede zopakovat.)

Když si ale uvědomíte:

- že Coriolisovo zrychlení $2v\Omega \sin \theta$ je řádu 10^{-11} m/s^2 (odhad: při zemském poloměru 6 378 km a odchylce v poloze 1 m je $\sin \theta \approx 0,16 \cdot 10^{-6}$; úhlová rychlost Ω otáčející se Země je $\Omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ a rychlost v proudící vody je malá);
- že je značně těžké ustálit čerstvě nalitou vodu v nádobě tak, aby se ani trošinku netočila;
- že s klesající hladinou a poloměrem otáčení se původní úhlová rychlost víru v kapalině výrazně zvyšuje;
- co dokážou nepatrné mimovolné (ba i nemimovolné) pohyby lidského těla, dané už prostě jen tepem našeho srdce, chvěním svalstva a podobně,

jmou se vás jisté pochybnosti a věrohodnosti tohoto „důkazu“ Coriolisovy síly. Docela právem.

Kapitola 7

Soustava HB a tuhé těleso

2015-04-30

7.1 Soustava hmotných bodů

7.1.1 Zavedení, základní pojmy

Uvažujme soustavu $N > 1$ hmotných bodů; budeme jim pro stručnost říkat částice a budeme je číslovat indexem, např. $n = 1 \dots N$. Jsou situace, kdy má rozumný smysl pokládat soustavu za celek a jako celek ji vyšetřovat. Příklady:

$N = 2$ Slunce + Země anebo Země + Měsíc; Keplerův problém, kap. A; spřažené oscilátory, vázané kmity, kap. 5.2.8; molekuly O_2 , N_2 , HCl ;

$N = 3$ Slunce + Země + Měsíc; molekuly H_2O , CO_2 , HCN ;

$N = 9$ zjednodušená sluneční soustava – Slunce a planety; molekula ethanolu C_2H_5OH ;

$N \gg 10^{20}$ kapka vody, krystal soli, kus křídly, dětská hračka „setrvačnick“, vzduch v míči.

Pracujeme-li s takovou soustavou jako s celkem, má smysl hledat, zda lze zavést jen několik málo veličin k jejímu popisu. Některé veličiny budou pouhým součtem dílčích veličin pro každou částici, jiné budou mít vlastnost „průměrné hodnoty“, další z nich mohou být odvozeny. Pro stručnost a přehlednost nevyepisujeme meze při sčítání přes částice: $\sum_n := \sum_{n=1}^N$.

Při součtu přes index číslující částice *neužíváme* Einsteinovu konvenci.

Celková hmotnost M je součet všech dílčích hmotností,

$$M := \sum_n m_n;$$

Celková hybnost \vec{P} je součet všech dílčích hybností,

$$\vec{P} := \sum_n \vec{p}_n = \sum_n m_n \vec{v}_n;$$

Celkový moment hybnosti \vec{B} je součet všech dílčích momentů hybností,

$\vec{B} := \sum_n \vec{b}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n$. V kvantové částice přisuzujeme částicím další aditivní atribut: spin \vec{s} mající povahu vlastního momentu hybnosti částice;

Celková kinetická energie E_k je součet všech dílčích kinetických energií,

$$E_k := \sum_n E_{kn} = \frac{1}{2} \sum_n m_n v_n^2;$$

Celková síla \vec{F} je součet všech sil na soustavu působících. Stačí sčítat jen síly vnější:

$\vec{F} := \sum_n \vec{F}_n^{\text{ext}}$. Součet všech vnitřních sil je totiž roven nule, protože díky 3NZ ke každé vnitřní síle existuje síla opačná: $\vec{F}_{nk} = -\vec{F}_{kn}$.

Celkový moment sil \vec{M} je součet všech momentů sil na soustavu působících. Pokud vnitřní síly jsou centrální, stačí sčítat síly vnější:

$\vec{M} := \sum_n \vec{M}_n^{\text{ext}}$; součet všech momentů vnitřních sil je v tom případě roven nule.

7.1.2 Střed hmotnosti, hmotný střed, těžiště

Pro každou soustavu lze definovat **střed hmotnosti** neboli **hmotný střed** *{center of mass}* vztahem

$$x_{\text{cm}} := \frac{\sum_n m_n x_n}{\sum_n m_n} \quad (7.1)$$

a analogicky pro y, z .

Pro kontinuum lze tento pojem zavést limitou $\sum_n m_n \rightarrow \int dm = \int \rho dx dy dz = \int \rho dV$, tedy

$$\vec{r}_{\text{cm}} := \frac{\int \rho \vec{r} dV}{\int \rho dV} \quad (7.2)$$

Protože tíhové pole je homogenní, splývá **těžiště**, tj. umístění výslednice tíhového pole působícího na uvažovaný předmět, s hmotným středem a název těžiště se používá i pro tento účel. Má to výhodu v jednoslovnosti a tím v možnosti odvození typu těžišťová soustava. Pro umístění výslednice jiného, případně nehomogenního pole se pak užívají jiné termíny (např. **metacentrum** pro vztlak působící na loď).

7.1.3 První a druhá věta o hybnosti

Opět stačí uvažovat jen vnější síly

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (7.3)$$

$$(7.4)$$

7.1.4 Kinetická energie; Königova věta

Celková kinetická energie je součtem dílčích kinetických energií:

$$E_k = \sum_n E_{kn} = \frac{1}{2} \sum_n m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n m_n (v_s + v_{sn})^2 = \frac{1}{2} v_s^2 \sum_n m_n + 0 + \frac{1}{2} \sum_n m_n v_{sn}^2 \quad (7.5)$$

Součet (kinetická energie myšleného bodu s hmotností M a s celkovou rychlostí těžiště) + (vnitřní kinetická energie částic vůči těžišti soustavy) je roven celkové kinetické energii soustavy (**Königova věta**).

7.1.5 XXX Zákony zachování

7.1.6 Srážka (ráz)

Problematika srážek je rozebrána v samostatné příl. B.

7.2 Pojem tuhého tělesa

7.2.1 Základní představy

Tuhé těleso během řešení úlohy nemění svůj tvar, tj. nedeformuje se.

¶ Rozlišujte tuhé těleso *{rigid body}*, opak: deformovatelné těleso, kontinuum) a pevná látka *{solid state}*, opak: kapalina, plyn. Tuhé těleso se studuje v klasické mechanice, pevná látka coby skupenství v termodynamice a v kvantové teorii.

Jednotlivé body **A**, **B** tuhého tělesa tedy mohou měnit s časem svou polohu: $\vec{r}^A(t)$, $\vec{r}^B(t)$, ale jejich vzdálenost $s = s_{\mathbf{AB}} = |\vec{r}^A(t) - \vec{r}^B(t)|$ se s časem nemění: $ds/dt = 0$.

Každou část tuhého tělesa můžeme zřejmě rovněž pokládat za tuhé těleso.

V definici tedy nejde jen o vnější tvar, ale i o vnitřní strukturu objektu. Kulové akvárium zcela naplněné vodou nebude tuhým tělesem, pokud bude uvnitř voda proudit (např. když budeme akvárium roztáčet). Pokud voda zmrzne (a akvárium to přežije...), bude se celek chovat jako tuhé těleso.

Z „mikroskopického“ přístupu dojdeme tedy k tuhému tělesu tak, že ho rozložíme na hmotné body. Tuhé těleso pak bude soustava N hmotných bodů doplněná vazbami, které zaručí, že se vzdálenosti jednotlivých bodů během úlohy nemění. Obvykle bude N značně velké číslo, potenciálně třeba i nekonečné. I proto budeme hledat jiný, „globální“ popis takový, aby stačil co nejmenší počet vhodných parametrů pro jednoznačné určení stavu tuhého tělesa.

Nakonec obligátní problém: *existuje* tuhé těleso? Odpověď – tuhé těleso existuje nebo neexistuje přesně stejně jako existuje nebo neexistuje hmotný bod. Neexistuje sice reálný objekt, který by při libovolné situaci zachovával svůj tvar a nedeformoval se (ostatně, z teorie relativity přímo plyne, že žádné těleso nemůže být dokonale tuhé, protože by přenášelo – uvnitř sebe – informaci nekonečně rychle). Setkáváme se však s řadou úloh, v nichž některé objekty svůj tvar nemění, a můžeme je proto pokládat za tuhé těleso. Můžeme tedy odpovědět tak, že se smyslu naší definice v rámečku nahoře tuhá tělesa existují.

A ještě obecněji: tuhé těleso i hmotný existují či neexistují právě tak jako úsečka nebo číslo 7. Jsou to prostě prvky jednoho z mnoha možných modelů, kterými popisujeme přírodu.

7.2.2 Popis tuhého tělesa. Stupně volnosti

Ukážeme si několik přístupů k problému a jejich vzájemné souvislosti.

Soustava hmotných bodů Jak je zřejmé, je tuhé těleso speciální soustavou prakticky nekonečného množství bodů. (Pokud se zastavíme na atomární úrovni, pak 1 kg železa obsahuje cca $N = 10^{25}$ atomů; stáří Vesmíru je pouhých cca $0,4 \cdot 10^{18}$ sekund.) Doufáme proto, že pro rozumný popis bude stačit podstatně méně parametrů. Ukážeme, že stačí 6 parametrů, a to nezávisle na N .

Tuhé těleso můžeme „sestrojit“ z hmotných bodů:

- Jeden jediný hmotný bod můžeme co do polohy popsat třemi spojitě proměnnými parametry (např. 3 kartézské souřadnice x, y, z , nebo ve sférických souřadnicích analogií nadmořské výšky r , zeměpisné šířky θ a zeměpisné délky φ ; říkáme, že hmotný bod má $f_1 = 3$ stupně volnosti.

Rovněž geometricky vzato je bod \mathbf{A} v 3D určen třemi souřadnicemi (např. kartézskými).

- Dva hmotné body \mathbf{A}, \mathbf{B} pevně spojené (model „činka“); každý z bodů má 3 stupně volnosti, ale musíme odečíst 1 stupeň na vazbu zaručující, že jejich vzdálenost $d_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ je pevná, tedy činka má $f_2 = 5$ stupňů volnosti.

Geometricky vzato je první bod \mathbf{A} určen 3 souřadnicemi, druhý bod \mathbf{B} při pevné vzdálenosti d od \mathbf{A} musí ležet na povrchu koule se středem v \mathbf{A} a poloměrem $d = d_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$; na ní je \mathbf{B} určen dalšími 2 parametry (např. úhly v polárních souřadnicích).

- Třetí bod \mathbf{C} přidaný k „čince“ mimo její osu dodá další 3 stupně volnosti, ale také další 2 nezávislé vazby (vzdálenosti od bodů \mathbf{A}, \mathbf{B} tvořících činku); soustava tří HB s pevnými vzdálenostmi má tedy $f_3 = 6$ stupňů volnosti. Toto platí jen, pokud přidaný bod neleží na podélné ose činky; leží-li na ní, má soustava i nadále jen 2 stupně volnosti.

Geometricky vzato další bod \mathbf{C} , neleží-li ovšem na spojnicí bodů \mathbf{AB} (na podélné ose činky), má při daných vzdálenostech $d_{\mathbf{AC}}, d_{\mathbf{BC}}$ k dispozici kružnici se středem na přímce \mathbf{AB} a ležící v rovině kolmé k přímce \mathbf{AB} a jeho poloha je tedy určena jediným dalším parametrem, např. úhlem φ v rovině této kružnice.

- Každý další přidaný bod přidává sice 3 stupně volnosti, ale také přidává 3 vazby určující jeho vzdálenosti od tří bodů neležících na přímce. Počet $f_N = 6$ stupňů volnosti tuhé soustavy HM se tedy již nezvětšuje s přibývajícimi dalšími body.

Geometricky vzato, vzdálenosti $d_{\mathbf{AD}}, d_{\mathbf{BD}}, d_{\mathbf{CD}}$ určují každý další bod \mathbf{D} dvojnásobně (body \mathbf{D}, \mathbf{D}' , které se navzájem zrcadlí podle roviny \mathbf{ABC}). Při zrcadlení však nejde o spojitě proměnný parametr, takže počet stupňů volnosti již neroste.

Tuhé těleso má 6 stupňů volnosti.

Při různých úvahách bývá také vhodné využít toho, že poloha tuhého tělesa je určena (až na zrcadlení), znám-li polohu třech jeho bodů neležících na přímce.

Vztažná soustava S tuhým tělesem můžeme spojit vztažnou soustavu \mathcal{S} s libovolně zvoleným počátkem \mathbf{O} a libovolně směřovaným pravotočivým trojhranem os x, y, z . Tato vztažná soustava \mathcal{S} se bude pohybovat spolu s tělesem, přičemž jednotlivé body tuhého tělesa budou mít v \mathcal{S} stále stejné, na čase nezávislé souřadnice.

Soustava \mathcal{S} není jediná. Stejně dobře nám poslouží libovolná jiná vztažná soustava \mathcal{S}' obecně s jiným počátkem \mathbf{O}' a s jinak směřovaným trojhranem os x', y', z' , která je v klidu vůči \mathcal{S} .

Někdy bude nejnázornější představa tuhého tělesa v jeho skutečném tvaru. Jindy bude stačit trojice jeho bodů (neležících na přímce), ještě jindy představa vztažné kartézské soustavy s tuhým tělesem pevně spojené.

Za šest parametrů určujících polohu tělesa lze s výhodou použít

3 souřadnice vhodného bodu (zpravidla hmotného středu tělesa či počátku souřadnic),

2 úhly určující v prostoru směr vhodné osy (např. osy z vztažné soustavy),

1 úhel určující natočení kolem této osy.

7.2.3 Volný, vázaný a klouzavý vektor

V mechanice hmotného bodu jsme zavedli pojem vektoru jakožto veličiny určené směrem a velikostí (geometrické pojetí) anebo jakožto trojice kartézských složek vektorů, které se při změně vztažné soustavy transformují jistým způsobem (složkové pojetí). Tento vektor budeme pro určitost nazývat volným vektorem, např. \vec{v} . Pracujeme s nimi podle pravidel vektorového počtu z matematiky (skládání vektorů, lineární kombinace, součiny skalární a vektorový atd.).

Při studiu hmotného bodu nacházejícího se v jistém místě \mathbf{A} (s polohovým vektorem \vec{r}^A) se všechny vektory týkaly tohoto bodu: poloha bodu \vec{r} , jeho rychlost \vec{v} , zrychlení \vec{a} , síla \vec{F} působící na tento bod apod., a nebylo tedy potřeba žádné dodatečné upřesnění. Bod \mathbf{A} jsme jakožto samozřejmost ani nezmiňovali a pracovali jsme tak, jako se pracuje s volnými vektory.

Při studiu soustavy hmotných bodů však potřebujeme vektorům přiřadit určité *umístění* v prostoru. Potřebujeme rozlišit sílu působící v bodě \mathbf{A} od síly působící v bodě \mathbf{B} , rychlost HB nacházejícího se v místě \mathbf{A} od rychlosti jiného HB v místě \mathbf{B} apod.. Zavedeme proto několik pojmů:

Vázaný vektor je dvojice {volný vektor; bod}. Značme ji $\{\vec{v}; \vec{A}\}$, případně stručněji \vec{v}^A či \vec{v}_A .

Umístění vázaného vektoru \vec{v}^A je bod \mathbf{A} . (U síly \vec{F}^A se zpravidla nazývá **působíště**).

Vektorová přímka nenulového vázaného vektoru \vec{v}^A je přímka procházející bodem \mathbf{A} a mající směr \vec{v}_0 vektoru \vec{v} . (Nebo např.: vektorová přímka je určena body \mathbf{A}, \mathbf{B} , kde $\vec{r}^B = \vec{r}^A + \vec{v}_0$.
Anebo: vektorová přímka je množina bodů s polohovými vektory $\vec{r}^A + \lambda \vec{v}_0$ pro $-\infty < \lambda < \infty$.)

Vázané vektory můžeme skládat jen, mají-li totéž umístění.

Při studiu tuhého tělesa se setkáme se situací, kdy je rozumné mezi vázanými vektory zavést ekvivalenci: vázané vektory \vec{F}^A a \vec{F}^B s různými umístěními téhož volného vektoru si budou ekvivalentní, jestliže posunutí $\vec{l} = \vec{r}^B - \vec{r}^A$ je rovnoběžné s volným vektorem \vec{F} . Pak vektory \vec{F}^A a \vec{F}^B budou různými reprezentacemi téhož klouzavého vektoru.

Umístění \mathbf{A} klouzavého vektoru \vec{F}^A lze posouvat podél vektorové přímky jeho volného vektoru \vec{F} .

K bližšímu vysvětlení a ukázce techniky práce s klouzavými vektory se dostaneme později, spolu s výkladem, k čemu je dobré tento pojem zavádět. Rovněž zavedeme nový pojem, silovou dvojici mající charakter volného vektoru.

7.3 Kinematika tuhého tělesa

7.3.1 Přemístění tuhého tělesa

U hmotného bodu bylo nejobecnějším přemístěním posunutí (a to o vektor posunutí $\vec{l} = \vec{r}' - \vec{r}$ z počáteční polohy \vec{r} do koncové polohy \vec{r}'). Pro tuhé těleso je možných typů přemístění z polohy \mathcal{S} do \mathcal{S}' více:

Posunutí o \vec{l} ; při něm se každý hmotný bod tuhého tělesa posune o \vec{l} , tedy

$$\vec{r}^{A'} = \vec{r}^A + \vec{l} \quad (7.6)$$

Otočení kolem bodu \mathbf{O} ; při něm je bod \mathbf{O} samodružný, tj. $\mathbf{O}' = \mathbf{O}$;

Otočení kolem osy \mathbf{o} o úhel φ ; při něm každý bod \mathbf{A} tělesa ležící na ose \mathbf{o} je samodružný: $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ a body tělesa ležící mimo osu \mathbf{o} se otočí kolem této osy o týž úhel φ .

Poznámky:

- Bod \mathbf{O} nemusí ležet v tělese.
- Osa \mathbf{o} nemusí procházet tělesem.
- Při otočení se lze omezit na úhly $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- Protože body na ose \mathbf{o} při otočení nemění svou polohu, lze připustit, že i tyto body se rovněž kolem osy \mathbf{o} otočily o úhel φ . Pak lze říct, že otočení o úhel φ je společné pro všechny body tělesa.
- Ověřte si, že posunutím ani otočením kolem osy se tuhé těleso „nepoškodí“, tj. že i nadále zůstanou splněny podmínky definující tuhé těleso.

V kap. 7.3.3 dokážeme, že každé otočení kolem bodu \mathbf{O} je ekvivalentní nějakému otočení kolem vhodné osy \mathbf{o} (procházející bodem \mathbf{O}) o vhodný úhel φ (věta d'Alembertova).

Infinitezimálním pootočením $d\omega$ kolem osy popsané jednotkovým vektorem $\vec{\omega}_0$ procházející počátkem souřadnic se bod s polohovým vektorem \vec{r} posune o vektor posunutí $d\vec{r} = d\omega \vec{\omega}_0 \times \vec{r}$. Proběhne-li toto otočení na infinitezimální dobu dt , dostáváme vyjádření posuvné rychlosti bodu při otáčení:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.7)$$

Derivací rov. (7.6) podle času t dostáváme rovnici pro rychlost posuvného pohybu

$$\vec{v}^{A'} = \vec{v}^A + \vec{V} \quad (7.8)$$

což spolu s předchozími rovnicemi dává **základní rovnici kinematiky TT**:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}^A(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \quad (7.9)$$

Bohužel, rovnice nám určuje rychlost \vec{v} a nikoli polohu \vec{r} bodu, což komplikuje její použití a řešení.

7.3.2 Kinematický šroub

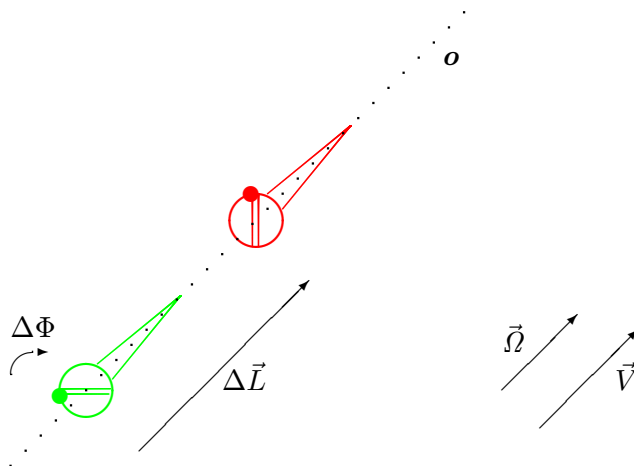
Posunutí a otočení kolem osy lze spolu kombinovat, čímž vznikne **kinematický šroub**.

Kinematický šroub je přemístění dané osou \mathbf{o} , posunutím ΔL a úhlem $\Delta\Phi$, kdy každý bod TT

- posuneme o ΔL podél osy \mathbf{o} , a poté
- otočíme o úhel $\Delta\Phi$ kolem této osy \mathbf{o} .

Poznámky:

- Posunutí lze tedy popsat vektorem $\Delta\vec{L}$. Protože v celé konstrukci zůstává osa \mathbf{o} pevná, lze i otočení kolem ní popsat vektorem $\Delta\vec{\Phi}$. Z těchto veličin odvodíme dále rychlost posuvnou \vec{V} a úhlovou $\vec{\Omega}$.
- V tomto speciálním případě je posunutí a otočení komutativní, tj. nezáleží na pořadí, v jakém je vykonáme. Jinak obecně posun a otočení nejsou komutativní.
- Samozřejmě připouštíme i speciální případy, kdy $\Delta L = 0$ (samotné otočení) nebo $\Delta\Phi = 0$ (samotný posun) nebo obojí (těleso se nepohnulo z místa; směr osy \vec{o} je pak libovolný).



Obrázek 7.1: Kinematický šroub, rychlost posuvná \vec{V} a úhlová $\vec{\Omega}$

Jde o nejobecnější přemístění vztažné soustavy, resp. tuhého tělesa, jak dále dokážeme (Chasle-ova [šálsova] věta).

¶ Michael Chasles [mišel šál], 1793-1880, fr. matematik.
Při době přemístění ΔT a limitě $\Delta T \rightarrow 0$ lze zavést:

- volný vektor posuvné rychlosti $\vec{V} = \Delta \vec{L} / \Delta T$
- klouzavý vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = \Delta \vec{\Phi} / \Delta T$; klouže po ose O .

