Minkowského geometrie

Základy Minkowského geometrie.
Prostoročasový interval jako vzdálenost. Klidový čas a klidová vzdálenost.

Lorentzovy transformace.
Vztah dvou inerciálních soustav, linearita transformací, invariance prostoročasového intervalu, pseudoortonormální transformace.

Speciální Lorentzovy transformace.
Pohyb podél osy x, řešení v 1+1 dimenzi. Rapidita a rychlost. Inverzní transformace. Galielova transformace pro malé rychlosti.

Vsuvka o hypergoniometrických funkcích.
Funkce Cosh, Sinh, Tanh. Definice, vztahy, derivace, součtové vzorce. Vztah ke goniometrickým funkcím.

Goniometrie v Minkowského geometrii.
Pseudokružnice. Rapidita, pseudoúhel a úhel. Prostoročasový pravoúhlý trojúhelník s časupodobnou a prostorupodobnou přeponou. Rovnice pseudokružnice. Rindlerovské (pseudopolární) souřadnice. Coshinova a příbuzné věty. Pseudosféry.

Základy Minkowského geometrie

(pseudo)vzdálenost dána (kvadr.) p-č. intervalu v libovolné IS dána

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

pseudo ⇐ "kvadrát" může být záporný

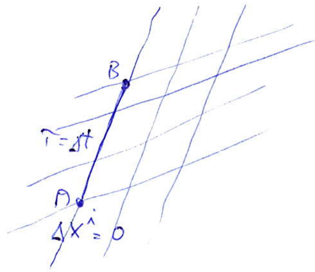
znaménko určuje kauzální vztah 2 událostí

význam p-č intervalu

$\Delta s^2 < 0$ události položené kauzálně

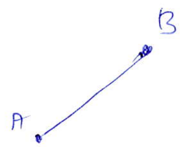
soustava pozorovatele, kt. prochází oběma událostmi
tj. obě události se odehrají "na stejném místě" IS

$$\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \underbrace{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}_{0} = -c^2\Delta t^2$$



Δs^2 určuje vl. čas mezi A, B volného pozor. míjejícího obě události

$$\tau = \Delta t = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta s^2}$$

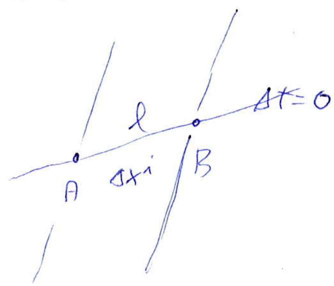


$\Delta s^2 = 0$ události spojené volný – max. signálem

$\Delta s^2 > 0$ události položené prostorupodobně.

lze nalézt soustavu, kde se události odehrály současně

$$\Delta s^2 = \underbrace{-c^2\Delta t^2}_{0} + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = l^2$$



Δs^2 určuje vzdálenost mezi A, B v soustavě kde se události odehrály současně

$$l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{\Delta s^2}$$

Lorentzovy transformace

vztahy mezi souřadnicemi dvou inerciálních soustav
1) lineární
2) výraz pro prostoročasový interval je invariantní

technicky:
1) linearita
- plyne z afinní struktury prostoročasu
$\Leftarrow$ existence globální IS + symetrie prostoročasu

soustavy S a S' se souř. x^α a $x^{\alpha'}$

$$x^{0'} = L^{0'}_{\ 0} x^0 + L^{0'}_{\ 1} x^1 + L^{0'}_{\ 2} x^2 + L^{0'}_{\ 3} x^3 + p^{0'}$$
$$x^{1'} = L^{1'}_{\ 0} x^0 + L^{1'}_{\ 1} x^1 + L^{1'}_{\ 2} x^2 + L^{1'}_{\ 3} x^3 + p^{1'}$$
$$\vdots$$

kompaktní zápis

$$x^{\alpha'} = \sum_{\mu=0}^{3} L^{\alpha'}_{\ \mu} x^\mu + p^{\alpha'} \overset{\substack{\text{ESP}\\ \downarrow}}{=} L^{\alpha'}_{\ \mu} x^\mu + p^{\alpha'}$$

Einsteinovo sčítací pravidlo

$$L^{\alpha'}_{\ \mu} x^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} L^{\alpha}_{\ \mu} x^\mu$$

- přes opakující se souřadnicový index se sčítá

posun počátku
konstanty $p^{\alpha'}$ charakterizují posun počátku
"triviální" operace - budeme většinou ignorovat
$p^{\alpha'} = 0$
tj. obě inerciální soust. mají stejný prostoročasový počátek

$$x^\alpha = 0 \quad \alpha = 0,\dots,3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^{\alpha'} = 0 \quad \alpha' = 0,\dots,3$$

pro rozdíl souřadnic dvou událostí Δx^α
posun počátku nehraje roli, tj. vždy máme

$$\Delta x^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\ \mu} \Delta x^\mu$$

2) invariance prostoročasového intervalu

zápis p-č. intervalu v IS:

$$\Delta S^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 =$$

$$= \underbrace{\eta_{\alpha\beta}}_{\text{dvojitá suma } \sum_{\alpha,\beta=0}^{3}} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta$$

kde matice $\eta_{\alpha\beta}$ má tvar

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{array}{c c} & \xrightarrow{\beta} \\ \alpha\downarrow & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \alpha,\beta = 0,1,2,3$$

Pozn: pokud bychom používali souřadnice t, x, y, z místo $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, měla by matice $\eta_{\alpha\beta}$ tvar

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{array}{c c} & \xrightarrow{\beta} \\ \alpha\downarrow & \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \alpha,\beta = t,x,y,z$$

nebudeme používat!

invariance vzorce pro prostoročasový interval

$$\Delta S^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = \eta_{\alpha'\beta'} \Delta x^{\alpha'} \Delta x^{\beta'}$$

kde $\eta_{\alpha\beta}$ i $\eta_{\alpha'\beta'}$ jsou stejné matice

$$\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \text{ a } \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ortonormalita transformací

