Kalkul pro fyziku

1 Binomická věta

Pro všechna komplexní x platí $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 \ldots$;
suma konverguje
a) pro komplexní $|x| < 1$ a reálné n;
b) pro přirozené n a libovolné komplexní x (suma pak má jen $n+1$ nenulových sčítanců).

2 Komplexní čísla a goniometrické funkce

Definujeme imaginární jednotku i (elektrotechnici ji značí „j") tím, že $\mathrm{i}^2 = -1$. (Někdy se proto píše $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.) Čísla typu $z = a + \mathrm{i}\, b$ nazýváme komplexními, pro sčítání i násobení platí pro ně stejné zákony (komutativní, asociativní, distributivní) jako pro reálná čísla. Číslo $\bar{z} = a - \mathrm{i}\, b$ nazýváme komplexně sdruženým k číslu $z = a + \mathrm{i}\, b$. Součet $z + \bar{z}$ i součin $z\bar{z}$ jsou reálné. Velikost komplexního čísla: $|z| = |a + \mathrm{i}\, b| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pro $z \neq 0$ lze psát $z = |z| \exp \mathrm{i}\, \varphi = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi)$.

V oboru komplexních čísel má každý polynom n-tého stupně právě n kořenů (se započtením event. násobnosti kořenů). Např. rovnice $z^2 = \mathrm{i}$ má dvě řešení $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$.

2.1 Moivre: $\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Odtud dostaneme snadno součtové vzorce typu
$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad ; \quad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
a z nich sečtením a odečtením
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad ; \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad ; \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

Dále platí zřejmě

$$\lg z = \lg |z| + \mathrm{i}\, \varphi \quad (\, + 2\, \mathrm{i}\, k\pi)$$

Komplexní mocninu komplexního čísla tedy upravíme např. takto:
$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = q$; vypočtěme nejprve $\lg q = \mathrm{i} \cdot \lg \mathrm{i} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}\, \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, odkud $q = \mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \exp(-\frac{\pi}{2}) \doteq 0,20788$.

3 Derivace

3.1 Definice

Zaveďme k funkci $f(x)$ její **derivaci** $f'(x)$ limitou

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \equiv \mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$$

(předpokládáme, že tato limita existuje). Ve fyzice se zpravidla Δf nazývá „přírůstek f" a nezdůrazňuje se limitní přechod. Jiné formulace: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ „časová změna hybnosti", „přírůstek hybnosti za jednotku času", $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ „dráha za jednotku času" apod.

Derivaci *podle času* značíme obvykle tečkou nad písmenem: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$.

3.2 Význam v aplikacích

- v grafu funkce $y(x)$ při souřadnicích x, y je $y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ **směrnicí tečny** křivky v bodě o souřadnici x (a pořadnici $y(x)$).

- má-li t význam času, je $\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ **rychlostí**: je-li s dráha, je $\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ rychlost pohybu; je-li T teplota, je $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ rychlost zahřívání apod.

3.3 Gramatika pro derivace

Jsou-li a, b konstanty a f, g, h funkce, platí

$$(af \pm bg)' = af' \pm bg' \quad ; \quad (fgh)' = f'gh + fg'h + fgh' \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \textbf{ pro } g \neq 0$$

3.3.1 Derivace složené funkce:

je-li $f = f(x)$, $x = \xi(t)$ a značíme-li $F(t) = f(\xi(t))$, platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \qquad \text{čili} \qquad \dot{F} = f'\dot{\xi}$$

Velmi často se ve fyzice nerozlišuje F od f (jde fyzikálně o tutéž veličinu, vyjádřenou ovšem jako funkci jiných proměnných a tedy z matematického hlediska o jinou funkci) a x od ξ; pak se píše např.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

3.3.2 Derivace inverzní funkce:

je-li $y = y(x)$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 monotonní a má-li nenulovou derivaci, pak existuje inverzní funkce $x = x(y)$, tj. pro $X \in U$ platí $x(y(X)) = X$, a její derivace je rovna

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

3.4 Slovník pro derivace

$$(\mathsf{konst})' = 0; \qquad (x^n)' = nx^{n-1}; \qquad (\ln|x|)' = 1/x$$
$$(\exp x)' = \exp x; \qquad (\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = (1 + x^2)^{-1}; \qquad (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$$

3.5 Vyšší derivace

Derivovanou funkci můžeme opět derivovat: $(f')' \equiv f'' \equiv f^{(2)}$, neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

a čteme „dé druhé f podle dé x druhé“. Podobně s tečkami: $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{r}}$.