Nejobecnější *pohyb* vytvoříme posloupností takových přemístění postupně po sobě probíhajících v čase – asi jako kinofilm z jednotlivých snímků. S časem T se pak mohou obecně měnit¹ obě rychlosti $\vec{V}(T)$, $\vec{\Omega}(T)$ co do velikosti i co do směru (osa $O(T)$).

V duchu naší úmluvy značíme okamžitou osu kinematického šroubu písmenem O v soustavě \mathcal{S} , ale o v soustavě \mathcal{N} . Z hlediska \mathcal{S} se soustava \mathcal{N} otáčí kolem osy O úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}(t)$.

Z hlediska \mathcal{N} se naopak otáčí \mathcal{S} , a to úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(T) = -\vec{\Omega}(T)$. Toho však nebudeme používat – v duchu kap. 6.1.5.

Dokažme, že nejobecnější přemístění tuhého tělesa lze popsat kinematickým šroubem.

Vyděme z představy 3 bodů \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} neležících na přímce a určujících polohu tuhého tělesa (vztažné soustavy \mathcal{S}); po přemístění budou mít polohy \mathbf{A}' , \mathbf{B}' , \mathbf{C}' (vztažná soustava \mathcal{S}'). Je zřejmé pět možností vzájemných poloh odpovídajících si bodů (po event. přejmenování):

- Všechny body \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} zůstaly na svém místě, tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$ atd. Pak se zřejmě těleso nepohnulo, kinematický šroub je nulový ($l = 0$, $\varphi = 0$).
- Body \mathbf{A} , \mathbf{B} zůstaly na svém místě, bod \mathbf{C} nikoli. Pak byl posuv nulový ($l = 0$) a došlo k otočení kolem osy $\mathbf{o}=\mathbf{AB}$; úhel φ je dán otočením bodu \mathbf{C} .
- Body \mathbf{A} zůstal na svém místě, body \mathbf{B} , \mathbf{C} nikoli. Pak byl posuv nulový ($l = 0$) a došlo k otočení kolem bodu \mathbf{A} ; v kap. 7.3.3 dokážeme, že ho lze převést na otočení kolem jisté osy \mathbf{o} procházející bodem \mathbf{A} .
- Žádný z bodů nezůstal na svém místě a všechny tři se posunuly o týž vektor \vec{l} ; v tom případě jde o posuv celého tělesa o \vec{l} bez otočení ($\varphi = 0$).
- Žádný z bodů nezůstal na svém místě a bod \mathbf{A} posunul o jiný vektor než \mathbf{B} ; pokračujeme dalším textem.

Přejdeme nyní od tří bodů k celé soustavě \mathcal{S} . Který bod \mathbf{D} z ní se posunul nejméně ($l^D = \min$), a o jaký vektor \vec{l}^D ? Jsou zřejmě dvě možnosti:

- Existuje bod \mathbf{D} , který zůstal na svém místě, tj. $l^D = 0$. Pak jde o otočení kolem bodu \mathbf{D} a pokračujeme odstavcem kap. 7.3.3.

¹Mohou se měnit nespojitě i při spojitém pohybu; polohu totiž získáváme integrací rychlostí.

- Existuje bod \mathbf{D} , který se posunul o vektor $\vec{l}^{\mathcal{D}} \neq \vec{0}$ do bodu \mathbf{D}' a žádný jiný bod se neposunul o menší vzdálenost l . Pokračujeme dalším textem.

Tvrdíme, že nejen bod \mathbf{D} , ale všechny body přímky $\mathbf{o}=\mathbf{DD}'$ (osy šroubu) se posunuly o tentýž vektor $\vec{l}^{\mathcal{D}}$. Tím odpadne možnost, že by minimální posun l nastal pro dva různé směry.

Uvažme libovolný bod \mathbf{E} uvnitř úsečky \mathbf{DD}' . Musí si zachovat svou vzdálenost od \mathbf{D} (tedy $|D'E'| = |DE|$), takže bod \mathbf{E}' leží na povrchu koule s poloměrem $|DE|$ a se středem v \mathbf{D}' . Přitom však bod \mathbf{E}' nemůže být bodu \mathbf{E} blíže než $|\vec{l}^{\mathcal{D}}|$, což byl minimální posun. Leží tedy na povrchu nebo vně koule s poloměrem $|\vec{l}^{\mathcal{D}}|$ a se středem v \mathbf{E} . Obě koule se však dotýkají v jediném bodě, a to na přímce \mathbf{DD}' . To je tedy také jediná možnost, kam se bod \mathbf{E} mohl přemístit: o stejný vektor posunutí $|\vec{l}^{\mathcal{D}}|$ jako \mathbf{D} .

Uvažme konečně obecný bod \mathbf{F} mimo osu $\mathbf{o}=\mathbf{DD}'$. Bod \mathbf{F} si po přemístění musí zachovat svou vzdálenost od bodů \mathbf{D} , \mathbf{E} na ose \mathbf{o} , tj. bod \mathbf{F}' leží na kružnici se středem na ose \mathbf{o} , která je průnikem dvou koulí s poloměry $|DF|$, resp. $|EF|$ a se středy \mathbf{D}' , resp. \mathbf{E}' . Na ní zjistíme úhel otočení φ .

Tři body \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{F} určují jednoznačně polohu celého tuhého tělesa; vyšetřili jsem tím tedy nejobecnější přemístění tuhého tělesa.

7.3.3 Ekvivalence rotace kolem bodu a kolem osy

Věta d'Alembertova tvrdí, že nejobecnější otočení tuhého tělesa kolem pevného bodu $\mathbf{O}=\mathbf{O}'$ je ekvivalentní jistému otočení kolem jisté osy \mathbf{o} (procházející bodem \mathbf{O}). Tuto větu nyní dokážeme.

Konstruktivní důkaz Zvolme v \mathcal{S} bod \mathbf{A} v jednotkové vzdálenosti od \mathbf{O} a provedme otočení $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}'$. Jsou zřejmě dvě možnosti:

- $\mathbf{A}=\mathbf{A}'$. V tom případě jde o otáčení kolem osy \mathbf{OA} .
- $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}'$. V tom případě lze přemístění \mathbf{A} do \mathbf{A}' provést otočením kolem libovolné osy procházející bodem \mathbf{O} a ležící v rovině symetrie $\rho_{AA'}$ úsečky \mathbf{AA}' . Pokračujeme dalším textem.

Zvolme v \mathcal{S} bod \mathbf{B} na rovině $\rho_{AA'}$ v jednotkové vzdálenosti od \mathbf{O} . Jsou zřejmě opět dvě možnosti:

- $\mathbf{B}=\mathbf{B}'$. V tom případě jde o otáčení kolem osy \mathbf{OB} .
- $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$. V tom případě lze přemístění \mathbf{B} do \mathbf{B}' provést otočením kolem libovolné osy procházející bodem \mathbf{O} a ležící v rovině symetrie $\rho_{BB'}$ úsečky \mathbf{BB}' . Průsečnice rovin $\rho_{AA'}$ a $\rho_{BB'}$ pak určuje osu \mathbf{o} takovou, že otočením kolem ní přejdou body \mathbf{O} , \mathbf{A} , \mathbf{B} v body $\mathbf{O}'=\mathbf{O}$, \mathbf{A}' , \mathbf{B}' .

Existenční důkaz Každé otočení z původní polohy X do polohy X' kolem počátku je v kartézských souřadnicích popsáno transformací $X' = \mathbf{A}X$, kde \mathbf{A} je ortogonální matice, tj. $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Stačí ukázat, že existuje invariantní směr, tedy taková poloha X , která se transformací zachovává: $X' = \mathbf{A}X = X$.

Z algebry je známo, že homogenní rovnice $\mathbf{A}X = X$ má netriviální řešení tehdy, když je nulový determinant $\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\|$, kde \mathbf{E} je jednotková matice. Matice \mathbf{A} je ortogonální, takže

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| &= \|\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T)\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{E} - \mathbf{A}^T\| = \\ &= 1 \cdot \|(\mathbf{E} - \mathbf{A})^T\| = -\|(\mathbf{A} - \mathbf{E})^T\| = -\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\|, \end{aligned}$$

takže nutně $\|\mathbf{A} - \mathbf{E}\| = 0$.

Determinant je tedy nulový, a proto homogenní rovnice $\mathbf{A}X = X$ má netriviální řešení X udávající osu rotace \mathbf{o} ekvivalentní uvažovanému otočení z původní polohy X do polohy X' kolem počátku.

7.4 Dynamika TT: skládání sil, silová dvojice

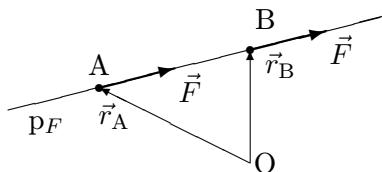
7.4.1 Klouzavý vektor

Zatím jsme brali jako fakt, že dva body **A**, **B** tuhého tělesa zachovávají stále stejnou vzdálenost; je to jednoduchý případ *vazby* $\{constrain\}$, tedy omezení pohybu kladené na mechanickou soustavu; vazba se probírá podrobně v analytické mechanice. Vektorová mechanika vycházející z Newtonových pohybových rovnic nemá prostředek, jak přímo pracovat s vazbou; zná však pojem síly. Nahradíme proto vazbu *vazbovou silou*, která bude působit mezi body **A**, **B** a bude vždy právě tak velká, aby kompenzovala všechny možné ostatní síly, které by mohly vzdálenost těchto bodů změnit.

Uvažme tyto okolnosti pro vazbové síly:

- vazbové síly \vec{F}^{BA} (působící od tělesa **A** na **B**) a \vec{F}^{AB} (působící od tělesa **B** na **A**) musejí splňovat zákon akce a reakce, tedy $\vec{F}^{BA} = -\vec{F}^{AB}$;
- mají-li vazbové síly pouze zabránit změně vzdáleností obou bodů **A**, **B**, musejí být centrální, tj. musejí mít směry podél relativního polohového vektoru \vec{R}^{AB} , aby podle okolností tiskly body **A**, **B** k sobě či od sebe.

Z toho ovšem plyne, že k síle \vec{F}^A působící na tuhé těleso v libovolném bodě můžeme kdykoli přičíst dvojici dalších (vazbových) sil podél vektorové přímky tohoto vektoru; první z nich \vec{F}^{BA} se právě vyruší s působící silou \vec{F}^A a druhá \vec{F}^{AB} představuje sílu, která by vznikla přesunutím původní síly \vec{F}^A do jiného bodu **B** ležícího na vektorové přímce \vec{F}^A . Touto úvahou docházíme k pojmu *klouzavého vektoru* \vec{F}^A , tedy vlastně třídy navzájem ekvivalentních vektorů (v praxi uvažujeme vhodně zvoleného reprezentanta této třídy), odpovídajících témuž volnému vektoru \vec{F} a s působištěm umístěným libovolně (vhodně) na vektorové přímce, tj. na přímce procházející bodem **A** a mající směr vektoru \vec{F} . Srv. str. 25.



7.4.2 Skládání dvou klouzavých vektorů. Silová dvojice

Základní operace s klouzavými vektory (jejich skládání a vznik silové dvojice) jste poznali na střední škole. Víte, že skládáním klouzavých vektorů můžeme dostat buď opět klouzavý vektor, nebo volný vektor zcela jiného typu, tzv. silovou dvojici. Zopakujeme a doplníme nyní skládání vektorů; v závěru uvedeme jinou, univerzální cestu.

Při skládání dvou klouzavých vektorů \vec{F}^A , \vec{G}^B mohou nastat tyto situace:

1. Vektory jsou různoběžné (tj. jejich neorientované směry jsou různé a vektory leží v téže rovině – volné vektory \vec{F} , \vec{G} , $\vec{r}^B - \vec{r}^A$ jsou komplanární);
2. Vektory jsou rovnoběžné, přičemž pro volné vektory platí $\vec{F} \neq -\vec{G}$;
3. Vektory jsou rovnoběžné, přičemž pro volné vektory platí $\vec{F} = -\vec{G}$; tento případ se nazývá *silová dvojice*;
4. Vektory jsou mimoběžné (tj. neleží v téže rovině; to se na SŠ nejspíš nebralo).

Rozeberme tyto případy podrobněji:

1. Různoběžné vektory \vec{F}^A , \vec{G}^B

Různoběžné vektory můžeme posunout až do průsečíku jejich vektorových přímek. Tam je sečteme jako vázané vektory s tímž působištěm. Nakonec můžeme výsledek posunout podél jeho vektorové přímky do oblasti, která nás zajímá.

Praktická komplikace nastává při rýsování, protínají-li se vektorové přímky mimo papír. Existují ovšem obratné konstrukce, jak si počít i v tomto případě; protože my pravděpodobně nebudeme tento případ muset řešit, spokojíme se s univerzálním řešením uvedeným později.

2. **Rovnoběžné vektory \vec{F}^A, \vec{G}^B , kde $\vec{F} \neq -\vec{G}$**

K vektorům doplníme dvojici stejně velkých a opačných sil $\pm \vec{H}$ podél spojnice bodů **A**, **B**. Přičteme-li tyto síly k původním, dostaneme dvojici sil, které jsou různoběžné, čímž jsme úlohu převedli na předchozí případ.

3. **Silová dvojice: nesouhlasně rovnoběžné vektory \vec{F}^A, \vec{G}^B , kde $\vec{F} = -\vec{G}$**

Tento případ nelze redukovat na jeden klouzavý vektor předchozí metodou, protože i po přičtení pomocné dvojice sil $\pm \vec{H}$ vznikne táž situace s nesouhlasně rovnoběžnými vektory téže velikosti. Této soustavě říkáme silová dvojice a přisoudíme jí volný vektor zvaný moment dvojice $\vec{M} = \vec{r}^{AB} \times \vec{F}^A$, kde \vec{r}^{AB} je relativní polohový vektor od bodu **B** k bodu **A**. Značíme-li ρ rovinu určenou vektory \vec{F}^A, \vec{G}^B , pak \vec{M} je k rovině ρ kolmý.

Ověřte si, že silová dvojice má opravdu charakter volného vektoru. Mějme v rovině ρ nenulovou silovou dvojici $\vec{F}^A, -\vec{F}^B$. Pak lze vytvořit ekvivalentní silovou dvojici $\vec{G}^C, -\vec{G}^D$ pro bod **C** zadaný kdekoli v prostoru a nenulový vektor \vec{G} zadaný libovolně v rovině ρ' rovnoběžné s rovinou ρ . Bod **D** leží v rovině ρ' a je tím již určen jednoznačně až na posunutí ve směru \vec{F} (bez ohledu na orientaci).

¶ Rozlišujeme termín *silová dvojice* (výše definovaná) a sousloví *dvojice sil* (dvě síly libovolně zvolené, stejně jako trojice sil, čtveřice sil, obecně n -tice sil).

4. **Mimoběžné vektory \vec{F}^A, \vec{G}^B**

Tuto kombinaci nemůžeme uvedenou cestou zjednodušit. Můžeme ji však převést na některý z tvarů

- klouzavý vektor s libovolně předem zadaným umístěním + silová dvojice;
- dva klouzavé vektory, jeden z nich s libovolně předem zadaným umístěním;
- dynamický šroub* (klouzavý vektor + silová dvojice s momentem v tomtéž směru, jaký má klouzavý vektor).

Konkrétní převedení na dynamický šroub popíšeme v dalším odstavci, a to zcela obecně, pro libovolný počet klouzavých vektorů i silových dvojic. Převod mezi dynamickým šroubem a ostatními dvěma uvedenými kombinacemi jistě zvládne čtenář samostatně.

7.4.3 Skládání libovolného počtu klouzavých vektorů a silových dvojic

Uvažujme soustavu N_1 klouzavých vektorů a N_2 silových dvojic. Složíme ji na *jediný dynamický šroub* následujícím postupem:

- Zvolíme libovolný bod **O**.
- Klouzavý vektor \vec{F}^A přesuneme rovnoběžně do bodu **O** tím, že pro něj doplníme do bodu **O** jednak sílu $\vec{G}^O = \vec{F}^O$, jednak sílu přesně opačnou: $\vec{H}^O = -\vec{F}^O$. Síly \vec{G}, \vec{H} mají totéž působíště, lze je tedy sečíst, a vyjde nulový vektor; jeho doplněním jsme jistě soustavu tvořenou jediným klouzavým vektorem \vec{F}^A nezměnili.
- Nyní však interpretujeme sílu \vec{G}^O jako „přesunutou“ sílu \vec{F}^O , a dvojici \vec{F}^O, \vec{H}^O jako dvojici sil popsanou volným vektorem – jejím momentem \vec{M} .
- Tím je klouzavý vektor v bodě **A** nahrazen klouzavým vektorem v bodě **O** a silovou dvojicí \vec{F}^O, \vec{H}^O .
- Toto učiníme pro všech N_1 klouzavých vektorů v různých bodech prostoru. Tím dostáváme soustavu N_1 klouzavých vektorů umístěných v bodě **O** a $N_1 + N_2$ silových dvojic (ty jsou, jak víme, popsány volným vektorem svého momentu).

6. Sečteme všech N_1 klouzavých vektorů. Výsledkem je jediný klouzavý vektor v \mathbf{O} .
7. Sečteme všech $N_1 + N_2$ momentů silových dvojic. Výsledkem je jediná silová dvojice s momentem \vec{M} (volný vektor).
8. Nyní je celá soustava převedena na jediný klouzavý vektor \vec{G}^O a jedinou silovou dvojici s momentem \vec{M} .
9. Převod na dynamický šroub: Moment \vec{M} silové dvojice rozdělíme na složku \vec{M}_{\parallel} rovnoběžnou s \vec{G} a na složku \vec{M}_{\perp} kolmou k \vec{G} .
10. Složku \vec{M}_{\perp} sečteme s klouzavým vektorem \vec{G}^O ; vektor se tím rovnoběžně posune jinak, pryč z bodu \mathbf{O} . Zbývá tedy tento posunutý klouzavý vektor, a k němu dvojice \vec{G} s momentem stejného směru, jaký má onen posunutý klouzavý vektor — vytvořili jsme tedy dynamický šroub.
11. Převod na dva klouzavé vektory: vytvoříme dvě síly \vec{H}_1, \vec{H}_2 odpovídající výsledné silové dvojici tak, aby \vec{H}_1 měla působíště v bodě \mathbf{O} . Tu sečteme s výsledným vektorem \vec{G}^O a dostaneme tak první klouzavý vektor; má umístění v bodě \mathbf{O} . Druhým klouzavým vektorem je \vec{H}_2 , „zbylý“ ze silové dvojice.

Závěrem lze shrnout:

Libovolnou soustavu klouzavých sil a silových dvojic lze převést na dynamický šroub.

7.5 Dynamika tuhého tělesa

Nahlížejme na tuhé těleso jako na soustavu N částic s vazbami zaručujícími tuhost tělesa; tyto vazby newtonovsky nahradíme vnitřními silami, kde \vec{f}^{AB} značí sílu působící od bodu B na bod A. Tato síla má působíště v bodu A s polohovým vektorem \vec{r}_A a vektorovou přímkou AB; bude podle okolností (tlak či tah na těleso) odpudivá či přitažlivá, ale vždy centrální vůči bodům A, B, tedy

$$\vec{f}^{AB} \parallel \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad , \quad \text{neboli} \quad \vec{f}^{AB} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{0} \quad (7.10)$$

Celková hmotnost M tělesa je prostý součet všech dílčích hmotností:

$$M = \sum_n m_n \quad . \quad (7.11)$$

Hmotný střed má souřadnice dané váženým polohovým vektorem s vahou m_n , tj.

$$\vec{R} = \frac{\sum_n m_n \vec{r}_n}{\sum_n m_n} \quad (7.12)$$

Odtud lze zavést rychlost \vec{V} a zrychlení \vec{A} těžiště, a dále hybnost \vec{P} tělesa:

$$\vec{V} = \frac{dR}{dt} = \dot{\vec{R}} = \frac{\sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n}{\sum_n m_n} \quad (7.13)$$

$$\vec{A} = \frac{dV}{dt} = \ddot{\vec{R}} = \frac{\sum_n m_n \ddot{\vec{r}}_n}{\sum_n m_n} \quad (7.14)$$

$$\vec{P} = M\vec{V} = \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n = \sum_n \vec{p}_n \quad (7.15)$$

Výsledná síla \vec{F} působící na celé těleso je dána jen silami *vnějšími*. Obecně na j -tou částici X_j působí jednak vnější síla $\vec{f}^j \text{ ext}$, jednak vnitřní síla $\vec{f}^j \text{ int} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^N \vec{f}^{jn}$ od všech ostatních částic X_n . Sečteme-li však všechny vnitřní síly $\vec{f}^j \text{ int}$, dostaneme sílu nulovou, protože podle 3NZ (zákon akce a reakce) ke každé síle – akci \vec{f}^{jn} existuje právě jedna síla – reakce \vec{f}^{nj} , a platí pro ni $\vec{f}^{jn} = -\vec{f}^{nj}$.

To je také asi jediný případ, kdy dává smysl počítat spolu síly jsoucí ve vztahu akce a reakce. Působí samozřejmě na různé částice, ale my všechny částice bereme jako součásti jediného objektu.

Při výpočtu výsledné síly působící na tuhé těleso stačí uvažovat jen síly vnější.

Sečteme-li všechny pohybové rovnice $m_n \vec{a}_n = \vec{f}_n$ přes všechny částice, dostaneme

$$M \vec{A} = \frac{dP}{dt} = \sum \vec{F} \quad (7.16)$$

zvanou **věta o hybnosti** (dříve též zvaná 1. věta impulzová):

$$\text{Časová změna hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších sil: } \frac{dP}{dt} = \sum \vec{F}^{\text{ex}}$$

Výsledný moment \vec{M} **sil** má jen nepatrně složitější odvození. U vnitřních sil je totiž nutno uvážit, že dílčí síly mezi částicemi navzájem mají sice automaticky součet nulový, ale při výpočtu momentu je nutno zohlednit, že mají různá působišť. Přesto se „vnitřní momenty“ navzájem vyruší díky rov. (7.10):

$$\vec{r}_A \times \vec{f}^{\text{AX}} + \vec{r}_X \times \vec{f}^{\text{XA}} = \vec{r}_A \times \vec{f}^{\text{AX}} - \vec{r}_X \times \vec{f}^{\text{AX}} = (\vec{r}_A - \vec{r}_X) \times \vec{f}^{\text{AX}} = \vec{0} \quad (7.17)$$

I při výpočtu výsledného momentu síly u tuhého tělesa stačí uvažovat jen síly vnější.