1) a 2) omezují tvar transformace, tj. koeficient $L^{\alpha'}{}_{\beta}$

$$\Delta S^2 = \eta_{\alpha'\beta'} \Delta x^{\alpha'} \Delta x^{\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} L^{\alpha'}{}_{\mu} L^{\beta'}{}_{\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'} L^{\alpha'}{}_{\mu} L^{\beta'}{}_{\nu}$$

podmínka (pseudo) ortonormality

$L^{\alpha'}{}_{\beta}$ je (pseudo) ortonormální matice

Speciální Lorentzovy transformace

omezíme se na dvě inerc. soustavy pohybující se vůči sobě ve směru osy x

nabízí se hledat transformace pouze v "zúčastněných" směrech, tj. v rovině $t-x$ resp. $t'-x'$

budeme předpokládat

$$x^{2'} = x^2 \qquad x^{3'} = x^3 \qquad x^{0'}, x^{1'} \text{ závisí jen na } x^0, x^1$$

ekvivalentní omezení se na 2D podprostor $x^0 x^1$

transformace má tvar

$$x^{0'} = L^{0'}{}_0 x^0 + L^{0'}{}_1 x^1 \qquad\qquad ct' = A ct + B x$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x^{1'} = L^{1'}{}_1 x^1 + L^{1'}{}_1 x^1 \qquad\qquad x' = C ct + D x$$

$$x^{2'} = x^2$$

$$x^{3'} = x^3 \qquad\qquad A = L^{0'}{}_0 \quad B = L^{0'}{}_1 \quad C = L^{1'}{}_0 \quad D = L^{1'}{}_1$$

konstanty A, B, C, D jsou omezené podmínkou ortonormality

$$\eta_{00} = -1 = \eta_{\alpha'\beta'} L^{\alpha'}{}_0 L^{\beta'}{}_0 = \eta_{0'0'} A^2 + \eta_{0'1'} A C + \eta_{1'0'} C A + \eta_{1'1'} C^2$$

$$\Downarrow \quad -1 = -A^2 + C^2$$

$$\eta_{01} = 0 = \eta_{\alpha'\beta'} L^{\alpha'}{}_0 L^{\beta'}{}_1 = -AB + CD$$

$$\eta_{10} = 0 = \eta_{\alpha'\beta'} L^{\alpha'}{}_1 L^{\beta'}{}_0 = -BA + DC$$

$$\eta_{11} = 1 = \eta_{\alpha'\beta'} L^{\alpha'}{}_1 L^{\beta'}{}_1 = -B^2 + D^2$$

musíme vyřešit podmínky

$$1 = A^2 - C^2 \qquad\qquad AB = CD$$

$$1 = D^2 - B^2$$

řešení podmínek ortonormality

inspirace: úloha $M^2+N^2=1$ lze řešit parametrizací

$M=\cos\varphi \quad N=\sin\varphi$ => automaticky řeší podmínku

pro úlohu $M^2-N^2=1$ použijeme $\mathrm{ch}\beta$ a $\mathrm{sh}\beta$

$A^2-C^2=1 \iff A=\mathrm{ch}\beta \quad C=-\mathrm{sh}\beta$ pro nějaké β

$D^2-B^2=1 \iff D=\mathrm{ch}\bar\beta \quad B=-\mathrm{sh}\bar\beta$ pro nějaké $\bar\beta$

$AB - CD=0 \Rightarrow \mathrm{ch}\beta\,\mathrm{sh}\bar\beta-\mathrm{sh}\beta\,\mathrm{ch}\bar\beta=\mathrm{sh}(\beta-\bar\beta)=0$

$\Rightarrow \beta=\bar\beta$

dostáváme

$A=\mathrm{ch}\beta \quad B=-\mathrm{sh}\beta$

$C=-\mathrm{sh}\beta \quad D=\mathrm{ch}\beta$

$$L^{\alpha'}{}_{\beta}=\begin{bmatrix} \mathrm{ch}\beta & -\mathrm{sh}\beta & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\beta & \mathrm{ch}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

speciální Lorentzova transformace

$ct'=\mathrm{ch}\beta\, ct-\mathrm{sh}\beta\, x \qquad y'=y$

$x'=-\mathrm{sh}\beta\, ct+\mathrm{ch}\beta\, x \qquad z'=z$

význam parametru β

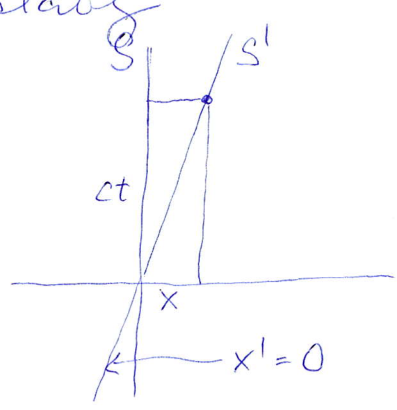
β - rapidita soustavy S' vůči S

- parametrizuje rychlost soustavy

v - rychlost S' vůči S tj.

rychlost světočáry $x'=0$

$v=\frac{x}{t}$ pro událost s $x'=0$



dostáváme

$0=x'=-\mathrm{sh}\beta\, ct+\mathrm{ch}\beta\, x$

$\Downarrow$

$\frac{v}{c}=\frac{\mathrm{sh}\beta}{\mathrm{ch}\beta}=\mathrm{th}\beta$

$\Downarrow$

$\mathrm{ch}\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\equiv\gamma \qquad \mathrm{sh}\beta=\mathrm{th}\beta\,\mathrm{ch}\beta=\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v}{c}\gamma$

speciální Lorentzovy transf. pomocí rychlosti

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c}x\right)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt)$$

kde

v rychlost S' vůči S v m/s

v/c bezrozměrná rychlost $\frac{v}{c} < 1$

β rapidita S' vůči S $\frac{v}{c} = \operatorname{th}\beta$

γ γ-faktor daný velikostí rychlosti $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \operatorname{ch}\beta$

inverzní transformace

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad x^0 = \operatorname{ch}\beta\, x^{0'} + \operatorname{sh}\beta\, x^{1'}$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x' + vt') \qquad x^1 = \operatorname{sh}\beta\, x^{0'} + \operatorname{ch}\beta\, x^{1'}$$

buď řešením vůči t, x nebo inverzí matice $L^{\alpha}{}_{\beta}$ nebo záměnou $v \to -v$ (pohyb v opačném směru)

Galileova transformace

pro $\frac{v}{c} \ll 1$ dostáváme $\gamma = 1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$

$$t' = t + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$x' = x - vt + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Vsuvka o hypergoniometrických funkcích

definice

$$\mathrm{ch}\,\beta = \frac{1}{2}(e^{\beta} + e^{-\beta}) \qquad\qquad e^{\beta} = \mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{sh}\,\beta = \frac{1}{2}(e^{\beta} - e^{-\beta}) \qquad\qquad e^{-\beta} = \mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{th}\,\beta = \frac{\mathrm{sh}\,\beta}{\mathrm{ch}\,\beta} \qquad \mathrm{coth}\,\beta = \frac{\mathrm{ch}\,\beta}{\mathrm{sh}\,\beta}$$

