Kapitola 3

Analytická mechanika

`4. pracovní verze. Uvítám všechny kritické připomínky. J.O. 6.6.02`

Ve vektorové (newtonovské) mechanice jsme sledovali hmotný bod (HB) s hmotností m (s časem neproměnnou) a s polohou $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, pod vlivem sil s výslednicí $\boldsymbol{F}$. Jeho pohyb byl v inerciální vztažné soustavě v kartézských souřadnicích popsán pohybovou rovnicí (2. N. z.)

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}. \tag{3.1}$$

Ta představuje pro 1 HB soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu pro tři neznámé funkce $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

V analytické mechanice popíšeme stav obecné mechanické soustavy vhodnými *obecnými souřadnicemi*, tj. proměnnými libovolného druhu (např. úhel). Časový vývoj soustavy (její pohyb) budeme zjišťovat pomocí vhodného *principu.*

3.1 Konfigurační prostor

Uvažujme N stejných částic, $n = 1 \dots N$; n-tá částice má souřadnice X_i^n, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, ..., N$. Přečíslujeme je podle schématu

$$X_i^n = x_j, \quad j = 3(n-1) + i.$$

Pak soustavu N částic popíšeme jediným bodem ve $3N$-rozměrném *konfiguračním prostoru.* Pohybové rovnice zůstávají formálně stejné:

$$F_i = m\ddot{x}_i, \tag{3.2}$$

jen i probíhá do 1 do $3N$.

3.2 Vazby, obecné souřadnice

3.2.1 Vazba

Vazba popisuje omezení, kladené na pohyb částic. Např. dva body na povrchu koule o poloměru R, zachovávající od sebe vzdálenost a, jsou popsány třemi vazbami:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2 &= 0; \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - R^2 &= 0; \\ (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2 - a^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uvedené vazby mají tvar $f_k(x_j) = 0$ a každá z nich definuje podprostor dimenze $N-1$ (nadplochu). Bod, popisující v konfiguračním prostoru systém, se tedy pohybuje jen po průsečnici nadploch zobrazujících vazby.

3.2.2 Typy vazeb

Vazba oboustranná: $f = 0$, bod je vázán na nadplochu, „nemůže z ní ven". Vazba jednostranná: $f \geq 0$ resp. $f \leq 0$, bod se může pohybovat po jisté ploše a nad ní, nikoli však pod (anebo obráceně).

Vazba skleronomní: $f(x_i) = 0$ nezávisí explicite na čase. Nemění proto energii HB. Vazba reonomní: $f(x_i, t) = 0$ se mění s časem (nabř. bod na nafukovaném míči) a může proto měnit energii.

Vazba holonomní, např. $f(x_i, t) = 0$ omezuje pouze polohu HB; neholonomní vazba omezuje explicite i směr pohybu: $f(x_i, \mathrm{d}x_j, t) = 0$.

Každou holonomní vazbu můžeme snadno převést na neholonomní; např. prostě vytvoříme její diferenciál, tj. z vazby

$$f(x_k) = 0$$

vznikne

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_{x_i} \mathrm{d}x_k = \sum_k A_k \; \mathrm{d}x_k = 0. \tag{3.4}$$

Je to triviální, protože omezíme-li pohyb na plochu, omezíme tím i možné směry pohybu (na směry tečné k této ploše).

Naopak neholonomní vazba může, ale nemusí být integrabilní, tj. převeditelná na holonomní (s vhodnou integrační konstantou). Prototyp neintegrabilní vazby ve 3 proměnných (méně proměnných nestačí!) je

$$x \; \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = 0$$

a naopak na tento tvar lze vhodnou volbou nových proměnných lokálně převést libovolnou neintegrabilní neholonomní vazbu ve 3 proměnných.