3.6 Taylorův rozvoj

$$\boxed{f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(x) + \frac{a^3}{6}f'''(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a^k}{k!} f^{(k)} + \mathcal{O}(a^N)}$$

Řada konverguje k $f(x)$, pokud $\mathcal{O}(a^N) \to 0$ (kriteria Cauchy, Lagrange).

3.7 Funkce více proměnných

3.7.1 Parciální derivace

V případě funkce více proměnných se zavádí **parciální** derivace s označením

$$\frac{\underset{\cdot}{\mathrm{f}}(x,y,\ldots,z)}{\underset{\cdot}{\mathrm{x}}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, \ldots, z) - f(x)}{\Delta x} = \left(\frac{\underset{\cdot}{\mathrm{f}}}{\underset{\cdot}{\mathrm{x}}}\right)_{y,\ldots,z}$$

a čte se „parciální dé f podle dé x při konstantním $y, \ldots, z$“. Konstantností se rozumí to, že v procesu limity neměníme $y, \ldots, z$, ovšem výsledek sám — parciální derivace — je opět funkcí všech proměnných $x, y, \ldots, z$.

Přesně vzato, proměnné dole u závorky jen připomínají, ve kterých proměnných navíc (kromě těch, podle kterých derivujeme) má být vyjádřena derivovaná funkce, když už užíváme téhož písmene f pro uvažovanou fyzikální veličinu bez ohledu na to, ve kterých proměnných je vyjádřena (viz 3). Proměnná, podle níž se derivuje, mezi nimi být nemusí, ale může.

3.7.2 Derivace složené funkce více proměnných

Nechť je f funkcí více proměnných, např. $f = f(x,y)$ a tyto proměnné opět funkcemi další proměnné, např. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Pak můžeme zavést složenou funkci $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Obvykle se nerozlišuje F od f; uvedený vztah se pak píše např. jako

$$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}$$

4 Integrál

4.1 Definice

Je-li $F' = f$, pak nazýváme f derivací funkce F a F primitivní funkcí k funkci f; někdy též (neurčitým) integrálem. Primitivní funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu, protože funkce $F(x)$ a $F(x) + \mathsf{konst}$ mají touž derivaci. Výraz

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

nazýváme (určitým) integrálem z funkce f od hodnoty a („dolní mez“) do hodnoty b („ horní mez“ integrálu). Funkce $F(x) = \int_a^x f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$, tj. funkce horní meze integrálu, je primitivní funkcí k f, tj.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\ \mathrm{d}\xi = f(x)$$

Význam: plocha pod křivkou f nad osou x od a do b.

4.2 Slovník pro integrály

$$\int x^n\ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ pro } n \neq 1; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\left(\frac{|x|}{x_0}\right); \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$$

$$\int \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x; \quad \int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x; \quad \int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x$$

U primitivní funkce může být aditivní konstanta; pro stručnost ji nevypisujeme. Konstanta x_0 u logaritmu je libovolná, ale má fyzikální rozměr, a to stejný jako x; tím se předejde rozměrovým nesrovnalostem typu „logaritmus metru“.

4.3 Gramatika pro integrály

$$\int (\alpha f \pm \beta g)\ \mathrm{d}x = \alpha \int f\ \mathrm{d}x \pm \beta \int g\ \mathrm{d}x$$

Integrace per partēs: $\int f'g\ \mathrm{d}x = fg - \int fg'\ \mathrm{d}x$

Integrace substitucí: $\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(y)\ \mathrm{d}y$

Derivace podle parametru: $\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\ \mathrm{d}x = \int \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\ \mathrm{d}x$

Příklad: $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\ \mathrm{d}x = \alpha^{-1}\ \mathrm{e}^{\alpha x}$. Derivací obou stran podle α dostáváme snadno $\int x\ \mathrm{e}^{\alpha x}\ \mathrm{d}x = -\alpha^{-2}\ \mathrm{e}^{\alpha x} + \alpha^{-1} x\ \mathrm{e}^{\alpha x}$. Tak lze snadno spočítat integrály typu $\int P(x)\ \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ (dosazením $\alpha = -1$), $\int P(x) \cos x\ \mathrm{d}x$, $\int P(x) \sin x\ \mathrm{d}x$ apod., kde P je polynom. Téhož výsledku dosáhneme (v tomto případě) i integrací per partēs volbou $g' = 1$.