důsledky

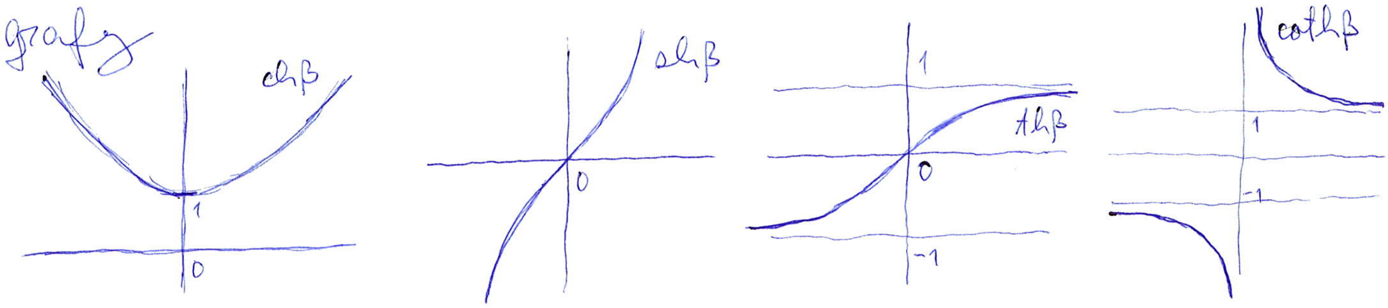
$$\mathrm{ch}^2\beta - \mathrm{sh}^2\beta = 1$$

důkaz: $\mathrm{ch}^2\beta - \mathrm{sh}^2\beta = (\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta)(\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta) = e^{\beta}e^{-\beta} = 1$

$$\mathrm{ch}^2\beta = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2\beta}$$

důkaz: $\dfrac{1}{1-\mathrm{th}^2\beta} = \dfrac{1}{1 - \frac{\mathrm{sh}^2\beta}{\mathrm{ch}^2\beta}} = \dfrac{\mathrm{ch}^2\beta}{\mathrm{ch}^2\beta - \mathrm{sh}^2\beta} = \mathrm{ch}^2\beta$

grafy



derivace

$$\mathrm{ch}'\beta = \mathrm{sh}\,\beta \qquad\qquad \mathrm{sh}'\beta = \mathrm{ch}\,\beta$$

$$\mathrm{th}'\beta = 1 - \mathrm{th}^2\beta = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\beta} \qquad\qquad \mathrm{coth}'\beta = 1 - \mathrm{coth}^2\beta = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2\beta}$$

součtové vzorce

$$\mathrm{ch}(\alpha+\beta) = \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{sh}(\alpha+\beta) = \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta$$

$$\mathrm{th}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{th}\,\alpha + \mathrm{th}\,\beta}{1 + \mathrm{th}\,\alpha\,\mathrm{th}\,\beta}$$

vztah k goniometrickým funkcím

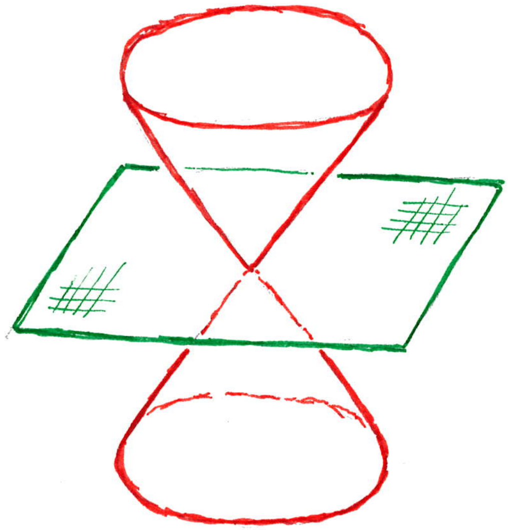
$$\mathrm{ch}(i\alpha) = \cos\alpha \qquad\qquad \cos(i\alpha) = \mathrm{ch}\,\alpha$$

$$\mathrm{sh}(i\alpha) = i\sin\alpha \qquad\qquad \sin(i\alpha) = i\,\mathrm{sh}\,\alpha$$

Goniometrie v Minkowského prostoročase

budeme zkoumat geometrii dvoudimenzionálních podprostorů
budeme sledovat linii
kružnice - úhel - pravoúhlý trojúhelník - goniom. fce - polární souřadnice

Prostorupodobná 2D rovina



= euklidovský 2D prostor
zvolíme rovinu x-y
standardní euklidovské definice

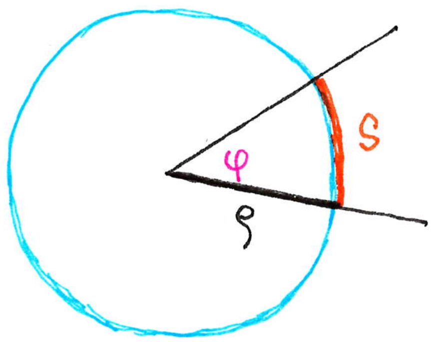
kružnice

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

ρ - poloměr prostorového charakt.
kružnice je prostorová křivka

úhel

$$\varphi = \frac{\text{délka oblouku}}{\text{délka poloměru}} = \frac{s}{\rho}$$



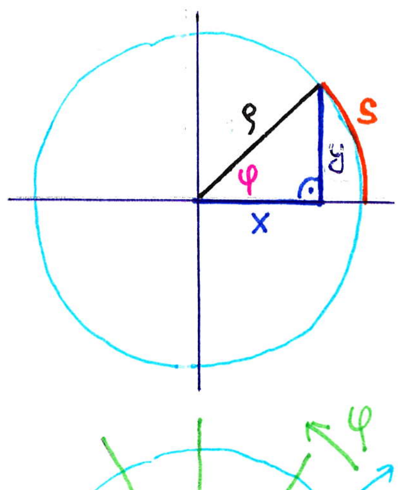
pravoúhlý trojúhelník

$$1 = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 \quad \Downarrow$$

$$\sin\varphi = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{x}{\rho}$$

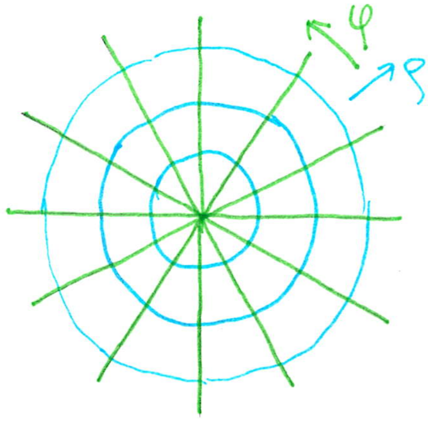
$$\tan\varphi = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{y}{x}$$



polární souřadnice
(parametrické vyjádření kružnice)