Jak jsme ukázali dříve, součet libovolné soustavy vnějších sil a momentů sil je ekvivalentní jednomu dynamickému šroubu.

7.6 Rovnováha tuhého tělesa

Tuhé těleso se nachází v rovnováze, jsou-li na něj působící výsledná síla i výsledný moment sil oba nulové.

7.7 Rotace kolem pevné osy

Těleso rotující kolem osy o pevné vůči tělesu i vůči laboratoři má jeden stupeň volnosti; jeho polohu lze jednoznačně popsat např. jedním úhlem φ . Tento úhel je (konvenčně) též pro všechny body tělesa. Po dalším otočení tělesa kolem osy o o úhel otočení $\Delta\varphi$ je tento úhel otočení pro kterýkoli bod tělesa stejný (dráha posunutí je obecně různá, roste se vzdáleností od osy). Proto také při otáčení kolem osy má každý bod tělesa tutéž úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ o velikosti

$$\omega := \frac{d\varphi}{dt} \quad (7.18)$$

směr $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}/\omega$ klademe pravotočivě do osy otáčení (prsty pravé ruky jsou ve směru otáčení, palec má směr vektoru úhlové rychlosti). **Posuvná rychlost** \vec{v} bodu B při otáčení je rovna

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp \quad (7.19)$$

$$v = \omega r_\perp \quad (7.20)$$

$$\vec{r}_\perp := \vec{r} - \vec{\omega}_0(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{r}) \quad , \quad \vec{r}_\perp \perp \vec{\omega} \quad (7.21)$$

kde \vec{r} je polohový vektor bodu B, zatímco \vec{r}_\perp je „polohový“ vektor vedoucí však nikoli z počátku soustavy souřadnic, ale z osy o rotace a kolmý na ni.

Moment hybnosti \vec{B} tělesa vůči ose o je součet všech dílčích momentů hybnosti vůči ose o .

$$\vec{B} = \sum_n \vec{b}_n = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n \quad (7.22)$$

Podle rov. (7.19) lze tento výraz dále upravit

$$\vec{B} = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \quad (7.23)$$

$$= \vec{\omega} \sum_n m_n r_{\perp n}^2 = I \vec{\omega} \quad (7.24)$$

Moment setrvačnosti I vůči ose o je skalár zavedený vztahem

$$I = \sum_n m_n r_{\perp n}^2 \quad , \quad (7.25)$$

kde $r_{\perp n}$ je kolmá vzdálenost n -tého bodu od osy o rotace. (O něco dále zavedeme i tenzor setrvačnosti.) Moment setrvačnosti I závisí na volbě počátku souřadnic; minimální hodnotu I_T má při volbě počátku souřadnic v hmotném středu (těžišti) tělesa.

Steinerova věta:

$$I' = I_T + Mh^2 \quad (7.26)$$

kde h je vzdálenost osy o' rotace od hmotného středu T tělesa.

Důkaz: Zvolme počátek souřadnic v hmotném středu tělesa a orientujme osu z ve směru osy o rotace, osu x orientujme směrem ke „konkurenční“ ose o' rotace. Pak

$$I_T = \sum_n m_n r_n^2 = \sum_n m_n (x_n^2 + y_n^2) \quad (7.27)$$

$$I' = \sum_n m_n ((x_n - h)^2 + y_n^2) \quad (7.28)$$

$$= \sum_n m_n ((x_n^2 + y_n^2) - 2hx_n + h^2) \quad (7.29)$$

$$= I_T - 2h \sum_n m_n x_n + h^2 \sum_n m_n = I_T + Mh^2 \quad (7.30)$$

záporný člen je roven nule podle definice hmotného středu a naší volby počátku souřadnic v něm.

Kinetická energie E_k tělesa je součet dílčích kinetických energií a lze ji vyjádřit jako

$$E_k = \sum_n \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n m_n r_{\perp n}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (7.31)$$

Věta o momentu hybnosti (dříve též zvaná 2. impulzová věta):

Časová změna momentu hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších momentů sil: $\frac{d\vec{B}}{dt} = \sum \vec{M}^{\text{ex}}$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \sum \vec{M}^{\text{ex}} \quad , \quad (7.32)$$

na pravé straně je úhrnný moment všech vnějších sil působících na těleso. Pro rotaci kolem pevné osy se její tvar zjednoduší na

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = \sum \vec{M}^{\text{ex}} \quad , \quad (7.33)$$

7.8 Tenzor setrvačnosti, Eulerovy rovnice

7.8.1 Tenzor setrvačnosti

Momentem setrvačnosti a celkovou hmotností jsme plně popsali těleso rotující kolem osy o , která nemění svou polohu ani vůči tělesu, ani vůči laboratoři. Steinerova věta nám umožňuje omezit se na osy procházející hmotným středem tělesa. Uvítali bychom však charakteristiku tělesa obecnější, vhodnou pro rotaci kolem osy libovolného směru. Vyjdeme proto z obecně platného vztahu

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n \quad (7.34)$$

platné obecně pro n -tý hmotný bod v soustavě tvořící těleso. Víme již z rov. (7.23), že moment hybnosti \vec{B} je lineárně úměrný úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ tělesa, jejich vektory však mohou mít různé směry. Závislost obou veličin vyjadřují tenzory setrvačnosti – tenzory druhého řádu I_{jk} (v inerciální laboratorní soustavě) a J_{jk} (v neinerciální soustavě spojené s tělesem).

V **laboratorní** soustavě jsme odvodili a dále upravíme následující vztahy:

$$\vec{B} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \sum_n \vec{r}_n \times m_n \vec{v}_n = \sum_n m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \quad (7.35)$$

$$= \sum_n m_n (\vec{\omega}(\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - \vec{r}_n(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)) \quad (7.36)$$

Nyní chvilku nebudeme psát index n číslicující částice; měl by být u všech proměnných m a složek \vec{r} , nikoli však u úhlové rychlosti $\vec{\omega}$, která je všem částicím společná. Takto zjednodušený zápis ve složkové symbolice bude znít

$$B_j = \sum_{klpq} \varepsilon_{jkl} x_k \varepsilon_{lpq} m \omega_p x_q \quad (7.37)$$

$$= m \sum_{klpq} \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lpq} x_k \omega_p x_q \quad (7.38)$$

$$= m \sum_{klpq} (\delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}) x_k \omega_p x_q \quad (7.39)$$

$$= m \omega_j \sum_k x_k x_k - m x_j \sum_k \omega_k x_k \quad (7.40)$$

$$= \sum_r \omega_r I_{jr} \quad (7.41)$$

kde tenzor I_{jr} má složky (a tady si u m , x představte index n , první suma \sum_n přes něj sčítá)

$$I_{11} = \sum_n m(x_2^2 + x_3^2) \quad ; \quad I_{23} = I_{32} = - \sum_n m x_2 x_3 \quad (7.42)$$

$$I_{22} = \sum_n m(x_3^2 + x_1^2) \quad ; \quad I_{31} = I_{13} = - \sum_n m x_3 x_1 \quad (7.43)$$

$$I_{33} = \sum_n m(x_1^2 + x_2^2) \quad ; \quad I_{12} = I_{21} = - \sum_n m x_1 x_2 \quad (7.44)$$

Tím bychom dostali pohybovou rovnici tuhého tělesa v inerciální – laboratorní – soustavě ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \sum_j \omega_j I_{jk} = M_j \quad (7.45)$$

Bohužel, tato rovnice není použitelná.

Bereme-li totiž opravdu veličiny v laboratorní soustavě, pak díky otáčení tělesa ukazuje polohový vektor \vec{r} pokaždé na jinou částici, s jiným n ; ta má jinou hmotnost m_n a tedy dává i jiný tenzor I_{jk} . Zjistit v čase $t > t_0$, která částice právě leží v bodě \vec{r} (resp. zda tam zrovna vůbec nějaká část zkoumaného tělesa je!) vyžaduje ovšem vyřešit pohybovou rovnici dříve, nežli ji začneme řešit.

Náprava je v tom, že budeme uvažovat rov. (7.45) v (neinerciální) soustavě spojené s tělesem. Tam bude ovšem polohový vektor $\vec{\xi} = \vec{r}$ mít jiné složky ξ_j , ale zato se nebudou měnit částice tvořící těleso („podbíhat pod rukama“). Časová derivace bude o něco složitější, protože jsme v neinerciální soustavě: přibude násobení úhlovou rychlostí $\vec{\omega} \times \dots$

Provedeme proto analogické úpravy znova, jen v jiné vztažené soustavě, a proto s jinými složkami:

- β_i budou složky momentu hybnosti \vec{B} ,
- ξ_i složky polohového vektoru \vec{r} ,
- Ω_i složky úhlové rychlosti $\vec{\omega}$,
- J_{jk} složky *tenzoru momentu setrvačnosti* (obvykle jen „*tenzor setrvačnosti*“) $\overline{\overline{J}}$.

Odvozování bude úplně stejné; jeho výsledek bude tedy

$$\beta_j = m \Omega_j \sum_k \xi_k \xi_k - m \xi_j \sum_k \Omega_k \xi_k \quad , \text{ tedy} \quad (7.46)$$

$$\beta_1 = \Omega_1 \sum_n m(\xi_2^2 + \xi_3^2) - \Omega_2 \sum_n m \xi_1 \xi_2 - \Omega_3 \sum_n m \xi_1 \xi_3 \quad (7.47)$$

$$\beta_2 = \Omega_2 \sum_n m(\xi_3^2 + \xi_1^2) - \Omega_3 \sum_n m \xi_2 \xi_3 - \Omega_1 \sum_n m \xi_2 \xi_1 \quad (7.48)$$

$$\beta_3 = \Omega_3 \sum_n m(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \Omega_1 \sum_n m \xi_3 \xi_1 - \Omega_2 \sum_n m \xi_3 \xi_2 \quad (7.49)$$

$$J_{11} = \sum_n m(\xi_2^2 + \xi_3^2) \quad ; \quad J_{23} = J_{32} = - \sum_n m \xi_2 \xi_3 \quad (7.50)$$

$$J_{22} = \sum_n m(\xi_3^2 + \xi_1^2) \quad ; \quad J_{31} = J_{13} = - \sum_n m \xi_3 \xi_1 \quad (7.51)$$

$$J_{33} = \sum_n m(\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad ; \quad J_{12} = J_{21} = - \sum_n m \xi_1 \xi_2 \quad (7.52)$$

(sčítací index n přes částice si jistě rádi domyslíte u všech m a ξ , nikoli u Ω).

Složky tenzoru momentu setrvačnosti J_{jk} mají své specifické názvy:

momenty setrvačnosti vůči osám jsou diagonální složky, tj. J_{11} , J_{22} , J_{33} . Každá odpovídá momentu známému z rotace kolem pevné osy x , resp. y , resp. z . (Činka ležící v ose x souměrně kolem počátku má malý J_{11} a velké J_{22} , J_{33} .)

deviační složky mají smíšené indexy: J_{12} , J_{21} , J_{23} , J_{32} , J_{31} , J_{13} . Vyvolají namáhání osy, kolem těleso rotuje, kroucením. (Činka ležící v rovině xy souměrně kolem počátku a svírající přitom úhel 45° s osou x ; představte si, jak je namáhána osa x či y , má-li činka rotovat kolem ní.)

7.8.2 Eulerovy rovnice

Odvození Jak jsme už uvedli, soustava spojená s tělesem je obecně neinerciální; složky ξ_j polohového vektoru v ní však zůstávají pevné a lze tedy konstruktivně vyčíslit tenzor setrvačnosti J_{jk} . Pohybová rovnice typu rov. (7.32) nebude tak jednoduchá jako rov. (7.45), ale zato bude použitelná. Jak víme z mechaniky v neinerciálních soustavách (rov. (6.16)), časovou derivaci musíme doplnit vektorovým součinem s úhlovou rychlostí: při otáčení je časová změna $\left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}}$ každého vektoru \vec{B} (ať už polohy, rychlosti či síly), měřená v neinerciální soustavě, dána jednak jeho časovou změnou $\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}}$ měřenou v inerciální soustavě, jednak úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$ neinerciální soustavy \mathcal{N} vůči inerciální \mathcal{S} , a to vztahem

$$\left. \frac{d\vec{B}}{dt} \right|_{\mathcal{S}} = \left. \frac{d\vec{b}}{dt} \right|_{\mathcal{N}} + \vec{\Omega} \times \vec{B} \quad . \quad (7.53)$$

Pohybová rovnice rov. (7.32) tedy nabude tvar

$$\frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{b} = \vec{\mu} \quad , \quad (7.54)$$

značíme-li μ_i složky výsledného silového momentu v neinerciální soustavě spjaté s tělesem. Rozepsáno do složek,

$$\frac{d\beta_1}{dt} + \Omega_2\beta_3 - \Omega_3\beta_2 = \mu_1 \quad , \quad (7.55)$$

$$\frac{d\beta_2}{dt} + \Omega_3\beta_1 - \Omega_1\beta_3 = \mu_2 \quad , \quad (7.56)$$

$$\frac{d\beta_3}{dt} + \Omega_1\beta_2 - \Omega_2\beta_1 = \mu_3 \quad , \text{ resp. po dosazení } \beta_j = \sum_k \Omega_k J_{jk} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} J_{11} \frac{d\Omega_1}{dt} + J_{12} \frac{d\Omega_2}{dt} + J_{13} \frac{d\Omega_3}{dt} &+ \Omega_2\Omega_1 J_{31} + \Omega_2\Omega_2 J_{32} + \Omega_2\Omega_3 J_{33} \\ &- \Omega_3\Omega_1 J_{21} - \Omega_3\Omega_2 J_{22} - \Omega_3\Omega_3 J_{23} = \mu_1 \quad . \end{aligned} \quad (7.58)$$

Tři rovnice vzniklé z rov. (7.58) cyklickou záměnou indexů se nazývají **Eulerovy rovnice**.

Kapitola 8

Základy teorie relativity

2014-06-05

8.1 Motivace

Základy teorie relativity jsou zde vysvětleny pro současného čtenáře běžně používajícího techniky s přesností před sto lety nepředstavitelnou. Proto neklademe příliš důraz na rozbor historických (byť geniálně vymyšlených!) postupů a např. namísto detailního rozboru Michelsonova-Morleyova interferometru prostě konstatujeme výsledek: naměřená rychlost světla nezávisí na směru letu světla, ani na rychlosti jeho zdroje, a tím protivořečí teorému skládání rychlostí.

8.1.1 Co je a co není teorie relativity

Speciální teorie relativity (STR) se zabývá inerciálními vztažnými soustavami. Mění velmi podstatně naše pojmání *prostoru a času*. Zejména v oblasti velmi vysokých rychlostí (srovnatelných se světelnou rychlostí) se totiž při měření ukazuje, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy, ale souvisejí spolu natolik úzce, že je výstižnější pojímat je spolu jako nový pojem *prostorčas* a studovat jeho vlastnosti. STR tuto souvislost vystihuje a popisuje. Přejít od jedné inerciální vztažné soustavy ke druhé podle STR již není dán Galileiho transformací, ale transformací Lorentzovou; ta je symetričtější v souřadnicích (časové a prostorových) než Galileiho.

STR spojuje *setrvačnou hmotnost s energií* známým vztahem $E = mc^2$. Gravitační hmotností a gravitačním zákonem se však zabývá až obecná teorie relativity (OTR), nikoli STR.

Ostatní představy klasické mechaniky (např. částice, pole, síla) však zůstávají v STR v platnosti, dokonce i v tom smyslu, že při opatrné formulaci platí i nadále všechny tři pohybové zákony Newtonovy, tedy základ klasické mechaniky, používáme-li během práce pouze jedinou vztažnou soustavu. Např. 2. Newtonův zákon (zákon síly) platí ve znění „V inerciální soustavě je časová změna hybnosti hmotného bodu rovna výsledné síle na něj působící“.

STR je plně kompatibilní (slučitelná) s teorií elektromagnetického pole. Transformační vlastnosti tohoto pole (Lorentzova transformace) totiž vyhovují představě sjednoceného prostor času, nikoli však představě prostoru samostatného, na čase nezávislého (Galileiho transformace). Připomeňme, že teorie elektromagnetického pole *není* kompatibilní s klasickou nerelativistickou mechanikou, konkrétně s Galileiho transformací.

Obecná teorie relativity (OTR; General theory of relativity, GTR) se zabývá i neinerciálními vztažnými soustavami a popisuje gravitaci nikoli jako samostatnou fyzikální sílu, ale jako zakřivení prostor času. Zde se jí nezabýváme.

8.1.2 Důvod pro STR: nyní, začátkem 21. století

Na rozdíl od konce 19. století, kdy se začala problematika STR vynořovat spolu s měřením rychlosti světla, dnes není problém měřit doby vysoce přesně (cezirové hodiny v satelitech pro GPS mají přesnost $1 : 10^{15}$, tj. 1 sekunda za více než 31 milionů let). Měření ukazují, že ve dvou inerciálních soustavách rychle se vůči sobě pohybujících (např. posuvná rychlost Země při jejím oběhu kolem Slunce je cca 30 km/s, takže rychlost Země vůči sluneční soustavě na jaře a na podzim se liší o 60 km/s) se na konečnou vzdálenost zachovává nikoli současnost dvou událostí (tj. formálně nekonečně velká rychlost), ale jistá **konečná** rychlost — rychlost světla ve vakuu neboli **světelná rychlost**¹, cca 300 000 km/s. (Přesně je to $c_0 = 299\,792\,458$ m/s, protože tak je nyní definován metr.) Světlo má tedy touž rychlost c_0 v každé inerciální soustavě a Galileův způsob skládání rychlostí prostým součtem $v' = v - V$ nemůže platit přesně. Toto lze mít za experimentálně ověřené. Jak to změnil klasickou mechaniku? (Spěcháte-li, přeskočte následující odstavec 8.1.3.)

8.1.3 Důvod pro STR v době jejího vzniku: začátek 20. století

Výchozí situace: Klasická mechanika je už detailně rozpracována nejen ve formě vektorové (newtonovské), ale i ve svých vyšších partiích — v analytické mechanice, jako je Lagrangeův a Hamiltonův formalismus. Zůstává však stále Newtonova představa existence absolutního prostoru a absolutního času, v němž platí zcela přesně Newtonovy zákony; jemu se (pouze) přibližují vztažné soustavy námi realizované. Ovšem již Galileo Galiei (před Newtonem) věděl, že zákony mechaniky, platící např. ve vztažné soustavě spojené s klidným mořem (a se Zemí) mají stejný tvar i ve vztažné soustavě spojené s lodí, která se vůči moři pohybuje rovnoměrně přímočaře. Je tedy zřejmé, že *mechanickými* pokusy *nelze* zjistit, zda daná vztažná soustava je oním absolutním prostorem a časem, anebo se vůči němu pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Také **teorie elektromagnetického pole** je prakticky hotova. Na podkladě zejména Faradayových pokusů a jejich matematického zpracování Maxwellem se v ní podařilo sjednotit do té doby samostatné obory – elektřinu, magnetismus a optiku. Elektromagnetické pole bylo popisováno jako mechanický stav (vnitřní pnutí) ve speciálním vše prostupujícím prostředí - éteru. Např. elektrická indukce \vec{D} – displacement – popisovala podle těchto představ místní posunutí tohoto éteru pod vlivem příslušné síly – elektrické intenzity \vec{E} . Bylo by logické předpokládat, že éter je v klidu vůči absolutnímu prostoru.

Ukázalo se však, že rovnice popisující elektromagnetické pole (Maxwellovy rovnice) nejsou invariantní vůči Galileově transformaci. Plynou z nich totiž vlnové rovnice, které stanovují, že světelná rychlost má – rozumí se v absolutním prostoru a čase – jistou konkrétní hodnotu

$$c_0 = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (8.1)$$

Protože podle Galileiho transformace se rychlosti při přechodu mezi vztažnými soustavami sčítají, dává to možnost z „kandidátů na absolutní prostor“ vyloučit ty vztažné soustavy, v nichž by měla naměřená hodnota světelné rychlosti hodnotu jinou. Otázka nalezení soustavy, vůči níž je éter v klidu, se stala aktuální a principiálně řešitelná.

8.2 Klasické pojetí času a prostoru (připomenutí)

8.2.1 Vztažná soustava; synchronizace

Vztažnou soustavou \mathcal{S} , \mathcal{S}' nám bude kartézská soustava souřadnic vybavená *synchronizovanými hodinami* (tj. různé hodiny v různých místech stanoví pro dvě současné události týž časový údaj), a to soustava inerciální (platí v ní 1. Newtonův zákon). Soustavu \mathcal{S} spojíme s newtonovským absolutním prostorem a časem a budeme ji občas pro jednoduchost nazývat „stojící“, „klidná“ apod. Dále se budeme zabývat jinou soustavou \mathcal{S}' , která se vůči \mathcal{S} pohybuje rychlostí \vec{V} ; pro jednoduchost zpravidla obě soustavy orientujeme osami x ve směru pohybu. Směry y , z budou k tomuto směru kolmé a zpravidla se o ně nebudeme zajímat. (Tzv. *speciální transformace*.)

¹Užíváme stručný termín „světelná rychlost“ (luminal speed) pro „rychlost světla ve vakuu“ (speed of light in vacuum) podle nejnovější verze normy ISO/IEC 80000-6. Norma předepisuje značku c_0 a ponechává c pro rychlost světla i v jiném prostředí než ve vakuu. Protože zde se všude kromě kap. 8.6.4 zabýváme jedině rychlostí světla ve vakuu, budeme pro stručnost užívat jednodušší značku c namísto c_0 .

8.2.2 Událost

U důležité události zaznamenáváme *místo* a *čas*, kdy k ní došlo: v každém dotazníku např. zapisujeme den a místo svého narození. V následujících partiích bude termín *událost* zúžen právě jen na určení prostorového a časového údaje, tj. dvojice $\{\vec{r}; t\}$, kde a kdy dotyčný jev (výbuch supernovy, rozsvícení žárovničky, setkání dvou pohybujících se bodů) nastal.