3.2.3 Obecné souřadnice

Obecné souřadnice jsou libovolné spojité parametry $q_i (i = 1 \dots F)$, popisující polohu bodu v konfiguračním prostoru o dimenzi F. Zpravidla je vybereme tak, aby některé z nich identicky splňovaly vazby a počítáme pak jen s ostatními. Např.: 2 body vázané na povrch koule jako výše; zvolíme sférické souřadnice $r_i, \theta_i, \varphi_i; \quad i = 1, 2$ a $r_1 = r_2 = R$; označíme potom např.

$$q_1 = \theta_1, \; q_2 = \theta_2, \; q_3 = \varphi_1, \; q_4 = \varphi_2.$$

Poslední vazba pak vede na tvar

$$\sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\theta' + K = 0,$$

kde značíme $a^2/2R^2 - 1 = K$.

Obecné rychlosti definujeme jako $\dot{q}_i \equiv \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. Pozor: obecnou hybnost p_i definujeme nikoli jako $m\dot{q}_i$, ale složitěji, viz odst.3.5.5.

3.2.4 Vystižení vazeb

- silami (pohyb je pak popsán L. r. 1. druhu)
- volbou obecných souřadnic q_i, vystihujících vazbu automaticky (pohyb je pak popsán L. r. 2. druhu). Má-li soustava F stupňů volnosti (tj. je-li právě potřeba F nezávislých spojitých parametrů k popsání její polohy), pak za tyto parametry zpravidla volíme x_1 až x_F; vazby jsou pak dány vztahy $x_{F+i} = 0$ pro $i = 1, \dots, 3N - F$.

3.3 Lagrangeovy rovnice 1.druhu

Chceme-li vystihnout vazbu silou (*vazbová síla*), pak tato síla

- musí udržet částici v souladu s vazbovou podmínkou
- nesmí konat práci (urychlovat nebo brzdit částici).

Řešení: je-li vazba $f(x_i) = 0$, musí být vazbová síla $\mathbf{\Phi}(x_j)$ k vazbou definované nadploše kolmá (pak nekoná práci), tedy $\mathbf{\Phi} = \lambda\, \mathbf{grad}\, f$; funkci $\lambda(x_i)$ vypočteme tak, aby opravdu částice na vazbě $f(x_i) = 0$ zůstala. Např. pro 1 bod v 3D prostoru a 1 vazbu (3-1=2 stupně volnosti) máme 3+1=4 neznámých: x_1, x_2, x_3, λ a 4 rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1 + \Phi_1 = F_1 + \lambda\tfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ m\ddot{x}_2 &= F_2 + \lambda\tfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ m\ddot{x}_3 &= F_3 + \lambda\tfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ f(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

(Názorně: otec usměrňuje neposedného synka na cestičce v parku.)

3.4 Princip virtuální práce

Pro volnou částici bylo podmínkou rovnováhy $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$. To lze říci tak, že při libovolném *virtuálním posunutí* $\delta\boldsymbol{r}$ je vykonaná *virtuální práce* δA rovna nule:

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{x}.$$

Takto formulujeme princip virtuální práce (zvaný též *princip virtuálních posunutí*) i při vázané částici, kde již $\delta\boldsymbol{r}$ nejsou libovolná, ale vyhovují vazbovým podmínkám. Je-li např. 1 částice v 3D podrobena 2 vazbám f, g, platí:

$$\begin{aligned} F_1\delta x_1 &+ F_2\delta x_2 + F_3\delta x_3 = 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 &+ \tfrac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \tfrac{\partial f}{\partial x_3}\delta x_3 = 0 \\ \tfrac{\partial g}{\partial x_1}\delta x_1 &+ \tfrac{\partial g}{\partial x_2}\delta x_2 + \tfrac{\partial g}{\partial x_3}\delta x_3 = 0 \end{aligned}$$

Jak ukážeme ekvivalenci těchto rovnic Lagrangeovým rovnicím 1. druhu? Můžeme např. „dřevorubecky“ z poslední rovnice vyjádřit δx_3 pomocí δx_2 a δx_1, dosadit do první a druhé rovnice, pak z poslední rovnice vyjádřit δx_2 pomocí δx_1 a dosadit do první rovnice. Při troše smůly však může náhodný výběr rovnic a eliminovaných proměnných δx_i selhat (např. zde, pokud by se v třetí rovnici náhodou nevyskytovalo δx_3). Obecnější je proto symetrický postup užívající *Lagrangeových multiplikátorů*: druhou rovnici vynásobíme zatím neznámým λ, třetí μ a sečteme:

$$\left(F_1 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\delta x_1 + \left(F_2 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\delta x_2 + \left(F_3 + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_3} + \mu\frac{\partial g}{\partial x_3}\right)\delta x_3 = 0.$$

Nyní naopak ponecháme libovolná δx_i a určíme λ, μ tak, aby všechny tři závorky vymizely.