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

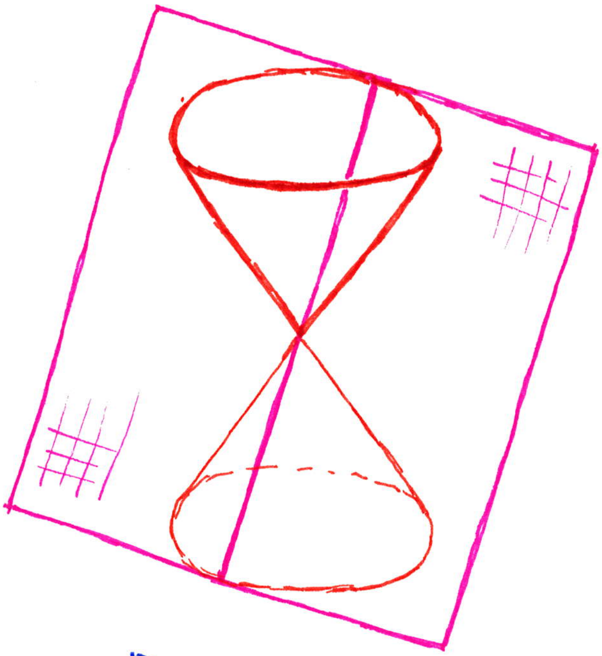


Nulová 2D rovina

= degenerovaná geometrie

rovina světelných paprsků

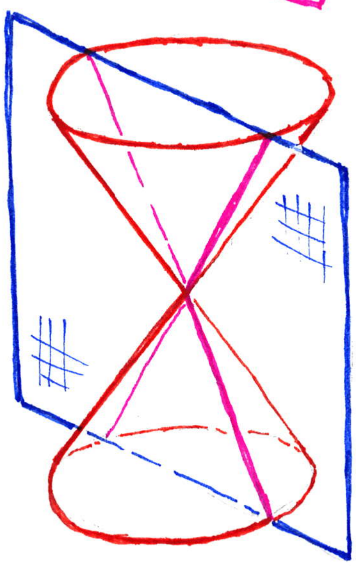
nebudeme se více zabývat



Časupodobná 2D rovina

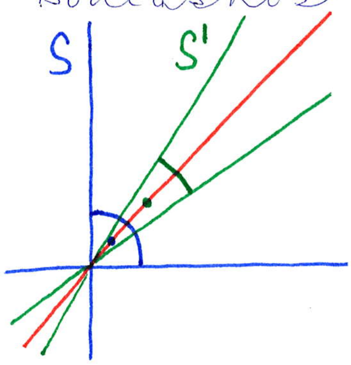
= Minkowského 2D prostor

zvolíme rovinu t-x

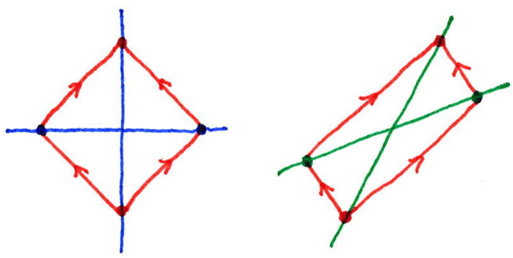


kolmost časového a prostorového směru

= světočára pozorovatele a jeho současnost

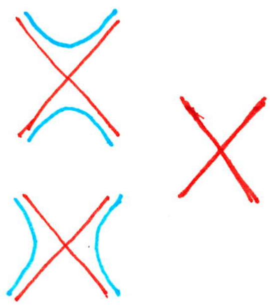


konstrukce kolmic:



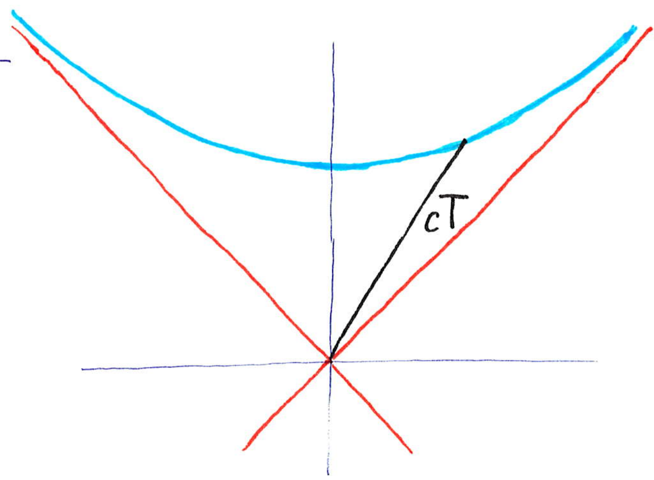
pseudokružnice

$$-c^2t^2 + x^2 = \text{konst} = \begin{cases} <0 & \text{prostorupodobná kr.} \\ =0 & \text{světelný kužel} \\ >0 & \text{časupodobná kr.} \end{cases}$$



Prostorupodobná pseudokružnice

$$-c^2T^2 = -c^2t^2 + x^2 \quad < 0$$



cT časupodobný "poloměr"

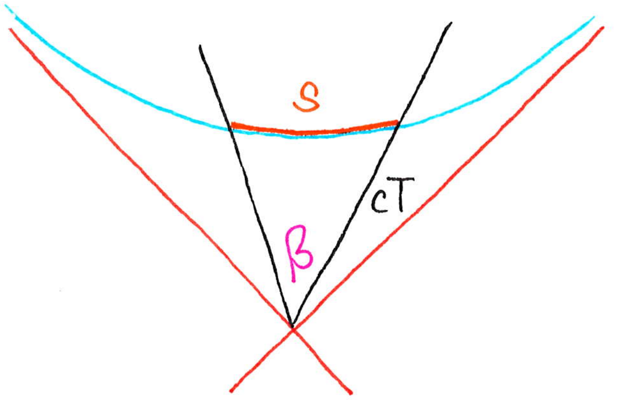
pseudokružnice je hyperbola ve smyslu euklidovského pr. diagramu

T>0 pseudokruž. v budoucím svět. kuž.

T<0 pseudokruž. v minulém svět. kuž.

rapidita (geometricky)

$$\beta = \frac{\text{pseudodélka oblouku}}{\text{pseudodélka poloměru}} = \frac{s}{cT}$$



charakterizuje vztah dvou volných pozorovatelů, tj. parametrizuje vzájemnou rychlost

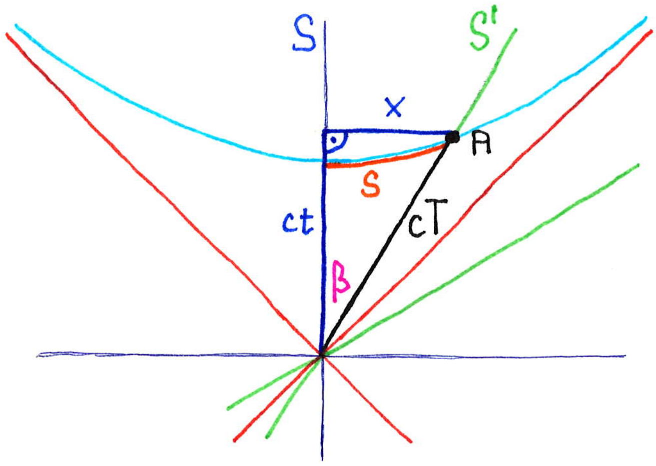
pravoúhlý trojúhelník

$$1 = \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \left(\frac{x}{cT}\right)^2 \qquad \Downarrow$$

$$\operatorname{sh}\beta = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{x}{cT}$$

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{ct}{cT}$$

$$\operatorname{th}\beta = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{x}{ct}$$



β má význam rapidity $\frac{s}{cT}$ dokážeme, až budeme umět spočítat s

souvislost s Lorentzovou transf.