Omezíme se na jevy, které lze dostatečně přesně lokalizovat prostorově i časově. Počátek vztažné soustavy $\{\vec{0}, 0\}$ je v tomto smyslu také „událost“: odsud začínáme měřit prostor i čas.

K plné informaci je ovšem potřeba zadat vztažnou soustavu, v níž polohu a okamžik určujeme: pasažér ve vlaku z Moskvy bude určovat události polohou vůči svému místu v rychlíku a časem vůči ČR o 2 hodiny posunutým. Údaje \vec{r}', t' vztažené k jiné soustavě S' odlišíme též čárkou u závorky: $\{\vec{r}'; t'\}'$, např. $\{\vec{0}, 0\}'$.

Odpověď k kap. 8.6.1: $\{3; 3\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\}$.

8.2.3 Synchronizace vztažných soustav

Při sledování dvou různých soustav S, S' se nám zjednoduší popis, budeme-li je **synchronizovat navzájem**: počátku $\{\vec{0}, 0\}$ soustavy S přiřadíme i počátek $\{\vec{0}, 0\}'$ soustavy S' .

Prakticky vzato: pokud počátku $\{\vec{0}, 0\}$ odpovídala v S' dříve hodnota $\{\vec{r}'_0, t'\}'$, pak tuto hodnotu odečteme od každého údaje v S' .

8.2.4 Současnost a soumítnost; relativní a absolutní

Řekneme, že dvě události A, B se souřadnicemi $\{\vec{r}_A; t_A\}$ a $\{\vec{r}_B; t_B\}$ měřenými v některé vztažné soustavě S jsou v této soustavě **současné**, jestliže $t_A = t_B$, resp. **soumítné**, jestliže $\vec{r}_A = \vec{r}_B$.

V logice budeme místo slova „současné“, nemá-li bezprostřední vztah k času, raději užívat slovo „zároveň“.

Veličinu nazýváme **absolutní**, resp. **relativní**, jestliže její hodnota **nezávisí**, resp. **závisí** na volbě vztažné soustavy použité pro popis a měření veličiny.

Současnost je v klasické mechanice absolutní: jestliže nastane výbuch současně na začátku i konci vlaku, pak nastal současně jak vůči vlaku, tak i vůči Zemi.

Naproti tomu soumítnost dvou událostí je i v klasické mechanice relativní, tj. závisí na volbě vztažné soustavy užitě při popisu. Jestliže si pasažér v jídelním voze u stolku objedná kávu (A) a po chvíli ji zaplatí (B), pak objednání a zaplacení nejsou současné (ani z hlediska vlaku, ani Země). Události A, B jsou soumítné z hlediska vlaku (u téhož stolku), nikoli však z hlediska Země (vlak zatím projel dlouhý úsek). Soumítné v *obou* vztažných soustavách by A, B byly buď tehdy, kdyby se soustavy vůči sobě nepohybovaly (kdyby vlak stál) nebo kdyby A, B byly navíc i současné — tj. kdyby se vlak nestačil mezi oběma událostmi A, B vůči Zemi posunout.

I v teorii relativity bude soumítnost relativní: dvě události v jedné soustavě soumítné, ale nesoučasné, nebudou soumítné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první. Relativní se však stane i současnost: dvě události v jedné soustavě současné, ale nesoumítné, nebudou současné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první. Bude to tedy – paradoxně – symetričtější. A také bude pravda, že dvě události A, B zároveň současné i soumítné v jedné soustavě S jsou současné a soumítné i v každé jiné soustavě S' .

8.2.5 Galileova transformace

Jak určíme pro událost A její souřadnice $(x', t)'$ v S' , známe-li její souřadnice (x, t) v S ?

Přímá transformace Zjednodušíme si nyní výklad tím, že budeme orientovat osu x v tom směru, ve kterém se koná pohyb („speciální transformace“). Při synchronizaci počátků má transformace tvar

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Inverzní transformace ke speciální Galileově transformaci rov. (8.2) může být samozřejmě nalezena triviálním vyřešením soustavy těchto dvou lineárních rovnic vůči neznámým x a t , tedy

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt' \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Můžeme ji však najít i „fyzikálněji“, a toto si hluboce rozvažte: z principu relativity plyne, že tato transformace musí mít stejný tvar. Bude to tedy opět Galileovou transformací, v níž zaměníme t za t' , dále x za x' a vzájemnou rychlost V za $V' = -V$.

8.2.6 Měření dob a délek

Pozorujme letící meteor, který někdy někde začal svítit (rozežhvil se, událost A) a poté jinde zhasl (vypařil se, událost Z); nechť mezitím jetěl rovnoměrně přímočaře. Zajímá nás jednak *vzdálenost*, tedy dráha $|\vec{r}_Z - \vec{r}_A|$, jakou meteorit urazil, jednak *doba* $t_Z - t_A$, jak dlouho svítil. Protože však hodnoty prostorových i časových údajů závisí na volbě vztažné soustavy, zajímá nás také, do jaké míry na této volbě závisí vzdálenost a doba zkoumaného děje, tj. prostorová a časová vzdálenost mezi dvěma událostmi. S meteoritem můžeme spojit inerciální soustavu S' , inerciální soustavu spojenou se Zemí označíme S . Pro zjednodušení opět předpokládejme přímočarý let po ose x a synchronizaci obou soustav S a S' .

Letí-li meteorit po dobu $\Delta T = t_Z - t_A$ vůči Zemi, pak ve své vlastní inerciální soustavě (v níž stojí v klidu) letí dobu $\Delta T' = t'_Z - t'_A$: z transformačních rovnic plyne $\Delta T = \Delta T'$. V klasické mechanice je tedy **doba děje** absolutní, tj. nezávisí na volbě vztažné soustavy.

Snadno však nahlédneme, že **prostorová vzdálenost** mezi dvěma událostmi (délka) je relativní, tj. na volbě vztažné soustavy závisí. Meteorit v soustavě S' spojené s ním samým je ovšem v klidu (má tedy rychlost $v' = 0$), takže dráha $s' = v'\Delta t$, po které svítí, je nulová. V soustavě S spojené se Zemí urazí meteorit nenulovou dráhu Δx , v případě rovnoměrného pohybu $\Delta x = v\Delta T$.

Z toho také plyne samozřejmé „poučení“: chceme-li změřit délku předmětu, pak se tento předmět buď nesmí pohybovat (a jeho kraje pak můžeme měřit kdykoli), anebo – pokud se pohybuje – musíme změřit oba jeho kraje současně, tedy v tentýž okamžik. (V teorii relativity se ukáže, že současnost měření ve dvou vzdálených bodech je relativní.)

8.2.7 Klasické skládání rychlostí

Při rovnoměrném přímočarém pohybu není rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí: v obou případech je rychlost dána vztahem

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_Z - \vec{r}_A}{t_Z - t_A}. \quad (8.4)$$

Dosazením snadno zjistíme, že mezi rychlostí \vec{v} naměřenou v S a rychlostí \vec{v}' naměřenou v S' pohybující se rychlostí \vec{V} vůči S platí jednoduchý vztah — rychlosti se sčítají jako vektory:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (8.5)$$

resp., v našem 1D případě s označením $v_x = v$

$$v' = v - V \quad (8.6)$$

Odtud ihned plyne, že neexistuje žádná konečná rychlost, která by byla absolutní v tom smyslu, že by měla stejnou hodnotu bez ohledu na volbu vztažné soustavy. Jedině rychlost nekonečná v jedné vztažné soustavě je nekonečná v libovolné vztažné soustavě (s prominutím, $\infty = \infty - V$).

Tomto poněkud podezřelému tvrzení můžeme však dát přijatelnější tvar. Nekonečnou rychlostí bychom se mohli dostat od události A $(\vec{r}_A; t_A)$ k události Z $(\vec{r}_Z; t_Z)$ tehdy, kdybychom nenulovou vzdálenost $|\vec{r}_Z - \vec{r}_A|$ překonali během nulové doby, tedy pokud by platilo $t_Z = t_A$ a obě události byly současně. Potřeba *nekonečné* rychlosti ke spojení událostí A a Z je tedy totéž co *současnost* těchto událostí. Absolutnost nekonečné rychlosti v galileovské mechanice tedy znamená absolutnost současnosti. To je srozumitelný – a velmi důležitý – důsledek Galileiovy transformace.

*Tímto jsme skončili rekapitulaci klasické kinematiky.
A začínáme s relativitou.*

8.3 Princip konstantní světelné rychlosti

Z Maxwellovy teorie plyne, že světlo (jakožto forma elektromagnetického záření) by se mělo v absolutním prostoru a čase (kde platí Maxwellovy rovnice) šířit rychlostí danou rov. (8.1), tedy

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

V inerciálních soustavách pohybujících se vůči absolutnímu prostoru by tedy mělo mít světlo rychlost jinou, podle teorému o vektorovém skládání rychlostí, a tato rychlost by měla záviset na směru letu světla. Ale i nejpřesnější měření (např. ve své době Michelsonův-Morleyův pokus) naměřila c stejnou v různých inerciálních soustavách, a to nezávisle na směru letu světla. Protože Země obíhá kolem Slunce s posuvnou rychlostí 30 km/s, tak by v různých ročních obdobích mělo mít světlo mimozemských zdrojů rychlosti navzájem odlišné až o 60 km/s, podle ročního období. Nic takového však nebylo pozorováno. Světelná rychlost byla naměřena stejná v zimě i v létě, a to nezávisle na zdroji světla (ze Země, ze Slunce, ze Siria). Maxwellův éter, „nositel světla“, se tak jeví být v klidu vůči libovolné inerciální soustavě.

Přesnost měření dostatečně převyšovala přesnost potřebnou pro zjištění odchylek. Dále, většina pokusů (např. Michelson a Morley) měřila přímo rozdíl mezi rychlostmi v různých směrech; tím se získá výsledek mnohem přesněji než samostatným měřením rychlostí v obou směrech a pak jejich odečtením.

Pokusy ověřily, že rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách stejná. Nezávisí ani na směru letu světla, ani na druhu, rychlosti či směru pohybu zdroje.

A aby bylo jasno: nejde o nějaké specifikum světla.

Cokoliv má rychlost $c_0 = 299\,792\,458 \text{ km/s}$ v jedné inerciální soustavě, má tutéž rychlost i v kterékoli jiné inerciální soustavě.

8.4 Lorentzova transformace

Princip konstantní světelné rychlosti a Galileiova transformace jsou spolu ve sporu. Ten vyřešíme nalezením jiné transformace než Galileiovy, a to takové, aby při převodu souřadnic vycházela světelná rychlost c ve všech soustavách stejná, ale jinak aby se měnilo co nejméně.

Protože chceme zachovat platnost Newtonových zákonů v klasické oblasti, musíme se omezit na *lineární* transformace mezi prostorovými a časovými souřadnicemi. Jenom tak totiž rovnoměrný přímočarý pohyb v \mathcal{S} zůstane rovnoměrným přímočarým pohybem i v \mathcal{S}' .

Fyzikálně řečeno: z nepřítomnosti výsledné síly (nulového zrychlení) v jedné inerciální soustavě plyne nepřítomnost výsledné síly i v každé jiné inerciální soustavě.

Taková transformace existuje; nazývá se podle svého objevitele **Lorentzova**. Omezíme-li se na pohyb v jediném směru a orientujeme-li v něm osy x a x' , mluvíme o *speciální Lorentzově transformaci*.

8.4.1 Speciální Lorentzova transformace

Uvažujme jistou událost (např. výskyt hmotného bodu v jistém místě a čase), popsanou ve dvou inerciálních soustavách \mathcal{S} resp. \mathcal{S}' . Zatím se omezíme na pohyb v jediném směru; v tomto směru budeme orientovat osy x , x' obou soustav. Rychlost soustavy \mathcal{S}' vůči \mathcal{S} budeme značit V . Prostorčasové souřadnice události označíme $\{x, t\}$ v \mathcal{S} , resp. $\{x', t'\}$ v \mathcal{S}' .

Speciální Lorentzova transformace – nejobecnější lineární transformace, která vyhovuje těmto požadavkům a zachovává jistou konstantní rychlost c – má tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t\right). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Všimněme si, že pro $c \rightarrow \infty$ je $V/c \rightarrow 0$ a transformace přechází na Galileiho transformaci.

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 := ct$ mající rozměr délky (stejně jako x). Při označení

$$\beta := \frac{V}{c} \quad (8.8)$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8.9)$$

dostaneme velmi symetrický zápis (a hlavně lehký pamatovatelný!)

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Celý následující odstavec 8.4.2 s odvozením při prvním čtení **přeskočte**, pokračujte až kap. 8.4.3 a zatím věřte, že uvedená transformace podle rov. (8.7), resp. rov. (8.10) je správná a jediná možná.

8.4.2 Odvození Lorentzovy transformace

Předpokládejme pro jednoduchost, že obě soustavy jsou synchronizovány ve svém prostorovém a časovém počátku, tj. že $(0, 0) = (0, 0)'$. Naším cílem je odvození (Lorentzových) transformačních rovnic mezi (x, t) a $(x', t)'$, při nichž se zachovává jistá rychlost – světelná rychlost (c). Jak víme, rovnice musejí být lineární a za „obvyklých okolností“ (rychlosti malé vůči c) se musejí redukovat na speciální Galileiovu transformaci, tedy

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt = \alpha_1 x + \alpha_2 t \\ t' &= t = \alpha_3 x + \alpha_4 t \end{aligned}$$

se čtyřmi koeficienty $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -V$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$.

V nejobecnější lineární transformaci budou spolu spojeny x' a t' s x a t opět čtyřmi koeficienty; ty musí být zvoleny tak, aby splňovaly dále uvedené požadavky, které od nové transformace očekáváme.

1) **Soustava S' má vůči soustavě S rychlost V .**

Pak tedy pro libovolné časy t musí počátek $(0, t)'$ soustavy S' mít souřadnice (Vt, t) v S . Nejobecnější transformace tohoto typu je

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(\phi x + \psi t); \end{aligned}$$

ještě zbývají neurčené tři koeficienty γ , ϕ , ψ .

Ověřte si, že pro počátek soustavy S' (tj. $x' = 0$ a libovolné t') platí v soustavě S vztah $x = Vt$.

2) **Soustava S má vůči soustavě S' rychlost $-V$.**

Pak zase pro libovolné časy t, t' musí počátek $(0, t)$ odpovídat bod $(-Vt', t)'$. Dosazením $x = 0$ a vydělením obou rovnic dostáváme

$$x'/t' = v' = -V/\psi,$$

odkud zřejmě plyne $\psi = 1$. Transformace dostává tvar

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(\phi x + t) \end{aligned}$$

se zatím neurčenými dvěma koeficienty γ , ϕ .

Ověřte si, že pro počátek soustavy S (tj. $x = 0$ a libovolné t) platí v soustavě S' vztah $x' = -Vt'$.

3) **Má-li bod v soustavě S rychlost c , pak má v S' rovněž rychlost c .**

Vydělíme spolu obě rovnice, levou stranu rozšíříme zlomkem $1/t$ a dosadíme $x'/t' = v' = c$ resp. $x/t = v = c$. Dostaneme

$$c = \frac{c - V}{\phi c + 1},$$

odkud jednoduše plyne $\phi = -V/c^2$. V transformaci

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= \gamma(-\frac{V}{c^2}x + t) \end{aligned}$$

zbývá již jen určit γ .

4) **Inverzní transformace k Lorentzově transformaci je rovněž Lorentzova.**

Řešením předchozí soustavy rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\gamma(1-(V^2/c^2))} (x' + Vt') \\ t &= \frac{1}{\gamma(1-(V^2/c^2))} \left(\frac{V}{c^2}x' + t' \right). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že tato soustava rovnic je opět Lorentzovou transformací odpovídající rychlosti $-V$ za předpokladu, že platí

$$\gamma = \frac{1}{\gamma(1-(V^2/c^2))}.$$

To je splněno, pokud je $\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}}$. Protože pro $V = 0$ musí přejít transformace v identitu, zvolíme řešení s kladným znaménkem, tj.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}}$$

a dostáváme konečně **speciální Lorentzovu transformaci**

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t \right). \end{aligned}$$

Symetrie těchto rovnic vynikne ještě více, jestliže místo času t zavedeme veličinu $x_0 := ct$ mající rozměr délky. Při označení $\beta := V/c$ a $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ x'_0 &= \gamma(-\beta x + x_0). \end{aligned}$$

Ověřte, že speciální Lorentzovy transformace podél téže osy tvoří grupu.

8.4.3 Lorentzova transformace pro 3D prostor (x, y, z)

Zobecnění Lorentzovy transformace pro 3D je snadné, zůstaneme-li při tom, že se soustavy S a S' navzájem pohybují podél společných os x, x' (speciální Lorentzova transformace). Pak transformace nemění nic ve směru os y a z , takže rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} (x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(V^2/c^2)}} \left(-\frac{V}{c^2}x + t \right). \end{aligned}$$

resp. se značením $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(-\beta x_0 + x_1) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Výslovně zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z os se ostatní dvě „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny.

Speciální Lorentzovy transformace podél téže osy se skládají snadno a tvoří grupu. Skládání obecných Lorentzových transformací zahrnujících i otočení prostorových souřadnic je o něco složitější (krychle se převádí na obecný, nepravoúhlý rovnoběžnostěn!). Zde se jimi zabývat nebudeme.

8.5 Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace

8.5.1 Transformace rychlostí („skládání rychlostí“)

Značme

$$\begin{aligned}v' &= x'/t' = \beta'c \\v &= x/t = \beta c \\V &= \quad \quad Bc.\end{aligned}$$

Vydělením rovnic rov. (8.7) pro x', t' dostaneme

$$\begin{aligned}v' &= \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} && \text{a inverzní} \\v &= \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}\end{aligned}\tag{8.12}$$

resp.

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{\beta - B}{1 - \beta B} && \text{a inverzní} \\ \beta &= \frac{\beta' + B}{1 + \beta' B}.\end{aligned}\tag{8.13}$$

To jsou (obecně) lineární lomené funkce vůči proměnným v, β . Rov. (8.12) má vždy právě jeden pevný bod $v = c$ takový, že $v' = v$.

Pokud by bylo $c = \infty$, redukovala by se rov. (8.12) na lineární rovnici a rov. (8.7) by přešla na Galileovu transformaci, kdy se rychlosti skládají prostým (vektorovým) součtem:

$$v' = v - V \quad \text{resp.} \quad v = v' + V;$$

zápis typu rov. (8.13) by neměl smysl.

Protože je ovšem hodnota rychlosti c konečná (světelná rychlost), nastane při vzájemné rychlosti $V < c$ (resp. $B < 1$) vztahných soustav pro pohyb bodu libovolnou rychlostí v právě jeden z těchto případů:

- $|v| < c \quad \Rightarrow \quad |v'| < c$ podsvětelné rychlosti
- $|v| = c \quad \Rightarrow \quad |v'| = c$ světelná rychlost
- $|v| > c \quad \Rightarrow \quad |v'| > c$ nadsvětelné rychlosti.

Rychlosti v se tedy rozpadají do tří tříd; příslušnost ke třídě se Lorentzovou transformací nemění. (Bod pomalejší než světlo v jedné vztahné soustavě \mathcal{S} zůstane pomalejším než světlo i v libovolné jiné vztahné soustavě \mathcal{S}' apod.) Případ $|v| > c$ zahrnuje i $v = \infty$ (současnost).

8.5.2 Interval jako invariant Lorentzovy transformace

Pro událost U o prostorové souřadnici x a časové souřadnici t definujme **interval** s^2 jako čtverec vzdálenosti této události od počátku, tedy $s^2 \equiv x^2 - c^2t^2$. V kap. 8.4.2 požadujeme, aby z $s^2 = 0$ plynulo i $(s^2)' = 0$, tedy aby rovnost $s^2 = 0$ byla **invariantní** vůči Lorentzové transformaci. Ověřme dokonce, že interval s^2 , i když není roven nule, je invariantem Lorentzovy transformace. Platí totiž

$$(s^2)' = x'^2 - c^2t'^2 = (x^2 - 2\beta xct + \beta^2 c^2 t^2) - \gamma^2 (c^2 t^2 - 2\beta c t x + \beta^2 x^2) = s^2, \tag{8.14}$$

což jsme chtěli dokázat.

Je-li $s^2 < 0$, říkáme, že interval má **časový** charakter, pro $s^2 > 0$ má interval **prostorový** charakter. Světobody, pro něž je $s^2 = 0$, tvoří **světelný kužel** s vrcholem v počátku.

Analogicky lze zavést interval mezi dvěma událostmi A, B jako $s_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 - c^2(t_B - t_A)^2$.

Někdy se nepřesně říká, že v Galileově transformaci jsou dva invarianty, totiž délka Δl a doba Δt , zatímco v Lorentzové transformaci jen jediný, totiž interval s^2 . Není to pravda, délka není v Galileově transformaci invariantem, viz kap. 8.2.6. Invariantem v Galileově transformaci je jen doba. Délka se zachovává jen při transformaci mezi dvěma soustavami jsoucími navzájem v klidu (např. s navzájem potočenými osami), ať už jde o transformaci Galileovu nebo Lorentzovu.

Všimněte si, že náš původní požadavek byl jen zachování relace $s^2 = 0$, tj. stálé rychlosti světla. Automaticky však vyšlo zachování s^2 i tehdy, je-li $s^2 \neq 0$.

8.5.3 Relativita současnosti

Na rozdíl od newtonovské mechaniky je v teorii relativity současnost dvou nesoumírných událostí *relativní*, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Nebereme-li to v úvahu, dostaneme se snadno do sporu, který je podstatou většiny „paradoxů“ teorie relativity.

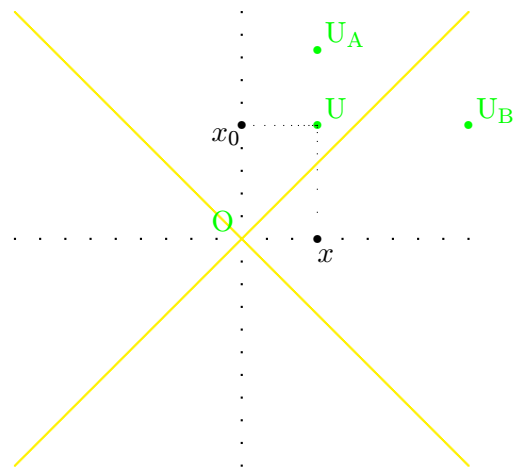
Konkrétně: jsou-li dvě nesoumírné události U , U_B v soustavě \mathcal{S} současné, pak v soustavě \mathcal{S}' pohybující se od U k U_B nastala událost U_B dříve než U , tedy $t_{U_B} < t_U$. Ověřte si to na grafickém znázornění, jehož výklad nyní následuje.