Při postupu užitím principu virtuální práce se prostě zabýváme jen virtuálním posunutím, které respektuje vazby. Sestavení rovnic je pak mnohem snadnější a přehlednější.

Příklady: Rovnováha na páce. Člověk v kleci na kladce.

3.5 Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Hamiltonovy rovnice

3.5.1 Zákon zachování energie

Předpokládejme, že síly, působící v soustavě HB, mají potenciály a lze tedy najít skalární funkci $U(x_i)$ tak, že síly jsou jejím záporně vzatým gradientem: $\boldsymbol{F} = -\,\mathbf{grad}\, U$, resp. složkově $F_i = -\partial U(x_j)/\partial x_i$. Potom z pohybových rovnic v kartézských souřadnicích lze po skalárním vynásobení rychlostí $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t \equiv \boldsymbol{v}$ odvodit zákon zachování (mechanické) energie E_0:

$$\begin{gathered} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\,\mathbf{grad}\, U \\ m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\,\mathbf{grad}\, U \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + U\right) = 0 \\ T + U = \mathit{const} \equiv E_0, \end{gathered}$$

kde $T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}mv^2$ je kinetická energie systému.

3.5.2 Lagrangeovy rovnice v kartézských souřadnicích

Zavedeme-li Lagrangeovu funkci (lagranžián) $L = T - U$, platí

$$\partial L/\partial v_i = \partial T/\partial v_i, \qquad \partial L/\partial x_i = -\partial U/\partial x_i$$

a z Newtonových rovnic plyne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)_{x_k,v_k} - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)_{x_k,v_k} = 0 \qquad .$$

Podstatné je, že tyto rovnice zachovávají svůj tvar, i když od kartézských souřadnic x_i a rychlostí $v_i = \dot{x}_i \equiv \mathrm{d}x_i/\,\mathrm{d}t$ přejdeme k obecným souřadnicím $q_j = q_j(x_i)$ a obecným rychlostem $\dot{q}_i = \mathrm{d}q_i/\,\mathrm{d}t$. Abychom to dokázali, vyjádříme

$$q_j = q_j(x_i), \qquad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\dot{x}_i, x_i)$$

a explicite rozepíšeme

$$\dot{q}_j = \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\dot{x}_i;$$

odtud plyne „krácení tečkou“

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}.$$

Vyjádříme nyní Lagrangeovu rovnici s tím, že nový lagranžián $\mathcal{L}$ bude funkcí obecných souřadnic q_j a rychlostí $\dot{q}_j$ a jenom jejich prostřednictvím funkcí kartézských souřadnic x_i a rychlostí v_i. Bude tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k)$, přičemž platí

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \mathcal{L}\Big(\ q_k(x_i)\ ,\quad \dot{q}_k(x_i, \dot{x}_i)\ \Big)$$

Derivacemi $\mathcal{L}$ jako složené funkce odvodíme

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_j\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial v_i}\right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

$$= \sum_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \tag{3.6}$$

$$= \sum_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right) - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \tag{3.7}$$

$$= \sum_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \tag{3.8}$$

$$= \sum_j \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_i} = 0, \tag{3.9}$$

odkud plyne výsledek ve tvaru tzv. Lagrangeových rovnic 2. druhu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

3.5.3 Lagranžián

Lagranžián $\mathcal{L}$ je funkcí obecných souřadnic q_i a rychlostí $\dot{q}_i$; může být případně i explicite funkcí času t (implicitní funkcí času je samozřejmě, prostřednictvím $q = q(t)$ a $\dot{q} = \dot{q}(t)$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Obvykle ovšem nerozlišujeme typograficky L a $\mathcal{L}$; lagranžián značíme prostě L, ať je funkcí jakýchkoliv proměnných.