soustava S' s časovou osou danou přeponou

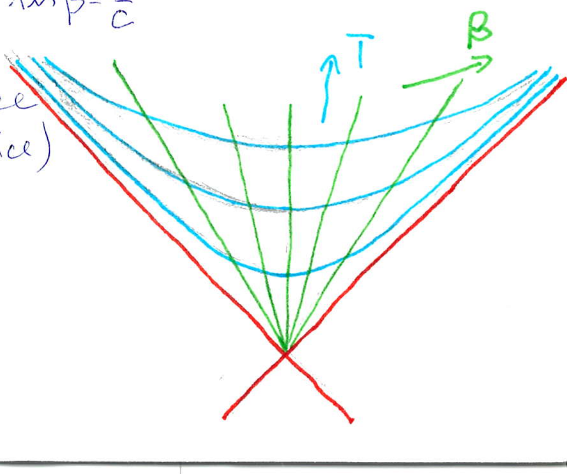
událost A: $ct' = cT \quad x' = 0$ Lorentz tr. $\Downarrow$

$$\Rightarrow \quad ct = \operatorname{ch}\beta\, ct' + \operatorname{sh}\beta\, x' = cT \operatorname{ch}\beta$$

$$x = \operatorname{sh}\beta\, ct' + \operatorname{ch}\beta\, x' = cT \operatorname{sh}\beta$$

$\Rightarrow$ rapidita β je parametr z Lorentz tr. $\quad \operatorname{th}\beta = \frac{v}{c}$

pseudopolární (Rindlerovy) souřadnice (parametrické vyjádření pseudokružnice)

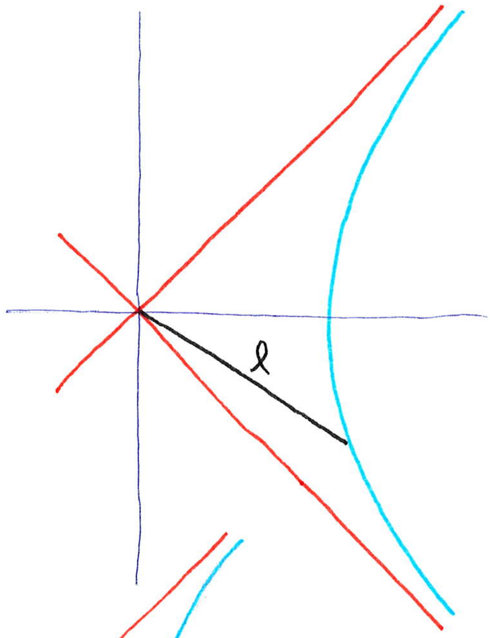


$$x^0 = ct = cT \operatorname{ch}\beta \qquad cT = \sqrt{(ct)^2 - x^2}$$

$$x^1 = x = cT \operatorname{sh}\beta \qquad \operatorname{th}\beta = \frac{x}{ct}$$

Časupodobná pseudokružnice

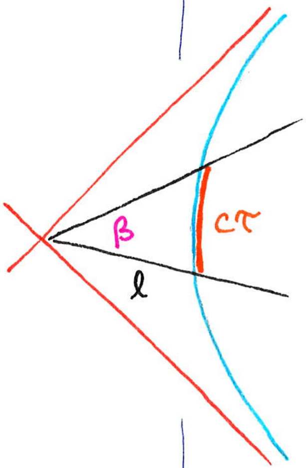
$$l^2 = -c^2t^2 + x^2 \quad > 0$$



l prostorupodobný poloměr
pseudokružnice je hyperbola ve smyslu euklidovského př. diagramu
$l>0$ pseudokružnice "napravo" $(x>0)$
$l<0$ pseudokružnice "nalevo" $(x<0)$

pseudoúhel

$$\beta = \frac{\text{pseudodélka oblouku}}{\text{pseudodélka poloměru}} = \frac{c\tau}{l}$$



τ je vlastní čas pozorovatele se světočárou danou pseudokružnicí
tzv. hyperbolický pohyb

pravoúhlý trojúhelník

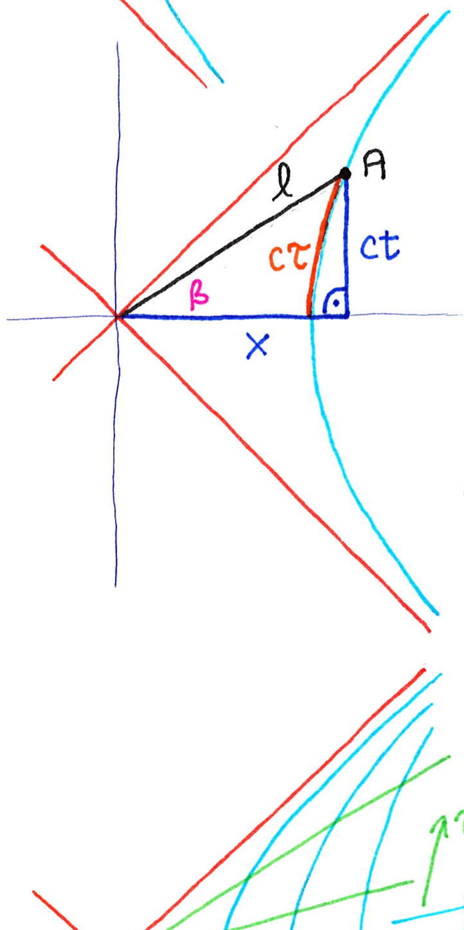
$$1 = \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{ct}{l}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{sh}\beta = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{ct}{l}$$

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{x}{l}$$

$$\operatorname{th}\beta = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{ct}{x}$$



β má význam pseudoúhlu $\frac{c\tau}{l}$ dokážeme, až budeme umět spočítat τ

souvislost s Lorentzovou transf.
soustava S' s prostorovou osou danou přeponou
událost A: $ct' = 0 \quad x' = l$

$$\Rightarrow ct = \operatorname{ch}\beta\, ct' + \operatorname{sh}\beta\, x' = l \operatorname{sh}\beta$$

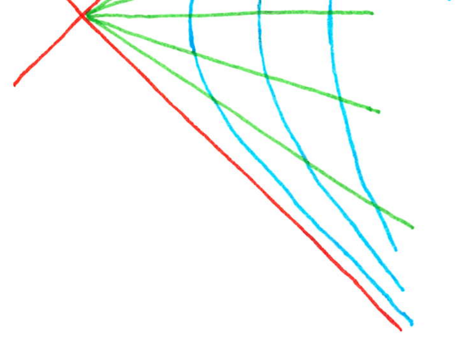
$$x = \operatorname{sh}\beta\, ct' + \operatorname{ch}\beta\, x' = l \operatorname{ch}\beta$$