8.5.4 Grafické znázornění

Vynášíme do grafu na vodorovnou osu x polohu x a na svislou osu x_0 čas t vynásobený světelnou rychlostí, tedy veličinu $x_0 = ct$. Každý bod v rovině xx_0 pak odpovídá jisté události v prostoru a čase. Událost U má na obrázku časovou souřadnici x_0 a prostorovou souřadnici x . Událost U_A je s ní soumírná, událost U_B současná. Událost $O = \{0, 0\} = \{0, 0\}'$ je společný počátek souřadnic.

Při přechodu daném Lorentzovou transformací rov. (8.10) se však zachovává nikoli součet, ale rozdíl čtverců souřadnic bodů (viz rov. (8.14)). Body roviny se proto pohybují nikoli po kružnicích, ale po rovnoosých hyperbolách. Proto se obě osy pootočí sice stejný úhel φ , kde $\tan \varphi = \beta$, ale nikoli souhlasně, nýbrž *k sobě* pro $\beta > 0$, resp. *od sebe* pro $\beta < 0$. Rovněž se změní stupnice na osách. Světelný kužel zachovává svou polohu; je tvořen body s nulovou vzdáleností s od počátku souřadnic.

Události U , U_A a U_B jsou v obou grafech tytéž. Obrázek odpovídá $\beta = 2/3$, tedy $\gamma \approx 1,34$. Je zřejmé, že se nezachovala současnost ani soumírnost: ve druhé soustavě \mathcal{S}' už nejsou současné udá-



losti U s U_B , ale U_B s počátkem souřadnic $O = \{0, 0\}$.

8.6 Klasické interpretace: kontrakce délek, dilatace času, éter

Klasická fyzika byla neobyčejně úspěšná v popisu přírody. Klasické představy jsou nám stále do té míry blízké a sugestivní (zejména ve srovnání s kvantovou fyzikou), že je užíváme občas i nevědomky, třebaže je nebereme doslova. Ostatně ještě z ptolemaiovského, geocentrického pojetí běžně říkáme, že vychází slunce, nebo dokonce že zašlo za mraky, aniž to bereme moc doslovně. Podobně i v oblasti platnosti STR se užívají některé historické formulace, které by při doslovném výkladu vlastně zaváděly. Bylo by ovšem školometské chtít je zakazovat. Můžeme však připomenout, co znamenají a upozornit na to, co neznamenají.

8.6.1 Kontrakce délek

Problém: Tyč má vlastní délku $l_0 = l'$, tj. délku v soustavě \mathcal{S}' , v němž tyč stojí. Jakou má tyč délku l v soustavě \mathcal{S} , vůči níž se pohybuje rychlostí V ?

Řešení: Měříme-li délku (ať už pohybující se nebo stojící) tyče, určíme časoprostorové souřadnice obou jejích konců, a to v témže čase z hlediska soustavy, v němž měříme. Nechť tyč, která stojí v soustavě S' (tj. její konce mají souřadnice $x'_1 = 0$; $x'_2 = l'$ pro všechna t'), letí rychlostí V vůči S tak, že jeden její konec (x_1) prolétává počátkem souřadnic soustavy S právě v okamžiku $t = 0$. Lorentzova transformace dává vztah mezi souřadnicemi obou konců tyče v obou soustavách:

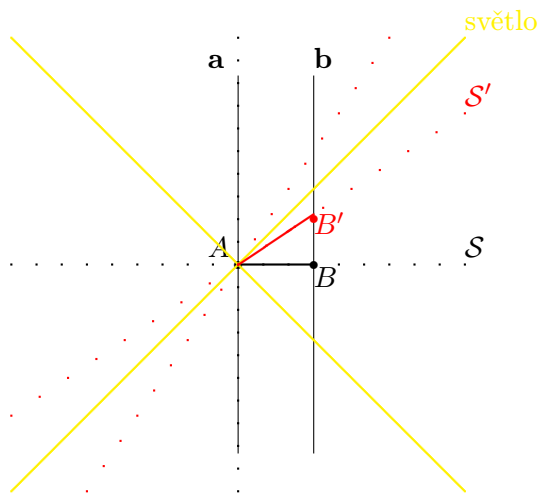
$$\begin{aligned} 0 &= x'_1 = \gamma (x_1 - \beta ct_1) \\ 0 &= t'_1 = \gamma (t_1 - \beta \frac{x_1}{c}) \\ l' &= x'_2 = \gamma (x_2 - \beta ct_2) \\ 0 &= t'_2 = \gamma (t_2 - \beta \frac{x_2}{c}). \end{aligned}$$

Měření provedená v soustavě S v časech $t_1 = t_2 = 0$ určí tedy $x_1 = 0$, $x_2 = l'/\gamma$. Pozorovatel tedy zjistí, že letící tyč je γ -krát kratší.

Pro pozorovatele na tyči ovšem akty měření obou konců tyče nebudou současné; přední konec bude měřen o $|t'_2|$ dříve.

Grafický výklad (viz obr.) Nechť tyč leží klidně v S , zadním koncem v počátku souřadnic (světočára **a**), předním na souřadnici $x = 3$ (světočára **b**). Proběhne-li měření v okamžiku $t = t' = 0$, je zadní konec určen $A = \{0, 0\} = A' = \{0, 0\}'$. Přední konec je však v S určen událostí $B = \{3, 0\}$, zatímco v S' událostí $B' = \{\frac{3}{\gamma}, 0\}'$ a je měřen měřidlem jiné délky. Polohy tyče z hlediska S , resp. S' v čase $t = 0$ jsou naznačeny plnou čarou černou, resp. červenou. Délka AB' měřená příslušnou jednotkou v S' je kratší než délka AB měřená jednotkou v S .

Úloha: Určete hodnoty B' v S' ! Odpověď je na konci odstavce 8.2.2.



Podrobněji Obvykle říkáme, že pohybující se tyč je ve směru pohybu kratší než táž tyč stojící. U tyče délky ℓ totiž naměříme délku ℓ/γ . Naměříme ji tak, že (z našeho hlediska) současně změříme souřadnice začátku i konce tyče; za délku tyče prohlásíme rozdíl těchto hodnot. Pozorovatel pohybující se spolu s tyčí naměří ovšem klidovou délku ℓ . Nesoulad vysvětlí tím, že z jeho hlediska:

- naše dvě měření nebyla současná, ale napřed jsme měřili přední, poté zadní část tyče, protože máme na Zemi ve směru jeho letu rozsynchronizované hodiny;
- měřili jsme γ -krát kratším metrem.

Tyto efekty mají vzájemně opačný účinek, ale převažuje první, takže nám proto vyšla délka tyče kratší.

8.6.2 Dilatace času

Problém: Na hodinách v soustavě S' uplyne doba t' . Jaká doba uplyne ve „stojící“ soustavě S ?

Řešení: Necht' opět hodiny proletěly společným počátkem obou soustav v čase $t = t' = 0$. Až v S' uplyne doba T' , bude

$$\begin{aligned} 0 &= x' = \gamma(x - \beta cT) \\ T' &= t' = \gamma(T - \beta x/c) \end{aligned} \quad ,$$

odkud $x = \beta cT$ (hodiny letí rychlostí βc) a $T' = \gamma T(1 - \beta^2)$, čili $T = \gamma T'$. V soustavě S uplyne doba γ -krát delší.

Heslovitě řečeno: „Mezi dvěma událostmi A, B uplyne nejkratší doba v té soustavě, v níž jsou A, B souměstné“ (tedy měříme-li tuto dobu hodinami, které jsou vůči oběma událostem v klidu; předpokládá se, že interval AB je časupodobný).

Experimentální ověření Mikroskopické ověření: mezony μ s poločasem rozpadu $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s vznikající ve vrchních vrstvách atmosféry sekundárně z kosmického záření proletí na povrch země vzdálenost l cca 30 km. Z „pozemského hlediska“ letí tedy nejméně dobu $\tau = l/c \approx 10^{-4} \approx 50 * \tau_0$. Za tuto dobu vlastního času by se jejich počet zmenšil rozpadem asi 10^{20} -krát, takže bychom je na Zemi prakticky nemohli registrovat.

Makroskopické ověření dilatace je popsáno mj. v HRW (str. 1013, resp. 1037 dle vyd.): v říjnu 1977 Joseph Hafele a Richard Keating nechali čtyři přenosné atomové hodiny $20 \times$ obletět kolem Země na komerčních leteckých linkách v různých směrech. Výsledné zpoždění se shodovalo s teorií na 10%. O několik let později byla po 15 h oblétní Chesapeakské zátoky potvrzena dilatace času s přesností lepší než 1%. V dnešní době se při přemísťování přesných atomových hodin vždy započítávají efekty STR i OTR. Rovněž hodiny na družicích pro GPS se nastavují s uvážením jak STR, tak i OTR.

Podrobněji Rozeberme, jak bude probíhat známý „paradox dvojčat“, kdy cestovatel C vrátí se z výletu zestárne méně než jeho dvojče D — bratr, který zůstal doma. Každý z pozemšťanů, který uvidí po cestě cestovatele, uvidí, že mu hodiny ukazují menší čas než na Zemi, a usoudí, že tedy cestovatelovy hodiny jdou γ -krát pomaleji. Cestovatel sleduje pozemské hodiny a vidí, že

- každé z hodin jdou γ -krát pomaleji než jeho (pokud to ovšem stihne sledovat...);
- přesto každé následující ukazují čas větší než jeho, a to i na cestě tam, i na cestě nazpět.

Usoudí z toho, že pozemské hodiny jdou pomaleji než jeho, a že jsou rozsynchronizovány tak, že vždy ve směru jeho letu (tam i zpět) ukazují čas pozdější.

8.6.3 Éter

Klasická fyzika nabízela dva modely světla: korpuskulární (Newton) a vlnový (Huyghens).

V korpuskulárním modelu se žádný éter nevyskytuje: světlo jsou letící částice (korpuskule). Model vysvětlí přesně přímočaré šíření světla a odraz světla. Nesouhlasí však rychlost v látkovém prostředí (je větší než ve vakuu); směr při lomu souhlasí jen kvantitativně (neřídí se Snellovým zákonem)². Nesouhlasí dále rychlost c světla při pohybu zdroje: v tomto modelu by se měla rychlost zdroje k rychlosti světla vektorově přičítat. Nevysvětlí tedy, proč světlo pozemské, sluneční nebo ze Siria mají stejnou rychlost (jak bylo experimentálně ověřeno).

Podle vlnové teorie je světlo chvěním éteru, asi jako zvuk je chvěním vzduchu nebo železné tyče. V soustavě, v níž éter stojí, vysvětlí model vše dobře: přímočaré šíření světla, odraz i lom (a fyzikální optika i další jevy jako difrakci apod.). Rychlost světla nezávisí na rychlosti zdroje. Látkou (= hmotným prostředím) je éter ovlivněn tak, že se v něm šíří světlo pomaleji než ve vakuu. Pohybujícím se prostředím je také strháván éter, ale jen částečně, viz kap. 8.6.4.

Další problémy nastávají, když se pozorovatel pohybuje vůči éteru. Pak by měl naměřit nejen Dopplerův jev, tj. změnu kmitočtu – barvy světla (to naměří), ale i rychlost světla vektorově zvětšenou o svou vlastní rychlost (to však bylo pokusy vždy vyvráceno).

Samozřejmě, podstata éteru zůstává utajena a jeho vlastnosti jsou velmi pozoruhodné. Protože světlo je vlnění příčné a nikoli podélné, má éter povahu pevné látky (nikoli plynu či tekutiny). Jeho modul pružnosti musí být obrovský díky obrovské rychlosti světla, přitom se však v něm pohybují všechny předměty, aniž jim klade měřitelný odpor v pohybu apod.

²V prostředí s vyšším indexem lomu, např. ve skle, má podle této teorie světelná částice nižší potenciální energii než ve vakuu. Při průletu rozhraním je proto urychlena směrem kolmo k rozhraní a její trajektorie se tedy láme směrem ke kolmici.

8.6.4 „Strhování světla“

Rychlost světla ve vakuu značíme c . V klidném prostředí s indexem lomu n má světlo rychlost $v = c/n$. Otázkou však je, do jaké míry se éter strhuje v látce s indexem lomu n , která se *pohybuje* rychlostí $w = \beta c$. Experimenty s tekoucí vodou (Fresnel) ukázaly, že se éter pohybujícím se prostředím strhuje (pro rychlost v' světla v pohybujícím se prostředí platí $v' > v$), ale jen částečně, a to s těžko pochopitelným koeficientem cca $(1 - 1/n^2)$:

$$v' \approx v + w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < v + w \quad (8.15)$$

STR řeší všechny uvedené otázky logicky, bez dalších předpokladů a v úplném souladu s experimentem. „Strhovací koeficient“ vyjde jako první přiblížení výsledku relativistického skládání rychlosti světla v látce a rychlosti látky, totiž

$$v' = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} = c \frac{\frac{1}{n} + \beta}{1 + \frac{\beta}{n}}, \quad (8.16)$$

a to můžeme rozvinout v mocninnou řadu podle β :

$$v' = \frac{c}{n} + w \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \beta^2 \dots \quad (8.17)$$

Úloha: Proveďte naznačené odvození podrobně a zjistěte úplný člen druhého řádu.

Odpověď je na konci odstavce 8.7.1.

V současných představách nevymýšlíme mechanický model nebo jiný nositel pro elektromagnetické pole. Pole je prostě stav prostoru popsáný tak, že každému bodu a času v uvažované oblasti je přiřazena nějaká hodnota. Kvantová teorie se sice „vrátila“ k částicovému pojetí světla jako proudu fotonů, ty ovšem nepojímá mechanisticky, ale jen jako vyjádření toho, že energie pole se mění o celistvé násobky výrazu hf . Ten interpretujeme jako energii vznikající či zanikající částice – fotonu – s nulovou klidovou hmotností, světelnou rychlostí a hybností $p = hf/c$.

8.6.5 Světlo v látkovém prostředí a relativita

Nebudeme zde budovat relativistickou teorii elektrodynamiky kontinua, připomeneme jen dva aspekty, které nesmíme ztratit ze zřetele:

- Studujeme-li chování světla v hmotném prostředí (a nikoli ve vakuu), pak *existuje* jistá apriori význačná vztažná soustava, totiž ta, ve kterém prostředí stojí. Není tedy samozřejmě pravda jako ve vakuu, že všechny inerciální soustavy jsou rovnoprávné a zákony v nich mají stejný tvar.
- Tvrdíme-li že rychlost v světla v látce s indexem lomu n je rovna $v = c/n$, pak tím rozumíme rychlost světla v *ustáleném* stavu, nikoli v *přechodovém* stavu při vniknutí světla do prostředí. Čelo elektromagnetické vlny rozkmitá nosiče náboje tvořící látku, ty – tím, že kmitají – vyzářují elektromagnetické pole, to se sčítá se stále dopadající vlnou, a výsledkem je v rovnovážném stavu situace, kdy zpětná vlna se vyruší a dopředná se pohybuje rychlostí c/n . Nežli se ovšem k rovnovážnému stavu dojde, trvá to jistou přechodovou dobu (problematiku tvaru prekurzoru – světelné vlny před dosažením rovnovážného stavu – probírá podrobně např. Stratton.) Má-li tedy za jistých okolností látka (plasma) index lomu $n < 1$, pak to není ve sporu s teorií relativity. V *ustáleném stavu* bude v takové látce fázová rychlost světla nadsvětelná. Ovšem tím, že jde o ustálený stav, nepřenáší vlna žádnou (novou) informaci. Kdybychom poslali pulz (nebo obecně změnili ustálený stav), pak by se šířil světelnou rychlostí a deformoval by se přitom. Nadsvětelnou rychlost by vlna vykazovala až později, v informačně sterilním ustáleném stavu.

8.7 Minkowského formalismus, čtyřvektory

8.7.1 Základní idea

Nechť se soustava S' pohybuje vůči S rovnoměrně tak, že její osa x'_1 klouže po ose x_1 soustavy S rychlostí $V = \beta c$ (viz rov. (8.11)). Po zavedení souřadnice $x_0 := ct$ můžeme použít stejné jednotky pro délky x_j i čas x_0 a Lorentzovy rovnice získají velmi symetrický tvar:

$$\begin{aligned}
x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\
x'_1 &= \gamma(-\beta x_0 + x_1) \\
x'_2 &= x_2 \\
x'_3 &= x_3 .
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Opět zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z prostorových os (zde x_1) se ostatní dvě (zde x_2, x_3), „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny.

Dále jsme viděli, že se při této transformaci zachovává interval

$$s^2 \equiv -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{8.19}$$

$$= -x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \tag{8.20}$$

tedy $s^2 = s'^2$, kde s'^2 je sestaven v \mathcal{S}' z čárkovaných proměnných.

Hermann Minkowski (1864-1909) navrhl v r. 1908 využít k popisu prostoročasu komplexních čísel. Zavedeme-li totiž novou proměnnou $x_4 = i x_0 = i ct$, lze rov. (8.19) přepsat do tvaru

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sum_{\kappa=1}^4 x_\kappa x_\kappa \equiv x_\kappa x_\kappa . \tag{8.21}$$

Poslední zápis je s užitím Einsteinovy sumační konvence. Řecké indexy probíhají od 1 do 4; latinské indexy si ponecháme pro prostorové indexy 1 až 3. Zjistíme, že čtveřice $\{x_\kappa\}$ popisující událost se při Lorentzově transformaci chová jako vektor ve čtyřrozměrném prostoru s obvyklými pravidly pro rovnost, skládání, skalární součin a velikost vektoru (s v rov. (8.21)).

Lorentzovu transformaci rov. (8.18) lze nyní zapsat jako

$$x'_l = L_{l\kappa} x_\kappa \tag{8.22}$$

kde transformační Lorentzova matice $L_{l\kappa}$ má tvar

$$L_{l\kappa} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

a je unitární:

$$\sum_l L_{l\kappa} L_{l\lambda} = \delta_{\kappa\lambda} . \tag{8.24}$$

Formálně se zachovává euklidovská metrika, rov. (8.21). Rozdíl je však v tom, že díky imaginární jednotce v proměnné x_4 může být čtverec s^2 velikosti takového vektoru nejen kladný a nulový, ale i záporný, a dále že může být roven nule i pro nenulový vektor a_κ . Proto mluvíme o *pseudoeuklidovské metrice*.

Řešení z kap. 8.6.4: $-c\beta^2 n^{-1}(1 + n^{-2})$

8.7.2 Čtyřvektory

V klasické mechanice nazýváme **skalárem** veličinu, která se při otočení vztažné kartézské soustavy nemění a **vektorem** 3D veličinu, jejíž složky se při otočení vztažné kartézské soustavy transformují stejně jako složky diferenciálu $d\vec{r}$ polohového vektoru.

Veličinu nazveme **čtyřskalárem** ve 4D Minkowského prostoru, jestliže je invariantem při Lorentzově transformaci; jinými slovy, má-li výraz, který ji definuje, stejný tvar i stejnou hodnotu ve všech soustavách spojených Lorentzovou transformací. Je to např. elektrický náboj Q , anebo, jak jsme dříve zjistili, prostoročasný interval s^2 z rov. (8.21), a jak v kap. 8.7.4 zjistíme, vlastní čas (s elementem $d\tau = dt/\gamma$, což je, přesněji řečeno, vlastní *doba*, tj. rozdíl dvou časových údajů).

Veličinu $\{X_\lambda\}_{\lambda=1}^4$ v Minkowského prostoru s osami x_κ nazveme **čtyřvektorem**, jestliže se transformuje Lorentzovou transformací stejně jako „posunutí“ $\{d\vec{X}\} = \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}$ události popsané bodem \vec{X} . Čtyřvektor zde budeme značit kapitálkou a řeckým indexem, např. X_κ , jeho první tři složky tvořící 3D vektor toutéž minuskulí a latinským indexem, např. x_k .

Analogicky, tedy transformačními vlastnostmi, můžeme zavést **čtyřtenzory** libovolného řádu.

Naše strategie bude následující: budeme důsledně vyhledávat a užívat veličiny, které jsou konzistentní s Minkowského prostoročasem s jeho metrikou. Podrobně: vezmeme klasickou rovnici platnou v jedné inerciální soustavě. Pokud ji zapíšeme veličinami invariantními vůči Lorentzově transformaci anebo veličinami majícími při této transformaci jednoduše definované chování (čtyřvektory, čtyřtenzory...), pak tím získáme tvar konzistentní i s STR. Z platnosti rovnice v jedné inerciální soustavě pak plyne platnost takto zapsané rovnice i v libovolné jiné inerciální soustavě (po Lorentzově transformaci).

8.7.3 Grafické zobrazení

Budeme užívat grafického zobrazení už dříve popsaného v kap. 8.5.4, zdůrazníme jen jeho spojitost s Minkowského prostorem.

Změna vztažné soustavy popsaná Lorentzovou transformací se projeví otočením os ve 4D komplexním Minkowského prostoru. Jde-li o otočení pouze v podprostoru prostorových os x_1, x_2, x_3 , jde o totéž otočení, které známe z našeho 3D prostoru, tedy otočení navzájem kolmé trojice prostorových os, přičemž nová vztažná soustava zůstává vůči výchozí soustavě v klidu. Zde není nic nového. Zahrnuje-li však otočení osu x_4 , popisuje přechod ke vztažné soustavě, která se vůči původní soustavě *pohybuje* (a to rovnoměrně přímočaře). Má tedy zcela nový význam. Uvažme pro jednoduchost jen otočení v rovině $x_1 x_4$ (značme ji ${}_4\mathbb{R}$); na papír kreslíme ovšem reálné veličiny x_1, x_0 . Jejich rovinu značme ${}_0\mathbb{R}$; zpravidla kreslíme časovou osu x_0 svisle a prostorovou osu x_1 vodorovně a pro stručnost značíme jen x .