3.5.4 Hamiltonův princip, princip minimální akce

V matematice (variační počet) se dokazuje následující tvrzení:

Nechť je dán funkcionál

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_j(t), t)\ \mathrm{d}t;$$

výsledkem je tedy číslo, jehož hodnota ovšem při daném lagranžiánu závisí na volbě funkcí $q_i(t)$, popisujících pohyb HB s časem. Mezi všemi funkcemi $\boldsymbol{q}(t)$ nabývajících téže hodnoty $\boldsymbol{Q}_1$ v čase t_1 a hodnoty $\boldsymbol{Q}_2$ v čase t_2 nabývá integrál A minimální hodnotu pro tu funkci $\boldsymbol{q}(t)$, pro niž platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Obráceně tedy: skutečný pohyb se děje tak, aby integrál A byl minimální. Tento integrál $\int L\ \mathrm{d}t$ má ve fyzice význam akce, odtud název „princip minimální akce“.

3.5.5 Obecné hybnosti. Fázový prostor

Definitoricky zavádíme obecnou hybnost p_i vztahem $p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_i}$ (tedy nikoli jako $m\ \mathrm{d}\dot{q}_i$). Snadno se přesvědčíme, že přechází v „obyčejnou“ hybnost, má-li kinetická energie tvar $T = \frac{1}{2} m \sum \dot{q}_i^2$). Analogicky výraz $\frac{\partial L}{\partial q}$ nazýváme k-tou složkou obecné síly. (Rozmyslete si znaménko!)

$2F$-rozměrný prostor $\{q_i, p_i\}$ pro $i = 1 \dots F$ nazýváme *fázovým prostorem*. Např. 10 částic bez vazeb je popsáno jedním bodem v 60-rozměrném fázovém prostoru; 10 částic s 1 vazbou je popsáno jedním bodem v 58-rozměrném fázovém prostoru.

3.5.6 Hamiltonovy rovnice

Pohybové rovnice získají symetričtější tvar, vyjádříme-li je nikoli v obecných souřadnicích q_i a obecných rychlostech $\dot{q}_j$, ale v obecných souřadnicích q_i a obecných hybnostech p_j. Při přechodu k novým proměnným použijeme tzv. Legendreovu duální transformaci: místo funkce $L(q_i, \dot{q}_j)$ zavedeme novou funkci $H(q_i, p_j)$ vztahem

$$H(q_i, p_j) = p_k \dot{q}_k - L(q_i, \dot{q}_j),$$

kde na pravé straně dosadíme systematicky $\dot{q}_m = \dot{q}_m(q_i, p_j)$ tak, aby i pravá strana byla funkcí jen proměnných p_i, q_j a nikoli $\dot{q}_j$; přes index $_k$ se sčítá. Pro názornost – úplně rozepsáno:

$$H(q_i, p_j) = \sum_k p_k \dot{q}_k(q_i, p_j) - L(q_i, \dot{q}_m(q_i, p_j))$$

Určíme nyní $\partial H/\partial q_i$ a $\partial H/\partial p_i$ s využitím Lagrangeových rovnic, definičního vztahu $\partial L/\partial \dot{q}_k = p_k$ a relace $\partial p_i/\partial p_j = \delta_{ij}$:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \delta_{ji}\dot{q}_j + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i \equiv \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$$

Soustava 2N diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} \qquad ; \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$$

se nazývá Hamiltonovy rovnice a představuje pohybové rovnice v $2F$-rozměrném fázovém prostoru, tvořeném F souřadnicemi q_i a F souřadnicemi p_i (tj. obecnými souřadnicemi a jim příslušnými obecnými hybnostmi).

Význam hamiltoniánu:
$H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - T + U \ = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + U = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + U$;pokud je kinetická energie T homogenní kvadratickou funkcí rychlostí a potenciální energie U na rychlostech nezávisí, je suma rovna $2T$ a platí, že hamiltonián $H = T + U$ je roven celkové mechanické energii soustavy.