$\Rightarrow$ pseudoúhel β je parametr z Lorentzovy transf. $\operatorname{th}\beta = \frac{v}{c}$

pseudopolární (Rindlerovy) souřadnice
(parametrické vyjádření pseudokružnice)

$$x^0 = ct = l \operatorname{sh}\beta \qquad l = \sqrt{-c^2t^2 + x^2}$$

$$x^1 = x = l \operatorname{ch}\beta \qquad \operatorname{th}\beta = \frac{ct}{x}$$

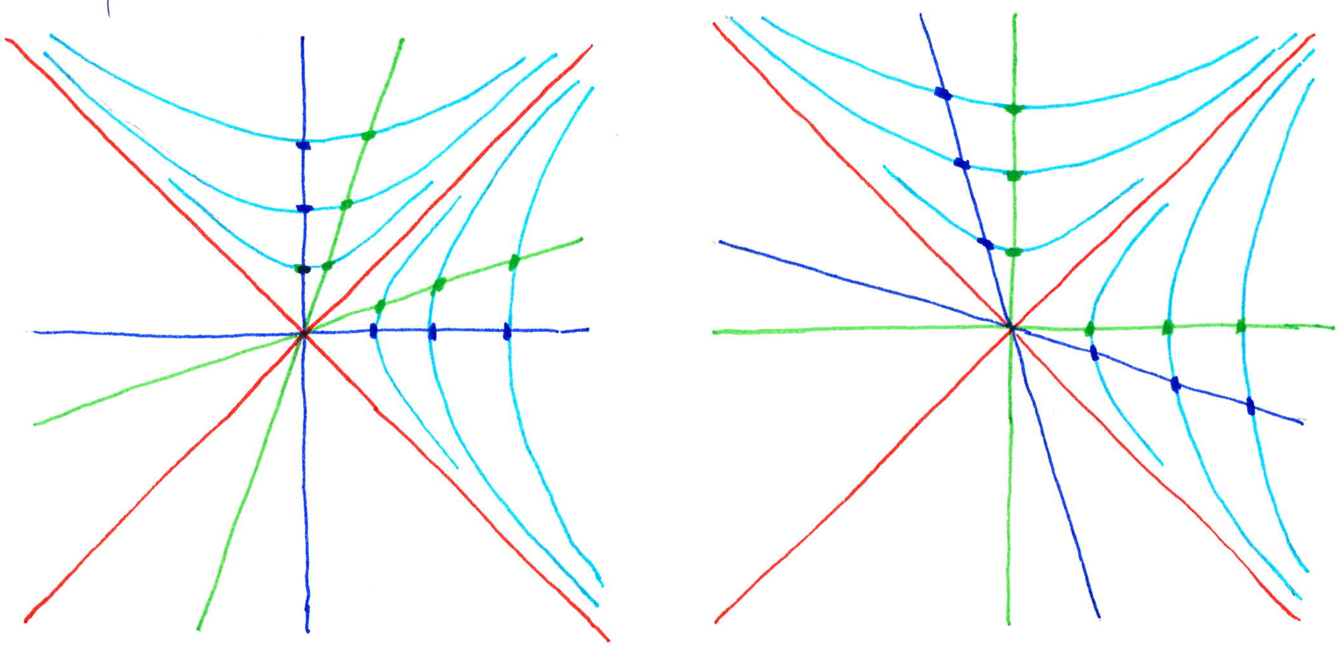


Pseudovzdálenost v prostoročasových diagramech

p-č diagramy deformují p-č interval!
zobrazujeme Minkowského geom. v euklidovském prostoru
pojem vzdálenosti není stejný

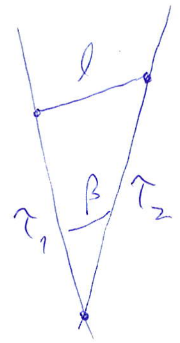
prostoročasový diagram je vždy přizpůsoben jedné
zvolené inerciální soustavě
ve směru os této soustavy (vertikální a horizont. směry)
je vzdálenost zobrazena věrně
pro "šikmé" směry je vzdálenost zdeformovaná
jiná inerc. soustava se jeví "zmáčknutá"

vždy je možno nakreslit další p-č diagram, který
je přizpůsobena jiné inerciální soustavě
délky na "šikmých" směrech lze odečís pomocí
pseudokružnic



Coshinová věta

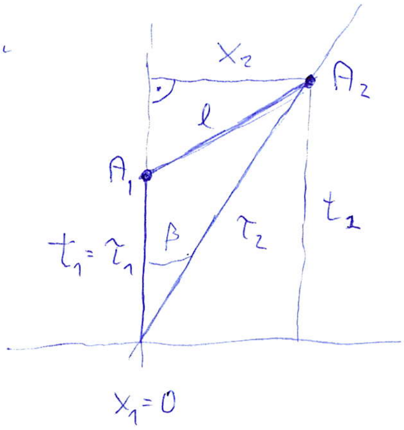
obecný prostoročasový trojúhelník



délka prostorupodobné strany

$$l^2 = -c^2\left(\tau_1^2 + \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_2 \operatorname{ch}\beta\right)$$

zvolíme IS spojenou s jednou světočárou



$$
\begin{aligned}
l^2 &= -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = \\
&= -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \\
&= -c^2(\tau_2 \operatorname{ch}\beta - \tau_1)^2 + \operatorname{sh}^2\beta\, c^2 \tau_2^2 \\
&= -c^2\left[\tau_2^2 \operatorname{ch}^2\beta - \tau_2^2 \operatorname{sh}^2\beta \right. \\
&\qquad \left. - 2\tau_1\tau_2 \operatorname{ch}\beta + \tau_1^2\right] \\
&= -c^2\left[\tau_1^2 + \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_2 \operatorname{ch}\beta\right]
\end{aligned}
$$

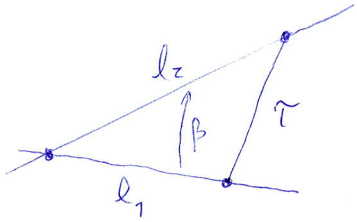
$t_1 = \tau_1$

$x_1 = 0$

$t_2 = \tau_2 \operatorname{ch}\beta$

$x_2 = \tau_2 \operatorname{sh}\beta$

délka časupodobné strany



$$-c^2\tau^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \operatorname{ch}\beta$$

zvolíme IS spojenou s jednou přímkou

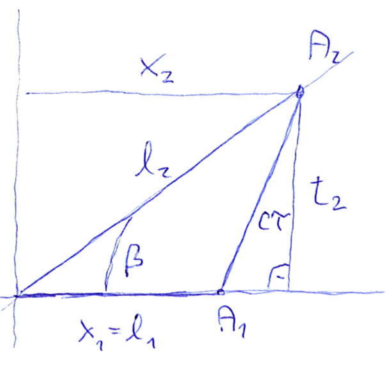
$$
\begin{aligned}
-c^2\tau^2 &= -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = \\
&= -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \\
&= l_2^2 \operatorname{sh}^2\beta + (l_2 \operatorname{ch}\beta - l_1)^2 \\
&= l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \operatorname{ch}\beta
\end{aligned}
$$