Jak uvidíme, otočení v rovině ${}_4\mathbb{R}$ zachovává nejen nulovost intervalu $s^2 = 0$, ale obecně interval $s^2 = x_1^2 + x_4^2 = x_1^2 - x_0^2$ (tedy $x_1^2 - (ct)^2$) pro libovolnou hodnotu. Projeví se v rovině ${}_0\mathbb{R}$ svérázně: každý bod roviny ${}_0\mathbb{R}$ se při tomto „otáčení“ pohybuje nikoli po kružnici se středem v počátku souřadnic, ale po rovnoosé hyperbole, rovněž se středem v počátku souřadnic. Osy, které zůstávají k sobě kolmé, by se při obvyklém otočení pootočily v souhlasném směru o stejný úhel; při otočení v rovině $x_1 x_4$ se pootočí o stejný úhel, ale v opačných směrech (tedy buď od sebe, nebo se semknou k sobě – ke světelnému kuželi). Světelný kužel $s^2 = 0$ při tomto „otáčení“ zůstává na místě, nemění se. Pohybem bodů po hyperbolách se na osách také změní měřítko. Čím více se nám jeví nové osy sevržené ke světelnému kuželi, tím delší se jeví na nich jednotková vzdálenost.

Stojí za to si při této příležitosti uvědomit, jak to vypadá v klasické mechanice, tedy při Galileově transformaci (ta samozřejmě unitární není; zachovává jen čas, nikoli délku). Vynášíme-li tedy čas x_0 na svislou osu („časová osa“) a souřadnici x na vodorovnou („prostorová osa“), pak přechod k pohybující se soustavě znamená, že časová osa se skloní a délky na ní se prodlouží tak, aby jejich průmět na svislici zůstal stejný. (Jak víme, $t = t'$ je invariant Galileovy transformace.) Vodorovná prostorová osa je stejná pro všechny vztažné soustavy, i délky na ní zůstávají stejné.

8.7.4 Vlastní čas (vlastní doba)

Čas t byl v klasické mechanice invariantem Galileiho transformace a bylo proto možné podle času t derivovat³. V STR však čas t , resp. s našimi jednotkami $ict = x_4$, se nechová jako skalár, ale je to čtvrtá složka polohového čtyřvektoru (s nepodstatnou multiplikační konstantou ic). Ukážeme však, že veličina zvaná **vlastní čas** (resp. vlastní doba)

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1 - \beta^2} \quad (8.25)$$

určující údaj hodin v soustavě, ve které hodiny stojí, invariantem je, a je tedy vhodná k použití všude, kde jsme v klasické fyzice potřebovali čas (např. pro derivace podle času).

Uvažujme (pohybující se) hodiny popsané v jednom okamžiku bodem A s polohou (x_A, ict_A) a v následujícím okamžiku bodem B s polohou (x_B, ict_B) . Zřejmě platí

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\Delta x_0) \quad (8.26)$$

$$\Delta x'_0 = \gamma(\Delta x_0 - \beta\Delta x) \quad (8.27)$$

V soustavě spojené s hodinami je ovšem $\Delta x' = 0$, a tedy $\Delta x = \beta\Delta x_0$, a z druhé rovnice pak plyne

$$\Delta x'_0 = \gamma(\Delta x_0 - \beta(\beta\Delta x_0)) = \gamma(1 - \beta^2)\Delta x_0 = \Delta x_0/\gamma \quad (8.28)$$

³Terminologicky přesněji, jde nikoli o **čas**, ale o elementární **dobu** dt , tedy rozdíl dvou časových údajů. Je ovšem obecný úzus užívat termín „čas“ v širším slova smyslu, tedy jak pro veličiny časový údaj, doba, tak i pro objekty typu časový interval apod. Podobně je běžný „vlastní čas“ tam, kam patří spíše „vlastní doba“.

a podle definice $\Delta x_0 = c\Delta\tau$ platí i

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad , \quad (8.29)$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad . \quad (8.30)$$

Protože pro $\beta \neq 0$ je vždy $\gamma > 1$, je také vždy doba $\Delta\tau$ naměřená na hodinách menší než doba naměřená v libovolné vztažné soustavě \mathcal{S} , v níž se hodiny pohybují („pohybující se hodiny jdou pomaleji“).

Uvedený vztah lokálně platí i tehdy, když se hodiny pohybují z bodu A do B s proměnnou rychlostí; z toho plyne

$$\tau_{AB} = \int_A^B \frac{dt}{\gamma} = \int_A^B \sqrt{1 - \beta^2} dt \quad . \quad (8.31)$$

8.7.5 Polohový čtyřvektor X

Jak lze očekávat, polohový čtyřvektor X_λ odpovídající polohovému vektoru pro 4D prostoročas bude složen z polohového vektoru x_l v prvních třech složkách a čtvrtá složka bude $x_4 = ict$:

$$X_\lambda = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, ict) \quad (8.32)$$

8.7.6 Čtyřvektor rychlosti – čtyřrychlost U

Ve 3D jsme zavedli rychlost vztahem

$$v = \frac{dx_i}{dt} \quad , \quad (8.33)$$

protože dt byl vůči Galileově transformaci invariant.

Čtyřrychlost U_λ zavedeme analogicky 3D rychlosti v , ovšem nikoli derivací podle (obyčejného) času t , ale podle vlastního času τ :

$$U_\lambda = \frac{dX_\lambda}{d\tau} = \frac{dX_\lambda}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dX_\lambda}{dt} = (\gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3, i\gamma c) \quad (8.34)$$

Všimněme si, že čtverec čtyřrychlosti je konstantní:

$$U_\lambda \cdot U_\lambda = \gamma^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + (ic)^2) = c^2\gamma^2(\beta^2 - 1) = -c^2 \quad (8.35)$$

(Čtyřrychlost je komplexní veličina, proto nás nepřekvapí, že její čtverec je záporný.)

8.7.7 Čtyřvektor hybnosti P ; klidová m_0 a relativistická m hmotnost

V klasické mechanice je

$$\vec{p} = m_0\vec{v} \quad , \quad (8.36)$$

kde m_0 je hmotnost částice (v klidu). Čtyřhybnost zavedeme proto vztahem

$$P_\lambda := m_0 U_\lambda = m_0 \gamma (v_1, v_2, v_3, ic) \quad (8.37)$$

Zavedeme-li *relativistickou hmotnost* m vztahem

$$m := \gamma m_0 \quad , \quad (8.38)$$

můžeme stejně jako v klasické mechanice psát pro první tři složky

$$P_1 = mv_1 \quad ; \quad P_2 = mv_2 \quad ; \quad P_3 = mv_3 \quad \text{a} \quad P_4 = imc \quad , \quad (8.39)$$

takže platí opět klasická definice rov. (8.36), jenom s hmotností nikoli klidovou m_0 , ale relativistickou m . Čtvrtou složku (imc) budeme později interpretovat jako (iE/c), kde E bude celková energie sledované částice.

8.7.8 Čtyřvektor zrychlení A

Další derivací zjistíme snadno čtyřvektor zrychlení:

$$A_\lambda = \frac{dU_\lambda}{d\tau} = \gamma \frac{dU_\lambda}{dt} \quad , \quad (8.40)$$

např. pro složku $\lambda = 1$

$$A_1 = \gamma \left(\frac{dv_1}{dt} \gamma + v_1 \frac{d\gamma}{dt} \right) = \gamma^2 a_1 + \frac{\gamma^4 v_1 (\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2} \quad , \quad (8.41)$$

jak se zjistí výpočtem $d\gamma/dt$.

Derivací rov. (8.35) podle τ dále zjistíme, že čtyřrychlost a čtyřzrychlení jsou na sebe kolmé:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \sum_\lambda U_\lambda U_\lambda = 2 \sum_\lambda A_\lambda U_\lambda \quad , \text{ tedy } A \perp U \quad . \quad (8.42)$$

8.7.9 Čtyřvektor síly. Pohybová rovnice

Klasická pohybová rovnice (druhý Newtonův zákon) zněla ve 3D

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{f} \quad , \quad (8.43)$$

kde \vec{f} byla klasická 3D síla. Skalárním násobením rychlostí \vec{v} jsme dostali zákon zachování energie:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad , \text{ čili } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad . \quad (8.44)$$

Podobnou analogií jako dříve zavedeme čtyřsílu F_λ tak, aby platilo

$$\frac{dP_\lambda}{d\tau} = m_0 \frac{dU_\lambda}{d\tau} = F_\lambda \quad . \quad (8.45)$$

První tři složky budou s uvážením $dt = \gamma d\tau$ odpovídat rovnici

$$m_0 \frac{d}{dt} (\gamma v_\lambda) = F_\lambda / \gamma \quad (8.46)$$

a budou tedy souhlasit s klasickou rovnicí, zvolíme-li čtyřsílu F tak, aby

$$F_1 = \gamma f_1 \quad , \quad F_2 = \gamma f_2 \quad , \quad F_3 = \gamma f_3 \quad . \quad (8.47)$$

K určení F_4 užijeme jednak rov. (8.45), tedy

$$m_0 \frac{dU_4}{d\tau} = F_4 \quad , \text{ neboli } F_4 = \gamma m_0 \frac{d}{dt} (i \gamma c) \quad , \quad (8.48)$$

jednak skalárního čtyřsoučinu rov. (8.45) se čtyřrychlostí U_λ , o němž dokážeme, že je roven nule:

$$\sum_\lambda F_\lambda \cdot U_\lambda = \sum_\lambda m_0 \frac{dU_\lambda}{d\tau} \cdot U_\lambda \quad (8.49)$$

$$= \sum_\lambda m_0 A_\lambda \cdot U_\lambda \quad (8.50)$$

$$= 0 \quad . \quad (8.51)$$

Je tedy

$$0 = \sum_\lambda F_\lambda \cdot U_\lambda = \gamma^2 \sum_\lambda f_\lambda \cdot v_\lambda \quad (8.52)$$

odkud

$$F_4 \text{ i } c\gamma = -\gamma^2 \sum_{k=1}^3 f_k \cdot v_k \quad (8.53)$$

Eliminací F_4 z rov. (8.48) a (8.53) dostaneme po úpravě

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = \sum_{k=1}^3 f_k \cdot v_k \quad (8.54)$$

Člen v závorce tedy odpovídá kinetické energii z rov. (8.44). Označme ho E ; je definován jako

$$E = \gamma m_0 c^2 = m c^2 \quad . \quad (8.55)$$

Rozvineme-li γ podle binomické věty, dostaneme

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 \dots\right) \quad (8.56)$$

$$= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad (8.57)$$

Nyní je vidět, že skutečně čtvrtá složka čtyřhybnosti z rov. (8.39) měla význam energie, přesněji

$$P_4 = \text{ i } E/c \quad , \quad (8.58)$$

$$F_4 = \text{ i } \gamma/c \cdot dE/dt \quad . \quad (8.59)$$

Příloha A

Keplerova úloha – problém dvou těles

2016-09-03

A.1 Formulace úlohy

A.1.1 Cíl

Chceme vyšetřit v rámci klasické mechaniky pohyb planety, např. Země, v naší sluneční soustavě. Jako jedinou sílu budeme uvažovat gravitační interakci mezi Zemí a Sluncem.

A.1.2 Co záměrně zanedbáme

Vědomě přitom zanedbáme řadu dalších okolností:

- veškeré relativistické jevy;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné planety než Země a působí gravitačně na Zemi i na Slunce;
- Zemi obíhá Měsíc;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné objekty než Slunce a planety (kometry, asteroidy, meziplanetární hmota, ...);
- Slunce i Země jsou nepravidelná tělesa;
- Slunce i Země rotují kolem vlastních os;
- ani Slunce, ani Země nejsou tuhá tělesa: Slunce je celé plynné, Země je pokryta oceány a ovzduším a má tekutý vnitřek;
- ...

A.1.3 Vztah k reálné situaci

Budeme se zabývat nejjednodušším případem, a to soustavou složenou ze dvou bodových objektů – hmotných bodů B_1 , B_2 . K tomu nás opravňují tyto skutečnosti:

- Zemi i Slunce můžeme „stáhnout do bodu“ proto, že gravitační pole po vrstvách homogenní koule (ať je v klidu nebo ať rotuje) je v klasické mechanice stejné jako gravitační pole hmotného bodu;
- vlastní rozměry jak Slunce (poloměr $0,7 \times 10^9 \text{m}$), tak i Země ($0,006 \times 10^9 \text{m}$) jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdáleností Země – Slunce ($150 \times 10^9 \text{m}$).

A.1.4 Další možný rozvoj teorie

Dalším krokem by bylo uvážit gravitační interakci planet navzájem (včetně pohybu Slunce kolem společného těžiště) jakožto *poruchu* a doplnit poruchové, tzv. sekulární členy (lat. saeculum = století, dlouhé pro člověka, ale přesto zanedbatelné oproti věčnosti).

Mohli bychom také přejít na obecnou teorii relativity; postihli bychom s ní i nepatrnou část stáčení perihela Merkura (43" za století), která zbývá po započtení všech vlivů klasických (5 557" za století) do pozorované hodnoty (5 600" za století). To je ovšem daleko vně rámce našich zájmů zde.

A.2 Problém dvou těles – Keplerova úloha

Vyšetříme pohyb dvou hmotných bodů B_1 , B_2 o hmotnostech m_1 , m_2 a polohových vektorech \vec{r}_1 , \vec{r}_2 pod vlivem vzájemného gravitačního přitahování. Vycházíme z Newtonových pohybových rovnic

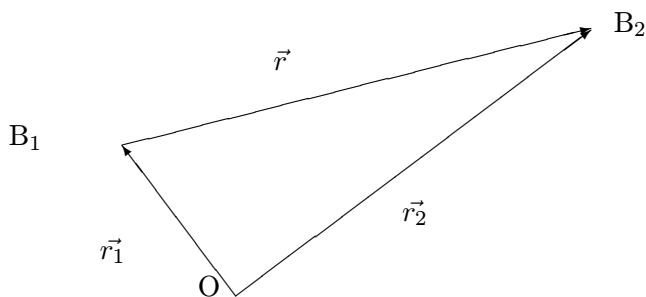
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} \quad (\text{A.1})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (\text{A.2})$$

doplněných Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (\text{A.3})$$

kde $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Zavedeme relativní polohový vektor \vec{r}



$$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (\text{A.4})$$

takže r je vzdálenost obou bodů. Dosazením dostaneme

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = + G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.5})$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.6})$$

(rozmyslete si znaménka obou výrazů – gravitace je přitažlivá).

Úloha je tedy trojrozměrná (3D) a hledáme šest neznámých – šest složek vektorů \vec{r}_k , $k = 1, 2$.

A.3 Těžišťová vztažná soustava

Zavedeme těžiště (hmotný střed) jakožto bod o souřadnicích

$$\vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{A.7})$$

Protože jde o soustavu uzavřenou (vnější síly jsou nulové), očekáváme, že se těžiště bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To skutečně snadno dokážeme součtem (rov. (A.5)+rov. (A.6)), při němž se vyruší pravá strana a po vydělení součtem $(m_1 + m_2)$ vyjde rovnou rovnice $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$. Tu můžeme snadno dvakrát integrovat

$$\dot{\vec{R}} = \vec{V}_0, \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0, \quad (\text{A.9})$$

kde integrační konstanty \vec{V}_0 , resp. \vec{R}_0 mají fyzikální význam rychlosti, resp. polohy těžiště soustavy v čase $t = 0$ (počáteční podmínky).

A.4 Redukovaná úloha

Přejdeme od šesti proměnných (složky \vec{r}_1, \vec{r}_2) k šesti proměnným (složky \vec{R}, \vec{r} z rov. (A.4),(A.7)). Pro první tři proměnné (složky \vec{R}) jsme už úlohu vyřešili (rov. (A.9)). Pravé strany rov. (A.5) a rov. (A.6) obsahují jen \vec{r} , nikoli jednotlivá \vec{r}_1, \vec{r}_2 . Zkombinujeme tedy obě rovnice tak, aby zbylo samotné \vec{r} i na levé straně: první rovnici vydělme $-m_1$, druhou m_2 a sečteme. Dostaneme

$$\ddot{\vec{r}} = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.10})$$

a zavedením **redukované hmotnosti** μ , celkové hmotnosti M a pomocné konstanty g

$$\mu := \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{A.11})$$

$$M := m_1 + m_2 \quad (\text{A.12})$$

$$g := G \frac{m_1 m_2}{\mu} = GM, \quad (\text{A.13})$$

dostaneme vztah

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{A.14})$$

$$= -\mu g \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{resp.} \quad (\text{A.15})$$

$$= -G \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (\text{A.16})$$

Všimněme si, že síla vyjádřená pravými stranami rov. (A.5), (A.6), (A.14) až (A.16) je (až event. na znaménko) táž a má i analogický zápis.

Zápis (A.16) lze interpretovat takto: eliminací pohybu těžiště a zavedením relativní vzdálenosti r jsme úlohu převedli na náhradní úlohu – pohyb tělesa („kvaziplaneta“) s redukovanou hmotností μ v centrálním silovém poli ve vzdálenosti $r(t)$ od centra. Naše „kvazislunce“ je nyní nehybné v počátku souřadnic (jako kdyby mělo setrvačnou hmotnost nekonečnou) a má gravitační hmotnost $M = m_1 + m_2$. Kolem něj obíhá „kvaziplaneta“ o hmotnosti μ z rov. (A.11).

Jde o stejný trik, který jsme použili v kap. 5.2.8 při vyšetřování harmonických kmitů soustavy navzájem pružně spřažených částic. Jejich polohy jsme převedli lineárními kombinacemi na polohy redukovaných částic – kvazičástic. Ty se chovají jako volné (nespřažené) a každá z nich koná harmonický pohyb nezávislý na ostatních kvazičásticích. Zde jsme Slunce a planetu (dvě závislá tělesa) převedli na dvě nezávislé kvazičástice: „těžiště soustavy“ (hmotnost $M + m$, pohyb rovnoměrný přímočarý) a „kvaziplaneta“ (hmotnost μ , pohyb rovinný, po kuželosečce – jak dále odvodíme).

Z polohy \vec{r} kvaziplanety dostaneme skutečné polohy planety i Slunce jednoduchou lineární transformací (vyřešením rov. (A.4) a (A.7)):

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (\text{A.17})$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (\text{A.18})$$

A.5 Rovinný problém; moment hybnosti

Ukážeme, že náš problém je trojrozměrný jen zdánlivě. Ve skutečnosti se kvaziplaneta pohybuje pouze v jisté rovině procházející počátkem souřadnic (kde leží centrum síly), počáteční polohou planety a obsahující směr její počáteční rychlosti. Tato rovina je kolmá k momentu hybnosti \vec{L} kvaziplanety:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu \vec{v} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$$

příčměň vektor \vec{L} zůstává s časem neproměnný (vnější síly jsou nulové a mají tedy výsledný moment nulový): $\vec{L} = \vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{konst.}}$.

Dá se ukázat, že i původní Keplerova úloha (tedy se Sluncem a planetou, nejen s kvazisluncem a kvaziplanetou, a nejen v těžištové soustavě) se odehrává v rovině procházející počáteční polohou Slunce, planety a jejich těžiště a pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí těžiště.

K důkazu vynásobíme rov. (A.16) zleva vektorově polohovým vektorem \vec{r} . Protože na její pravé straně je též vektor \vec{r} , dostaneme nulu:

$$\vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{\mu M}{r^2} \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{0}. \quad (\text{A.19})$$

Dále použijeme vztah

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = (\dot{\vec{r}} \times \mu \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \mu \ddot{\vec{r}} \quad (\text{A.20})$$

a z rov. (A.19) dostaneme *zákon zachování momentu hybnosti* (ZZMH) planety:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} \equiv \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \vec{0}, \quad (\text{A.21})$$

$$(\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}) = \vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{konst.}} \quad (\text{A.22})$$

Vektor momentu hybnosti \vec{L}_0 tedy nemění svůj směr v prostoru. Protože je roven vektorovému součinu polohového vektoru \vec{r} (s rychlostí \vec{v}), leží polohový vektor kvaziplanety (i její rychlost $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$) stále v rovině kolmé k \vec{L}_0 . Pohyb v centrálním poli je tedy rovinný.

Při odvození jsme nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti. Pohyb částice je tedy rovinný, ať je závislost síly na vzdálenosti jakákoliv.

A.6 Zákony zachování

Zákon zachování momentu hybnosti (ZZMH, rov. (A.22)) platný pro libovolné centrální pole jsme právě odvodili a použili k důkazu rovinnosti úlohy. Ukážeme, že pro libovolné centrální pole platí i zákon zachování mechanické energie (ZZE) a využijeme toho ke zjednodušení úlohy.

Využijeme relace

$$\frac{d}{dt}(r^n) = nr^{n-2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}. \quad (\text{A.24})$$

a dosadíme při $n = -1$ do rov. (A.15) vynásobené skalárně rychlostí $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$:

$$\mu \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right) = \mu g (-r^{-3} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{dt} \frac{\mu g}{r} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} \right) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} = \text{konst} = E_0 \quad (\text{A.27})$$

$$E_k + E_p = E_0, \quad (\text{A.28})$$

což je odvození ZZE pro speciální případ síly (pro obecnou centrální sílu).

Ani zde jsme při odvození nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti.

A.7 Řešení rovinného problému

A.7.1 Polární souřadnice

Vzhledem k tomu, že uvažované pole je centrální a jeho velikost tedy závisí jen na vzdálenosti r od počátku souřadnic, budou jistě polární souřadnice výhodnější než kartézské.

Polární souřadnice jsou ortogonální. Proto je v nich vyjádření čtverce rychlosti jednoduché. Nejprve vyjádříme obecné posunutí $d\ell$ pomocí přírůstku dr radiální souřadnice (vzdálenosti od počátku) a přírůstku $d\varphi$ úhlu; při změně o $d\varphi$ se poloha změní o $rd\varphi$. Pak dostaneme vztah mezi přírůstky z Pythagorovy věty:

$$(d\ell)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2 \quad (\text{A.29})$$

a odtud vydělením $(dt)^2$ přímo čtverec rychlosti:

$$v^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (\text{A.30})$$

V polárních souřadnicích má tedy ZZE tvar

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\mu g}{r} = E_0. \quad (\text{A.31})$$

ZZMH zní velmi jednoduše:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{\mu} \equiv \lambda \quad (\text{A.32})$$

a umožňuje nám odstranit $\dot{\varphi}$ z rov. (A.31). V ní se pak vyskytuje jen \dot{r} , r a t . Můžeme ji tedy řešit samostatně. Upravíme ji do tvaru

$$\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right) - \frac{g}{r} = \frac{E_0}{\mu}, \quad (\text{A.33})$$

odkud

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}. \quad (\text{A.34})$$

Dále můžeme postupovat dvěma směry:

A.7.2 Výpočet závislosti vzdálenosti r a času t

Jedna možnost je upravit rov. (A.34) na tvar se separovanými proměnnými:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} = dt \quad (\text{A.35})$$

a přímo integrovat: dostaneme $t = t(r)$, tedy informaci, ve kterém čase se kvaziplaneta dostane do dané vzdálenosti r od centra.

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} + t_0. \quad (\text{A.36})$$

Nás by ovšem zajímala spíše inverzní funkce $r = r(t)$ udávající, kde se částice nachází v daný okamžik t . Tu bychom dále použili k řešení $\varphi(t)$ integrací z rov. (A.32). Proto se vrátíme k rov. (A.34) a budeme postupovat jinak.

A.7.3 Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$

Jiná možnost řešení redukováného problému je určit trajektorii (parametrizovanou úhlem φ) a eliminovat čas, tedy ponechat v rov. (A.31) a (A.32) jen proměnné r a φ .

Výpočet lze vlastně provést jen v monotonní části trajektorie planety, ale na výsledku se toto omezení neprojeví.

Berme tedy $r = r(\varphi)$. Vyjádříme

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \dot{r} \frac{r^2}{\lambda} \quad (\text{A.37})$$

dosadíme do rov. (A.34) a separujeme proměnné:

$$d\varphi = \frac{dr\lambda}{r^2\dot{r}} = \frac{\lambda dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}}. \quad (\text{A.38})$$

Integrace pravé strany je samozřejmě čistě záležitostí matematické analýzy (resp. kalkulu). Fyzika však může napomoci ideou: víme-li, že se planety pohybují po kuželosečkách v ohniskové poloze, budeme hledat řešení v tomto tvaru rovnice kuželosečky, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \text{ resp. } \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{A.39})$$

kde p určuje „velikost“ (měřítko) kuželosečky a numerická výstřednost (excentricita) $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ určuje její charakter:

- $\varepsilon = 0$: kružnice;
- $0 < |\varepsilon| < 1$: elipsa;
- $|\varepsilon| = 1$: parabola;
- $|\varepsilon| > 1$: hyperbola.

Tvar rov. (A.39) nás vede na vhodné substituce v rov. (A.38). Nejprve zavedeme $\rho := \frac{\lambda}{r}$, takže $d\rho = -\frac{\lambda}{r^2} dr$:

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + 2\frac{g}{\lambda}\rho - \rho^2}}. \quad (\text{A.40})$$

Výraz pod odmocninou známým způsobem zbavíme lineárního členu: zavedeme $\sigma := \rho - \frac{g}{\lambda}$, $d\sigma = d\rho$, $K := \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2}$,

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{g}{\lambda} + \rho\right)^2}} = \frac{-d\sigma}{\sqrt{K^2 - \sigma^2}}. \quad (\text{A.41})$$

a konečně zavedeme $s := \sigma/K$, $ds = d\sigma/K$:

$$d\varphi = \frac{-ds}{\sqrt{1 - s^2}}. \quad (\text{A.42})$$

K této funkci již primitivní funkci známe (arccos). Do ní pak postupně dosazujeme všechny předchozí substituce.

$$\varphi = \arccos s + \varphi_0 \quad (\text{A.43})$$

$$s = \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.44})$$

$$K = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{g^2}{\lambda^2}} \quad (\text{A.45})$$

$$\sigma = K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.46})$$

$$\rho = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\lambda^2}{g} \frac{1}{r} = 1 + \frac{K\lambda}{g} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (\text{A.49})$$

Tato rovnice přesně odpovídá druhé rov. (A.39), jestliže značíme

$$p = \frac{\lambda^2}{g} = \frac{L_0^2}{G\mu m_1 m_2}, \quad (\text{A.50})$$

$$\varepsilon = \frac{K\lambda}{g} = \sqrt{\frac{2E_0 L_0^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2} + 1} \quad (\text{A.51})$$

$$= \sqrt{\frac{2E_0 p}{G m_1 m_2} + 1} \quad (\text{A.52})$$

Pro délku a velké poloosy, resp. vzdálenost r_P perihelia platí

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \quad (\text{A.53})$$

$$r_P = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad (\text{A.54})$$

A.7.4 Pohyb planety a slunce

Odvodili jsme, že kvaziplaneta se pohybuje po kuželosečce (rov. (A.39)) s ohniskem v počátku souřadnic, tedy s rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (\text{A.55})$$

kde φ_0 určuje úhel velké osy trajektorie vůči ose x , a rov. (A.50) a další určují parametr p i excentricitu ε . Charakter trajektorie je zřejmě dán znaménkem energie E soustavy:

- pro $E < 0$ je $\varepsilon < 1$ (elipsa),
- pro $E = 0$ je $\varepsilon = 1$ (parabola),
- pro $E > 0$ je $\varepsilon > 1$ (hyperbola).

Speciálně pro $E = -Gm_1 m_2 / 2p$ vyjde $\varepsilon = 0$ a trajektorií je kružnice.

Z pohybu kvaziplanety odvodíme pohyb skutečné planety a skutečného Slunce dosazením výsledku redukované úlohy pro kvaziplanetu do rov. (A.17) a (A.18) s tím, že obvykle předpokládáme těžiště soustavy v klidu, tedy $\vec{R} = \vec{0}$. Je tedy

$$\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \quad (\text{A.56})$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \quad (\text{A.57})$$

Snadno nahlédneme, že i v tom případě zůstane charakter kuželosečky zachován a změní se jen parametry její trajektorie.

A.7.5 Shrnutí a diskuse

Vyřešili jsme pohybové rovnice pro soustavu dvou částic při síle mezi nimi dané Newtonovým gravitačním zákonem (rov. (A.3)). Zjistili jsme, že v těžištvé soustavě je trajektorií planety (i Slunce) kuželosečka s ohniskem (nikoli středem!) v těžišti soustavy.

Energie E soustavy určuje charakter trajektorie planety takto:

- pro $E < 0$ má planeta uzavřenou trajektorii eliptickou (případně kruhovou),
- pro $E = 0$ by měla planeta trajektorii parabolickou,
- pro $E > 0$ by měla planeta trajektorii hyperbolickou.

Poslední dva případy odpovídají návštěvníkům typu komety s původem mimo Sluneční soustavu. (U nich, chceme-li být v souladu s realitou, zřejmě nemůžeme zanedbat veškeré ostatní objekty kromě Slunce a uvažovaného návštěvníka.)

Jde-li skutečně o soustavu Slunce + planeta s hmotností planety zanedbatelnou proti hmotnosti Slunce, pak je Slunce prakticky v klidu a jeho střed je i těžištěm soustavy. Naše řešení se však hodí i pro soustavu typu dvojhvězdy tvořené složkami se stejnou či srovnatelnou hmotností, opisujícími pak eliptické trajektorie kolem společného těžiště.

Připomeňme konečně, že výsledek platí i v případě, že Slunce a planety nejsou bodové, ale že jde o koule po vrstvách homogenní.

A.8 Keplerovy zákony

A.8.1 1. Keplerův zákon

Planety se pohybují po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Tento zákon je speciálním důsledkem rov. (A.39), přihlédneme-li k tomu, že

- planety jsou vůči Slunci lehké, malé a jsou daleko od sebe, takže jejich vzájemné působení lze v prvním přiblížení zanedbat a řešit soustavu planet a Slunce jako superpozici soustav „jediná planeta a Slunce“;
- trajektorií každé z planet je kuželosečka podle rov. (A.39), resp. rov. (A.53). Parabola ani hyperbola však pro planetu nepřicházejí v úvahu (vedou z nekonečna a nejsou periodické).

Konkrétními počátečními podmínkami bylo dáno, že každá z trajektorií má malou výstřednost (je blízka ke kružnici) a že leží všechny blízko jediné společné roviny – roviny ekliptiky. Jak ukazují numerické simulace, byla a bude tato konstelace stabilní ještě několik miliard let; poté se však ekliptika zborší, a rovněž Slunce ve svém dalším vývoji se rozroste tak, že pohltí Merkur atp.

A.8.2 2. Keplerův zákon

(Zákon ploch:) *Plošná rychlost \vec{w} planety je podél celé její trajektorie konstantní.*

Má-li planeta posuvnou rychlost $\vec{v}(t)$, pak elementární plocha opsaná jejím průvodičem za dobu dt je dána plochou $dP = |\vec{w}|dt$ úzkého trojúhelníku o vrcholu ve Slunci a se stranami danými vektory $\vec{r}(t)$, $\vec{v}dt$ a $\vec{r}(t + dt)$. Tato plocha je polovinou velikosti vektorového součinu $\vec{r} \times \vec{v}dt$ a souvisí jasně s momentem hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu\vec{v}$ vztahem

$$w = |\vec{w}| = \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| = \frac{L_0}{2\mu} \quad (\text{A.58})$$

Zákon zachování momentu hybnosti byl pro obecné centrální pole odvozen jako rov. (A.22).

A.8.3 3. Keplerův zákon

Poměr třetích mocnin velkých poloos eliptických trajektorií dvou planet je roven poměru druhých mocnin jejich oběžných dob.

Pro kruhové trajektorie lze tento zákon odvodit na středoškolské úrovni; tam je prostě dostředivá síla $F(r) = \mu v^2/r$ (nutná pro to, aby planeta konala rovnoměrný kruhový pohyb) dána gravitační silou podle rov. (A.3), resp. rov. (A.16) a předcházejících:

$$\frac{\mu v^2}{r} = G \frac{M\mu}{r^2}; \quad r = a; \quad v = \frac{2\pi a}{T} \quad (\text{A.59})$$

$$\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{1}{a} = G \frac{M}{a^2} \quad (\text{A.60})$$

Odtud dostaneme hledaný vztah

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{A.61})$$

Pro obecnou eliptickou trajektorii využijeme toho, že plošná rychlost w je konstantní; za periodu oběhu tedy planeta urazí plochu elipsy, tedy πab :

$$wT = \pi ab \quad ()^2 \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{L_0^2}{4\mu^2} T^2 = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) = \pi^2 a^3 p \quad (\text{A.63})$$

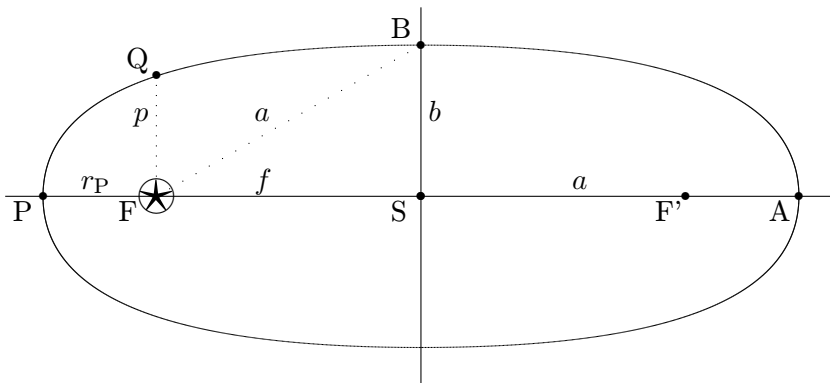
a po dosazení za p z rov. (A.50) a μ z rov. (A.11) se L_0^2 vykrátí:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{L_0^2}{4\pi^2 \mu^2 p} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (\text{A.64})$$

A.9 Označení

Pro pohodlí připomeneme z geometrie základní vlastnosti elipsy a shrneme zde užitá označení.

A.9.1 Elipsa



střed S;

ohniska F, F'; $SF = SF' = f$; slunce leží v F

perihelium P; $FP = r_P = a(1 + \varepsilon)$ (pro Zemi a družici: perigeum)

afelium A; $FA = r_A = a(1 - \varepsilon)$ (pro Zemi a družici: apogeum)

velká poloosa $SA = SP = FB = a$

malá poloosa $SB = b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

parametr $FQ = p = b^2/a = a(1 - \varepsilon^2)$

numerická výstřednost (excentricita) $\varepsilon = \frac{f}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Rovnice elipsy v kartézských souřadnicích ve středové poloze (střed v počátku souřadnic) s velkou osou ve směru x :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.65})$$

Rovnice elipsy v polárních souřadnicích v ohniskové poloze (ohnisko v počátku souřadnic):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad , \quad (\text{A.66})$$

kde φ_0 určuje úhel velké osy trajektorie vůči ose x .

A.9.2 Označení užitá v Keplerově úloze

m_1 hmotnost skutečného slunce

m_2 hmotnost skutečné planety

\vec{r}_1 polohový vektor skutečného slunce

\vec{r}_2 polohový vektory skutečné planety

$M := m_1 + m_2$ celková hmotnost; gravitační hmotnost kvazislunce

$\vec{R} := \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}$ polohový vektor těžiště soustavy

$\mu := \frac{m_1 m_2}{M}$ redukovaná hmotnost (kvaziplanety)

$\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ polohový vektor kvaziplanety

$\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ vektor rychlosti kvaziplanety

$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ gravitační konstanta

$g := GM$

$\vec{L} := \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$ moment hybnosti kvaziplanety (zůstává konstantní, roven \vec{L}_0)

$L_0 := |\vec{L}_0|$, např. z perihelia: $L_0 = r_P v_P$

$p := \frac{L_0^2}{\mu^2 GM} = \frac{L_0^2}{\mu G m_1 m_2} = \frac{L_0^2 M}{G(m_1 m_2)^2}$ parametr elipsy (trajektorie kvaziplanety)

$E_0 := \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu GM}{r}$ celková mechanická energie kvaziplanety v gravitačním poli kvazislunce (pro planetu $E_0 < 0$, pro kometu $E_0 \geq 0$)

$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E_0 p}{G m_1 m_2}}$ excentricita trajektorie kvaziplanety

$r_P = \frac{p}{1+\varepsilon}$ vzdálenost kvaziplanety od kvazislunce v periheliu

$r_A = \frac{p}{1-\varepsilon}$ vzdálenost kvaziplanety od kvazislunce v afeliu

Příloha B

Srážka (ráz) 2016-08-24

B.1 Srážka obecně

Srážka *{collision}* těles (dříve též **ráz** těles; nesouvisí s termínem „rázy“, str. 54), v mikrosvětě také často zvaná **rozptyl** *{scattering}* je děj, při němž se rychlost tělesa (sněrm velikost nbo obojí) podstatně změní za velmi krátkou dobu¹. Představuje velmi důležitou oblast fyziky. V kvantové fyzice je naším nejsilnějším prostředkem k poznávání vlastností elementárních struktur, svůj velký význam má i v klasické fyzice, a to jak v každodenní technice, tak i např. v gravitačním praku, kdy je raketa urychlena průletem gravitačního pole pohybující se planety.

Budou nás zajímat jen dvě situace *systému*² srážejících se těles:

1. stav (dávno) před srážkou, zvaný **počáteční** *{initial}*, index *i*; zpravidla v čase $t \rightarrow -\infty$;
2. stav (dlouho) po srážce, zvaný **koncový** *{final}*, index *f*; zpravidla v čase $t \rightarrow +\infty$,

příčemž v obou těchto stavech jsou tělesa natolik vzdálená, že jejich interakci lze zanedbat.

Vlastní detailní průběh samotné srážky nás co možná nebude zajímat vůbec; bude stačit jen jeho celková charakteristika (srážka pružná nebo nepružná, centrální nebo necentrální apod.) projevující se ve vztahu mezi stavem počátečním a koncovým.

♣ Čtenář znalý Cimmmana jistě poznal, že v popisu srážek vycházíme přímo z jeho filozofie externismu, což je pravý opak solipsismu: podle externismu neexistuje „já“. Naopak existuje všechno, co je kolem tohoto neexistujícího „já“.

Tělesa na sebe při srážce pochopitelně působí. Může to být „na dálku“ – gravitační či elektromagnetické pole, může to být „na blízko“ – kontaktní **nárazové síly** dané materiálem těles: uplatní se drsnost povrchu, pružnost, **vzpruživost** (zvaná též **činitel restituace**, míra, do jaké srážkou zdeformované těleso obnoví svůj původní tvar). Chceme se však vyhnout řešení pohybových rovnic (numerickému, krok po kroku s vzrůstajícím časem o dt , anebo takovému, jak jsme např. řešili v příl. A při parabolickém či hyperbolickém průletu tělesa kolem Slunce). Předpokládáme jen, že síly, kterými lze interakci popsat, jsou pro pružnou srážku konzervativní (zachovávají celkovou energii), nemusí však ubývat se čtvercem vzdálenosti, ani nemusí být centrální, mohou se uplatnit i momenty sil (rozvažte např. silové působení mezi elektrickým nábojem a elektrickým dipólem: síly nejsou centrální, na dipól působí od náboje kroutivý moment, na náboj od dipólu nikoli). Předpokládá se dále, že síly ubývají do nekonečna tak, aby dostatečně vzdálená tělesa na sebe působila jen zanedbatelně málo. Neuvažujeme však žádné *vnější* vlivy, síly ani vazby; pokud by byly, vhodně je odtransformujeme. Rovněž předpokládáme, že „v nekonečnu“ mají srážející se tělesa tutéž potenciální energii a lze ji položit rovnu nule. Systém tvořený srážejícími se tělesy je tedy *izolovaný*.

Pro izolovaný systém platí zákony zachování celkové energie E_0 , hybnosti \vec{P} , momentu hybnosti \vec{B} a hmotnosti m . Další aditivní integrály pohybu neexistují.

¹Těleso tedy projde velkým zrychlením, zapůsobí na něj náhlá síla. Toto je sice vymezení subjektivní, většinou antropocentrické, v praxi to však nevadí.

²Pro větší přehlednost mluvíme o *systému* srážejících se těles k odlišení od vztažné *soustavy*.

Zde zjistíme, co lze z těchto zákonů odvodit. Užité přístup připomíná svým použitím integrálů pohybu analytickou mechaniku. Lze ho použít i ve speciální teorii relativity (s relativistickou hmotností a Lorentzovým skládáním rychlosti). Také je použitelný v kvantové teorii pro mikrosvět; proto občas zmíníme jako objekt např. atomy a jejich specifika (vlastní moment hybnosti – spin \vec{s} , princip nerozlišitelnosti stejných částic). Výsledky jsou platné pro libovolný počet těles, ale je jich ovšem málo: v této jednoduché a obecné formě však postačí k vyřešení nejjednodušších případů srážky dvou těles. Složitější úlohy (srážka výstředná, šikmá, vrtná) vyžadují další rozbor. A už úloha tří těles může vést na deterministický chaos, změnu vázaných stavů na volné a naopak atp.

B.2 Srážka dvou těles

B.2.1 Strategie

Inerciální vztahnou soustavu \mathcal{L} , v níž je úloha zadána, nazýváme **laboratorní**. (Často v ní bývá v klidu některé z těles, zvané v tomto kontextu **terč**; není to však nutné.) V \mathcal{L} má těžiště systému zpravidla nenulovou rychlost \vec{W}_t . Pro výpočet proto přejdeme (Galileovou transformací) do té inerciální vztahné soustavy \mathcal{T} zvané **těžišťová soustava**_{center-of-mass frame}, kde těžiště systému leží v počátku souřadnic O v klidu³, má tedy nulovou rychlost. Vzhledem k zákonu zachování hybnosti zůstane těžiště v bodě O stále, i po srážce.

Při Galileově transformaci s rychlostí \vec{W}_t se všechny rychlosti v \mathcal{T} oproti \mathcal{L} zmenší o \vec{W}_t . Rozdíl dvou rychlostí — např. vzájemná rychlost \vec{W} dvou těles — se tedy nezmění. Toho s výhodou využijeme při formulaci úlohy v těžišťové soustavě.

B.2.2 Těžišťová soustava \mathcal{T}

V těžišťové soustavě \mathcal{T} má srážka dvou těles tak jasnou symetrii, že řešení je vidět na první pohled: stačí se prostě od srážky v čase vracet — provést inverzi času $t \rightarrow -t$, a celková hybnost systému (rovná nule v \mathcal{T}) ani energie se nezmění. Do \mathcal{L} se pak z \mathcal{T} dostaneme zpětnou Galileovou transformací, tj. přičtením rychlosti těžiště systému.

Rovněž geometrie úlohy v \mathcal{T} je podstatně jednodušší než v \mathcal{L} : Tečny k trajektoriím těles na počátku („směry výstřelů“)

- buď jsou v \mathcal{L} mimoběžné; pak jsou v \mathcal{T} rovnoběžné, těžiště leží mezi nimi,
- nebo jsou v \mathcal{L} různoběžné; pak v \mathcal{T} splývají, těžiště leží na nich,
- nebo jsou v \mathcal{L} rovnoběžné; pak jsou i v \mathcal{T} rovnoběžné, těžiště leží mezi nimi,
- nebo v \mathcal{L} splývají; pak i v \mathcal{T} splývají a těžiště leží na nich.

B.2.3 Označení

- Vektory značíme šipkou: \vec{V} .
 V je velikost vektoru \vec{V} (tedy $V \geq 0$)
 V_x je složka vektoru \vec{V} (tedy $-\infty < V_x < \infty$).

Zabývejme se dále dvěma tělesy: T a t.

- \vec{V} je rychlost⁴ tělesa T
- \vec{v} : malé písmeno značí veličinu tělesa t
- \vec{V}' : čárka značí veličinu po srážce
- $\vec{V}_{\mathcal{T}}$: index \mathcal{T} značí veličinu měřenou v těžišťové soustavě \mathcal{T}

³Striktně vzato, pro určení rychlostí není nutné se starat o polohu těžiště systému těles vůči počátku O soustavy \mathcal{T} . Hlavně že má v \mathcal{T} těžiště systému nulovou rychlost.

⁴Přesněji: rychlost těžiště tělesa T.