$t_1 = 0$

$x_1 = l_1$

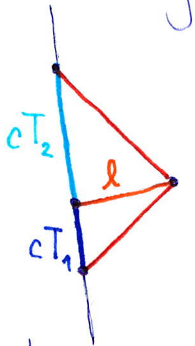
$ct_2 = l_2 \operatorname{sh}\beta$

$x_2 = l_2 \operatorname{ch}\beta$



Světelný signál mezi dvěma pozorovateli

(1)

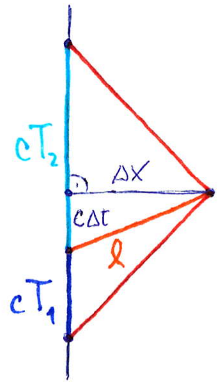


$$\boxed{\ell^2 = c^2 T_1 T_2}$$

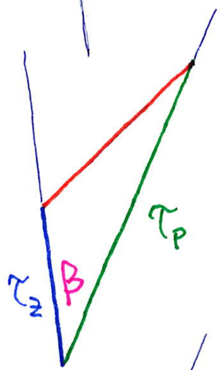
důk: $\ell^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 =$

$= (\Delta x - c\Delta t)(\Delta x + c\Delta t)$

$= c^2 T_1 T_2$



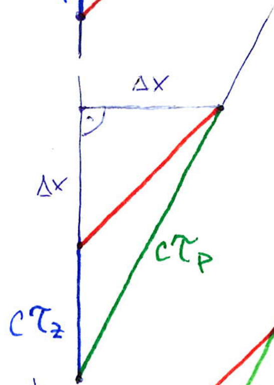
(2)



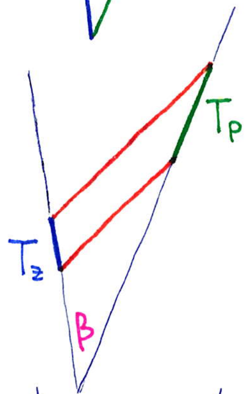
$$\boxed{\frac{\tau_p}{\tau_z} = e^{\beta}}$$

důk: $\mathrm{ch}\,\beta = \dfrac{\Delta x + c\Delta\tau_z}{c\Delta\tau_p}$ $\quad \mathrm{sh}\,\beta = \dfrac{\Delta x}{c\Delta\tau_p}$

$\Rightarrow e^{-\beta} = \mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta = \dfrac{\Delta x + c\Delta\tau_z}{c\Delta\tau_p} - \dfrac{\Delta x}{c\Delta\tau_p} = \dfrac{\Delta\tau_z}{\Delta\tau_p}$



(3)

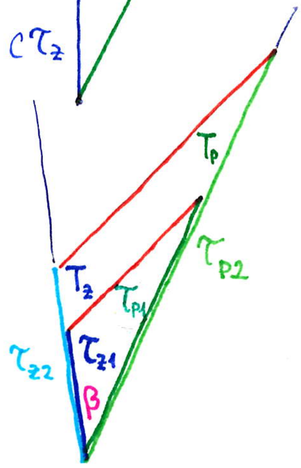


$$\boxed{\frac{T_p}{T_z} = e^{\beta}}$$

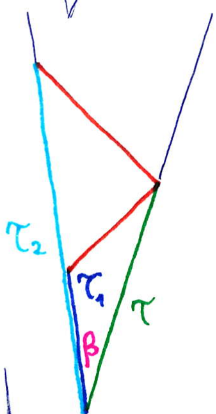
důk: $T_p = \tau_{p2} - \tau_{p1}$ $\quad T_z = \tau_{z2} - \tau_{z1}$

$\tau_{p1} \overset{(2)}{=} \tau_{z1} e^{\beta}$ $\quad \tau_{p2} \overset{(2)}{=} \tau_{z2} e^{\beta}$

$\dfrac{T_p}{T_z} = \dfrac{\tau_{z2} e^{\beta} - \tau_{z1} e^{\beta}}{\tau_{z2} - \tau_{z1}} = e^{\beta}$



(4)



$$\boxed{\tau^2 = \tau_1 \tau_2}$$

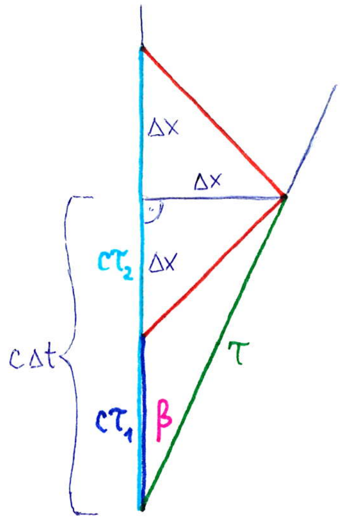
$$\boxed{\frac{\tau_2}{\tau_1} = e^{2\beta}}$$

důk: $-c^2\tau^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 =$

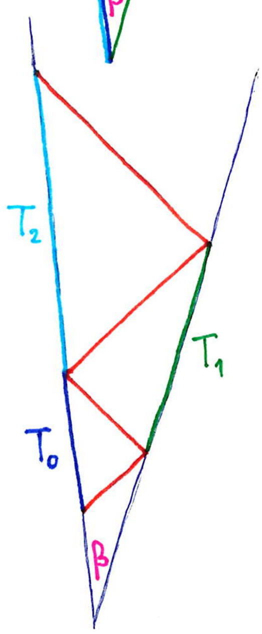
$= (\Delta x - c\Delta t)(\Delta x + c\Delta t) =$

$= -c\tau_1\, c\tau_2$

$\dfrac{\tau_2}{\tau_1} = \dfrac{\tau_2}{\tau}\dfrac{\tau}{\tau_1} \overset{(2)}{=} e^{\beta} e^{\beta} = e^{2\beta}$



(5)



$$\boxed{T_1^2 = T_0 T_2}$$

$$\boxed{\frac{T_2}{T_0} = e^{2\beta}}$$

$$\boxed{\frac{v}{c} = \frac{T_2 - T_0}{T_2 + T_0}}$$

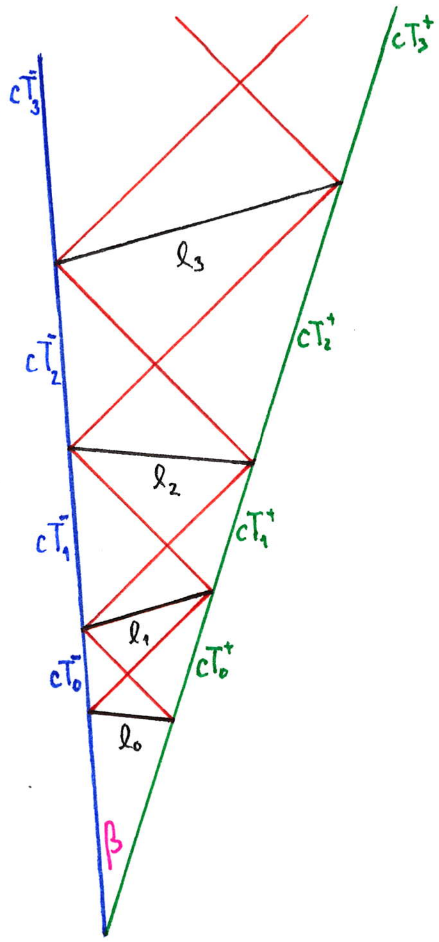
důk: $1 = e^{-\beta} e^{\beta} \overset{(3)}{=} \dfrac{T_0}{T_1}\dfrac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_1^2 = T_0 T_2$