- $\vec{W} = \vec{V} - \vec{v}$ je vzájemná rychlost těles (je stejná v každé vztažné soustavě, \mathcal{L} i \mathcal{T})
- \vec{W}_t je rychlost těžiště systému těles ($T + t$):

$$\vec{W}_t = \frac{M\vec{V} + m\vec{v}}{M + m} \quad (\text{B.1})$$

- $\vec{P} = M\vec{V}$ je hybnost tělesa T
- E_0 je celková energie tělesa T
- $E_k = \frac{1}{2}MV^2$ je kinetická energie posuvného pohybu tělesa T, případně ještě obecněji
- $\vec{B} = \vec{R} \times \vec{P}$ je moment hybnosti T vůči počátku souřadnic
- $\vec{S} = J\vec{\Omega}$ je vlastní moment hybnosti rotujícího tělesa, případně jeho spin

Budeme dále předpokládat srážku netříštivou:

$$M = M' \quad , \quad m = m' \quad . \quad (\text{B.2})$$

Zákony zachování hybnosti, energie a momentu hybnosti celého systému pak znějí

$$M\vec{V} + m\vec{v} = M\vec{V}' + m\vec{v}' \quad (\text{B.3})$$

$$E_0 + e_0 = E'_0 + e'_0 \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{B} + \vec{S} + \vec{b} + \vec{s} = \vec{B}' + \vec{S}' + \vec{b}' + \vec{s}' \quad (\text{B.5})$$

Zachovává-li se při srážce i samotná kinetická energie posuvného pohybu, mluvíme o (dokonale) **pružné srážce** a platí

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{pružná srážka}) \quad (\text{B.6})$$

Při dokonale **nepružné srážce** se po srážce tělesa od sebe vůbec neodrazí, mají tutéž rychlost:

$$\vec{V}' = \vec{v}' \quad ; \quad W' = 0 \quad (\text{nepružná srážka}) \quad (\text{B.7})$$

Newton zavedl pro charakteristiku reálných, nedokonale pružných srážek **vzpruživost** $\{\text{coefficient of restitution}\}$ neboli **činitel restituce** k definovaný podílem velikosti skutečné vzájemné rychlosti W'_{sk} po srážce ku velikosti vzájemné rychlosti W' po srážce dokonale pružné:

$$k = \frac{W'_{\text{sk}}}{W'} \quad (\text{vzpruživost, činitel restituce}) \quad (\text{B.8})$$

U makroskopických těles leží k mezi 1 (srážka dokonale pružná; blíží se jí srážka ocelových koulí) a 0 (srážka dokonale nepružná, např. srážka dvou blátěných koulí).

↔ Při klasické srážce se sice může rotační energie E_r i potenciální energie E_p měnit na posuvnou E_k a naopak, ale vnitřní energie E_v se proměnit zpět v mechanickou nemůže, protože její nárůst byl spjat i s nárůstem entropie: $\Delta E_v \leq T\Delta S$, a entropie samovolně neklesne. V kvantových srážkách to však je možné: při srážce excitované částice se excitační energie může uvolnit a urychlit rozptylující se částice. Fenomenologické veličiny jako teplota T či entropie S postrádají svůj makroskopický smysl. Pokud je $k > 1$, mluví se o **superelastické srážce** $\{\text{superelastic}\}$.

Dále použijeme rov. (B.3) a buď rov. (B.6) (pružná srážka), anebo rov. (B.7) (nepružná srážka).

B.3 Srážka dvou hmotných bodů podél přímky

B.3.1 Příklad úlohy

Uvažujme kouli K, která narazí do jiné, rovněž se pohybující koule k. Koule jsou homogenní, nerotují a jejich hmotné středy (těžiště) se pohybují po téže přímce p (srážka je přímá a středová, jak později zavedeme). Koule konají pouze posuvný pohyb a můžeme je tedy modelovat hmotnými body.

B.3.2 Popis v těžiškové soustavě \mathcal{T}

V těžiškové soustavě \mathcal{T} platí pro souřadnici těžiště systému podle definice

$$\vec{\xi}_{\mathcal{T}} = \frac{M\vec{X}_{\mathcal{T}} + m\vec{x}_{\mathcal{T}}}{M + m} = \vec{0} \quad (\text{stále}) . \quad (\text{B.9})$$

Rychlost $\vec{W}_{t\mathcal{T}}$ těžiště systému v \mathcal{T} je rovněž nulová:

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{W}_{t\mathcal{T}} = \frac{M\vec{V}_{\mathcal{T}} + m\vec{v}_{\mathcal{T}}}{M + m} = \vec{0} \quad (\text{stále}) , \quad (\text{B.10})$$

a celková hybnost systému také:

$$\vec{P}_{\mathcal{T}} + \vec{p}_{\mathcal{T}} = M\vec{V}_{\mathcal{T}} - m\vec{v}_{\mathcal{T}} = \vec{0} , \quad (\text{B.11})$$

Odtud plyne nepřímá úměra velikosti rychlosti tělesa v \mathcal{T} a jeho hmotnosti. Při znalosti vzájemné rychlosti $\vec{W} = \vec{V}_{\mathcal{T}} - \vec{v}_{\mathcal{T}}$ dostaneme snadno rychlosti každého z těles v \mathcal{T} před srážkou:

$$\vec{V}_{\mathcal{T}} = \frac{m}{M + m}\vec{W} \quad ; \quad \vec{v}_{\mathcal{T}} = -\frac{M}{M + m}\vec{W} . \quad (\text{B.12})$$

Připomeňme, že \vec{W} , m i M mají v \mathcal{L} tytéž hodnoty jako v \mathcal{T} .

Pružná srážka

Při pružné srážce se zachová úhrnná hybnost $\vec{P} + \vec{p}$ i úhrnná kinetická energie posuvného pohybu. Rov. (B.3),(B.6) dostanou tvar

$$M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{0} = M\vec{V}' + m\vec{v}' \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (\text{B.14})$$

a zřejmě jim vyhovuje řešení, kdy si každé z těles po srážce zachová svou velikost rychlosti ($V = V'$, $v = v'$ a event. se změní směr vektorů). Zůstaneme-li podél osy x , jsou jen dvě možnosti:

- Rychlosti i hybnosti každého tělesa zůstanou nezměněny (tělesa se buď netrefila, nebo prošlo jedno skrz druhé): $\vec{V} = \vec{V}'$, $\vec{v} = \vec{v}'$, $\vec{W} = \vec{W}'$, a tedy podle rov. (B.12) platí podél osy x

$$V'_x = V_x = \frac{m}{M + m}W_x \quad (\text{B.15})$$

$$v'_x = v_x = -\frac{M}{M + m}W_x \quad (\text{B.16})$$

- Rychlosti i hybnosti každého tělesa změni znaménko: $\vec{V}' = -\vec{V}$, $\vec{v}' = -\vec{v}$, $\vec{W} = -\vec{W}'$, což odpovídá inverzi času $t \rightarrow -t$. Podle rov. (B.12) platí podél přímky x

$$V'_x = -V_x = -\frac{m}{M + m}W_x \quad (\text{B.17})$$

$$v'_x = -v_x = \frac{M}{M + m}W_x \quad (\text{B.18})$$

(Znovu připomeňme, že \vec{W} , \vec{W}' , m i M mají v \mathcal{L} tytéž hodnoty jako v \mathcal{T} .)

Nep pružná srážka

Při nep pružné srážce se vyžaduje zachování úhrnné hybnosti (je v \mathcal{T} nulová) a minimální úhrnná kinetická energie posuvného pohybu; ta bude minimální (nulová), když obě tělesa zůstanou po srážce v těžišti v klidu:

$$V'_x = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$v'_x = 0 \quad (\text{B.20})$$

Poznamenejme, že jakýkoliv systém těles má ve své těžištové soustavě \mathcal{T} celkovou kinetickou energii posuvného pohybu nejmenší (oproti energiím měřeným v jiných inerciálních vztažných soustavách).

B.3.3 Popis srážky v laboratorní soustavě \mathcal{L}

Pro popis v \mathcal{L} stačí výsledné rychlosti z \mathcal{T} zvětšit o rychlost $\vec{W}_t = (M\vec{V} + m\vec{v})/(M + m)$ těžiště systému (tedy o rychlost \mathcal{T} vůči \mathcal{L}). Následující rovnice jsou platné zcela obecně, nejen v 1D:

$$\vec{V} = \vec{V}_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{B.21})$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{B.22})$$

$$\vec{V}' = \vec{V}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{dokonale pružná}) \quad (\text{B.23})$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t \quad (\text{dokonale pružná}) \quad (\text{B.24})$$

$$\vec{V}' = \vec{v}' = \vec{W}_t \quad (\text{dokonale nep pružná}) \quad (\text{B.25})$$

Jednodušeji to snad zapsat nejde.

V dalším 1D postupu opět nahradíme každý vektor (např. \vec{V}) jeho složkou (V_x).

Pružná srážka

Jsou opět dvě možnosti, jak zůstat s pohybem na ose x:

Po dosazení za $\vec{V}'_{\mathcal{T}}$ z rov. (B.15) a \vec{W}_t z rov. (B.1) dostaneme triviální řešení

$$V'_x = W_x \frac{m}{M + m} + \frac{MV_x + mv_x}{M + m} = V_x \quad , \quad (\text{B.26})$$

$$v'_x = -W_x \frac{M}{M + m} + \frac{MV_x + mv_x}{M + m} = v_x \quad (\text{B.27})$$

zatímco po dosazení za $\vec{V}'_{\mathcal{T}}$ z rov. (B.15) dostaneme po rozepsání

$$V'_x = -W_x \frac{m}{M + m} + \frac{MV_x + mv_x}{M + m} = \frac{MV_x - mV_x + 2mv_x}{M + m} \quad , \quad (\text{B.28})$$

$$v'_x = W_x \frac{M}{M + m} + \frac{MV_x + mv_x}{M + m} = \frac{mv_x - MV_x + 2MV_x}{M + m} \quad . \quad (\text{B.29})$$

Nep pružná srážka

Dosazením z rov. (B.19) dostáváme řešení

$$V'_x = v'_x = W_{tx} = \frac{MV_x + mv_x}{M + m} \quad . \quad (\text{B.30})$$

Obě tělesa se po srážce pohybují společně rychlostí rovnou původní rychlosti těžiště systému.

B.4 Aplikace

B.4.1 Pružná srážka stejných těles

Narazí-li pružné těleso rychlostí V_x do stejného stojícího tělesa ($v = 0$), pak se buď minou, anebo si „vymění rychlosti“: $V'_x = 0$, $v'_x = V_x$. Jde-li v kvantové mechanice o tytéž (tedy nerozlišitelné) částice, pak jde o jediný případ, nikoli o dva.

B.4.2 Kolmý odraz míčku od pevné zdi

Pevnou zeď lze pokládat za nekonečně velkou a těžkou kouli, formálně $V_x = 0$, $M \gg m$, $W = -v_x$. Vzorce z rov. (B.28), (B.29) dávají pak podle očekávání $V'_x \rightarrow 0$ a $v'_x \rightarrow -v_x$; míček jen změnil znaménko rychlosti, velikost zůstane stejná.

B.4.3 Kolmý odraz pingpongového míčku od pátky

Pevně vedenou pátku lze podobně jako v předchozím případě nahradit pohybující se nekonečně těžkou koulí, jen tentokrát $V_x > 0$, $M \gg m$, $W = V_x - v_x$. Vzorce z rov. (B.28), (B.29) dávají tentokrát $V'_x \rightarrow V_x$ a $v'_x \rightarrow -v_x + 2V_x$.

K původní velikosti rychlosti míčku se přičte dvojnásobek rychlosti pátky.

B.4.4 Necentrální srážka

Pokud se tělesa pohybovala v \mathcal{T} k sobě po přímce p (procházející těžištěm T systému), mohou se po necentrální srážce rozletět stejnými rychlostmi jako dříve, ale po libovolné jiné přímce p' , rovněž procházející T , a neporuší tím žádný ze zákonů zachování.

B.4.5 Gravitační prak

Tzv. **gravitační prak** *{gravitational slingshot}* umožňuje raketě prolétající kolem planety přijmout část její pohybové energie ke svému urychlení ve směru pohybu planety. Je to zřejmé následující úvahy:

Ekliptiku pokládejme během srážky za inerciální laboratorní soustavu \mathcal{L} . Planeta obíhá kolem Slunce posuvnou rychlostí \vec{W}_t a má hmotnost M , proti níž je hmotnost rakety m zanedbatelná: $M \gg m$. Pokládejme proto soustavu spojenou s planetou po dobu „srážky“ (průletu rakety v okolí planety) za rovněž inerciální těžišťovou soustavu \mathcal{T} . Raketa přilétá k planetě s rychlostí vůči ekliptice (\mathcal{L}) rovnou \vec{v} , ovšem vůči planetě \mathcal{T} rovnou $\vec{v}_{\mathcal{T}} = \vec{v} - \vec{W}_t$ a odlétá rychlostí v \mathcal{T} stejně velkou, jakou přiletěla $|\vec{v}'_{\mathcal{T}}| = |\vec{v}_{\mathcal{T}}|$, ale jiným směrem. Vůči \mathcal{L} má ovšem rychlost $\vec{v}' = \vec{v}'_{\mathcal{T}} + \vec{W}_t$, a ta má jinou velikost (i směr), než původní \vec{v} .

B.5 Co ovlivňuje srážku

Problematika srážek je rozsáhlý a dosud živý obor, třebaže se studuje už 400 let; zde jsme naznačili a vyřešili jen nejjednodušší úlohy. Pro případné další studium připomínáme faktory, které je nutno uvážit při řešení úloh z reálné praxe.

B.5.1 Geometrie srážky těles

Předpokládejme, že se tělesa srazí tak, že se dotknou v jediném bodě. Obě tělesa pak mají v tomto bodě společnou tečnou rovinu ρ a k ní kolmou normálu ν . Podle nich klasifikujeme srážky:

středová (centrická) srážka nastane, leží-li těžiště obou těles na vektorové přímce nárazových sil. Pokud tomu tak není, jde o srážku **výstřednou (excentrickou)**;

přímá srážka nastane, je-li vzájemná rychlost \vec{W} těles kolmá k ρ (a tedy rovnoběžná s ν). Pokud tomu tak není, jde o srážku **šikmou**.

vrtná srážka nastane, pokud tělesa různě rotují kolem normály ν .

tříštivá srážka nastane, pokud se při ní tělesa mění nebo vznikají nová.

B.5.2 Povrch těles

Pokud tělesa rotují nebo pokud srážka není přímá, mají povrchy těles v místě styku nenulovou složku rychlosti v tečné rovině a záleží i na drsnosti povrchu, např. zda se sdílí vlastní moment hybnosti rotujícího tělesa.

B.5.3 Materiál těles

Jak již bylo řečeno, materiál těles rozhoduje, do jaké míry se kinetická energie E_k posuvného pohybu systému srážkou promění v jiné formy energie (zejména vnitřní). Podle toho pak probíhá srážka (pružná, nepružná; vzpruživost). Uvedme však, že vzpruživost k (str. 117) není úplně konstantní – klesá s rostoucí relativní rychlostí W a naopak pro $W \rightarrow 0$ roste a blíží se obvykle 1.

Příloha C

Veličina, měření, zápis hodnot

2015-09-21

C.1 Veličina: pojem, hodnota veličiny

Veličina je taková *vlastnost jevu* (např. zvuk), *tělesa* (např. tento list papíru) nebo *materiálu* (mosaz daného složení), kterou lze vyjádřit *číslem a referencí*. Toto číslo nazýváme **číselná hodnota** (dané veličiny); referencí bývá nejčastěji *jednotka* (např. milimetr za sekundu, značka $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ nebo mm/s), může to být též např. měřicí¹ postup (tvrdost podle Rockwella C se zátěží 150 kg, značka HRC(150 kg)).

Podle dřívějšího pojetí (VIM 2; pojetí „chybové“ či „tradiční“) se předpokládalo, že pro konkrétní objekt (např. pro tento list papíru) má konkrétní veličina (např. jeho tloušťka l_0) jistou zcela *přesnou*, ale *neznámou* hodnotu (např. $l_0 = 0,119\,827\,654\,376\dots$ mm). Měříme-li ji, dostaneme vždy nějakou náhodnou hodnotu jinou (např. $l = 0,116$ mm), nejspíše blízkou, ale vždy zatíženou principiálně neznámou *chybou* (zde je tedy $\Delta l = 0,003\,827\,654\,376\dots$ mm).

Současné pojetí (VIM 3; pojetí „nejistotové“) je jiné: předpokládá samotnou *definici hodnoty* veličiny pomocí *intervalu* (např. 0,115 mm až 0,121 mm, tedy $l_0 = 0,118(3)$ mm) s nenulovou **nejistotou** (zde 0,003 mm), přičemž *libovolná* hodnota (např. $l_1 = 0,116\,425\,76$ mm anebo $l_2 = 0,120\,05$ mm) uvnitř tohoto intervalu může stejně dobře sloužit pro daný účel (hodnota tloušťky papíru).

C.2 Zápis číselných hodnot veličin

Zápis číselných hodnot doporučuje norma ISO takto:

$$s = 23,386(12) \text{ mm} \quad (\text{doporučuje se}) \quad (\text{C.1})$$

Tento zápis má stejný význam jako dřívější

$$s = 23,386 \text{ mm} \pm 0,012 \text{ mm}, \text{ nebo} \quad (\text{C.2})$$

$$s = (23,386 \pm 0,012) \text{ mm}, \quad (\text{C.3})$$

ale se dvěma výhodami:

- je kratší a přehlednější (odpadají úvodní nuly v nejistotě)
- je věcně správný, zatímco zápisy podle rov. (C.2) či (C.3) vlastně správné nejsou: znamenaly by totiž jen dvě krajní hodnoty, nikoli celý interval mezi nimi (srv. obvyklý zápis řešení kvadratické rovnice $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$).

Rozměrově chybné jsou zápisy bez závorek typu

$$s = 23,386 \pm 0,012 \text{ mm} \quad (\text{chybně}). \quad (\text{C.4})$$

¹Rozlišujte „měřicí“ = určený k měření, od „měřící“ = ten, který právě měří. Podobně odlišujte čtecí, řídící, kropicí od čtoucí, řídící, kropící atp.

C.3 Popis os grafu, nadpis sloupce tabulky

Pro veličinu Q značí $[Q]$ její rozměr a $\{Q\}$ její číselnou hodnotu (jednotku lze též udat jako index u složené závorky). Správné označení v nadpisu číselných hodnot v tabulce či na ose grafu je např.

$$s/\text{mm}, \quad v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}), \quad v/(\text{m/s}), \quad \frac{v}{\text{m/s}}.$$

Je také správné, ale méně praktické, psát

$$\{s\}_{\text{mm}}, \quad \{v\}_{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}, \quad \{v\}_{\text{m/s}}.$$

Dříve občas užívaný zápis typu $s[\text{mm}]$ je nesprávný a navíc nelogický (platí naopak $[s] = \text{mm}$).

C.4 Měření – základní pojmy

Význam měření pro fyziku coby exaktní vědu jsme zmínili už na str.9. Měření spojitých veličin nikdy není (a z principu ani nemůže být) absolutně přesné. Dvě naměřené hodnoty téže veličiny, ať už po sobě či současně dvěma měřicími přístroji, nedají proto absolutně stejný výsledek — už proto, že každý měřicí přístroj má jen konečnou přesnost a zobrazovací možnost.

Předpokládejme nejjednodušší případ, že jde o opakované měření jediné veličiny, s nejistotou typu A (tj. získanou z opakovaných měření). Nechť je naměřeno stejnou metodou (tedy i se stejnou vahou) n veličin $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Nejistotou měření u se rozumí parametr charakterizující rozsah hodnot, tedy interval od $x - u$ do $x + u$ okolo výsledku měření x ; tento interval můžeme důvodně přiřadit hodnotě měřené veličiny.

Výběrový průměr \bar{x} je definován vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (\text{C.5})$$

Standardní nejistota $u = s_{\bar{x}}$ je v tom případě rovna výběrové směrodatné odchylce výběrového průměru, tedy

$$u = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{C.6})$$

Výsledek píšeme obecně ve tvaru $\bar{x} \pm u$, zápis v číselných hodnotách provedeme jako v rov. (C.1). Pravděpodobnost P , že odchylka skutečné hodnoty od udávané nepřekročí u , závisí na typu rozdělení. Pro normální (Gaussovo) je to 68,3 %, pro rovnoměrné 57,7 %, pro trojúhelníkové 65 %. Pravděpodobnost, že odchylka nepřekročí $2u$, je pro normální rozdělení 95,5 %, pro rovnoměrné plných 100 %, pro trojúhelníkové 96,6 %.

Rozšířená nejistota $U = k_U \cdot u$ se zavádí tam, kde se vyžaduje vysoká spolehlivost. Koefficient rozšíření intervalu pokrytí (stručně koefficient pokrytí) k_U se stanovuje zpravidla konvenčně (předpisem normy apod.). Zpravidla bývá od **2 (nejčastěji)** do 3, anebo se určí výpočtem pro známý typ rozdělení.

Pro velký počet ($n > 30$) opakovaných měření vycházejí pro různá P různé hodnoty k :

$$k_{0,9} = 1,645 \quad \text{pro } P = 90\%, \quad (\text{C.7})$$

$$k_{0,95} = 1,96 \quad \text{pro } P = 95\%, \quad (\text{C.8})$$

$$k_{0,99} = 2,576 \quad \text{pro } P = 99\%. \quad (\text{C.9})$$

Pro malá n předepisuje norma ISO vztah $U = 2k_n u$, kde k_n pro $n = 2$ až 9 je rovno

$$k_2 = 7,0; \quad k_3 = 2,3; \quad k_4 = 1,7; \quad k_5 = 1,4; \quad k_6 = 1,3; \quad k_7 = 1,3; \quad k_8 = k_9 = 1,2.$$

Zde byly pro jednoduchost zanedbány chyby typu B (tedy ty, které se nevypočítávají, ale jsou známy odjinud, jiným způsobem); s nimi se mění vztah pro rozšířenou nejistotu U na vztah

$$U = 2\sqrt{k_n^2 u_A^2 + u_B^2} \quad \text{a výsledek zapíšeme} \quad (\text{C.10})$$

$$x = \bar{x} \pm U \quad \text{nebo číselně se závorkou jako výše, viz rov. (C.1)}. \quad (\text{C.11})$$