$\dfrac{T_2}{T_0} = \dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{T_1}{T_0} \overset{(3)}{=} e^{\beta} e^{\beta} = e^{2\beta}$

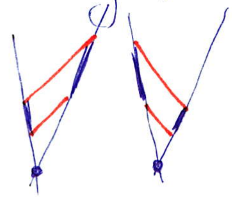
$\dfrac{v}{c} = \mathrm{th}\,\beta = \dfrac{\mathrm{sh}\,\beta}{\mathrm{ch}\,\beta} = \dfrac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{\beta}} =$

$\overset{(3)}{=} \dfrac{T_2/T_1 - T_0/T_1}{T_2/T_1 + T_0/T_1} = \dfrac{T_2 - T_0}{T_2 + T_0}$

Dva světelné signály mezi dvěma pozorovateli

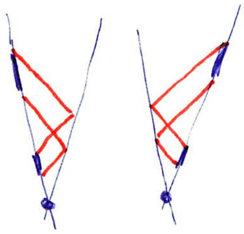


(I)



$$\frac{T_z^+}{T_{z-1}^-} = \frac{T_z^-}{T_{z-1}^+} = e^{\beta}$$ viz (3)

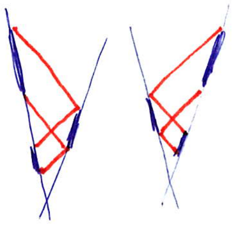
(II)



$$\frac{T_{z+1}^-}{T_{z-1}^-} = \frac{T_{z+1}^+}{T_{z-1}^+} = e^{2\beta}$$ 2× (3)

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th}\beta = \frac{T_{z+1}^+ - T_{z-1}^+}{T_{z+1}^+ + T_{z-1}^+} = \frac{T_{z+1}^- - T_{z-1}^-}{T_{z+1}^- + T_{z-1}^-}$$ jako (5)

(III)

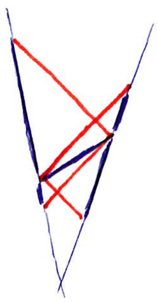


$$T_z^{+\,2} = T_{z-1}^- \, T_{z+1}^-$$

$$T_z^{-\,2} = T_{z-1}^+ \, T_{z+1}^+$$

důk: $T_z^{\pm\,2} \overset{(3)}{=} T_{z+1}^{\mp} e^{-\beta} \, T_{z-1}^{\mp} e^{\beta} = T_{z+1}^{\mp} \, T_{z-1}^{\mp}$

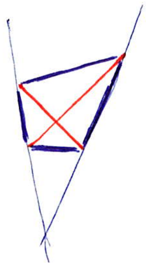
(IV)



$$l_z^2 = c^2 T_{z-1}^- T_z^- = c^2 T_{z-1}^+ T_z^+$$ viz (1)

$$= c^2 \sqrt{T_{z-1}^- T_z^- T_{z-1}^+ T_z^+}$$

(V)

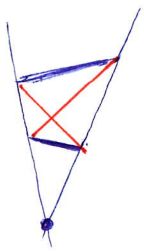


$$l_z \, l_{z+1} = c^2 \, T_z^- \, T_z^+$$

důk: $l_z^2 l_{z+1}^2 \overset{(IV)}{=} c^4 \sqrt{\underset{e^{-\beta}T_z^+}{\underset{\parallel}{T_{z-1}^-}} \, \underset{e^{-\beta}T_z^-}{\underset{\parallel}{T_{z-1}^+}} \, T_z^- T_z^+} \sqrt{T_z^- T_z^+ \, \underset{e^{\beta}T_z^+}{\underset{\parallel}{T_{z+1}^-}} \, \underset{e^{\beta}T_z^-}{\underset{\parallel}{T_{z+1}^+}}}$ (3):

$$= \left(c^2 \, T_z^- \, T_z^+\right)^2$$

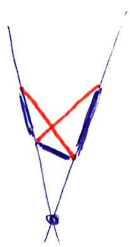
(VI)



$$\frac{l_{z+1}}{l_z} = e^{\beta}$$

důk $\left(\frac{l_{z+1}}{l_z}\right)^2 \overset{(IV)}{=} \frac{\sqrt{T_{z+1}^- T_{z+1}^+ T_z^- T_z^+}}{\sqrt{T_z^- T_z^+ T_z^- T_z^+}} \overset{(3)}{=} \sqrt{\frac{e^{\beta} e^{\beta}}{e^{-\beta} e^{-\beta}}} = e^{2\beta}$

(VII)



$$l_z^2 = c^2 \, T_z^- \, T_z^+ \, e^{-\beta}$$

důk (V) + (VI)

(pseudo)sféry

analogie ve vyšší dimenzi

⊖ $\Delta s^2 = -c^2\tau_0^2 \equiv \text{konst} < 0$

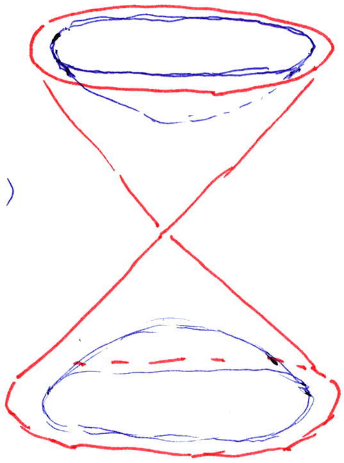
$-c^2\tau_0^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$

rotační dvojdílný hyperboloid (E)

prostorupodobné plochy

Lobačevského geometrie!

(geom. konst záporné křivosti)



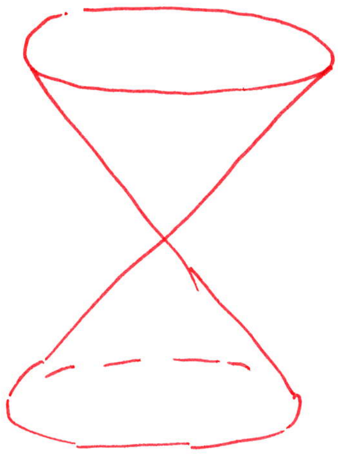
⊙ $\Delta s^2 = 0$

$0 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$

kuželová plocha (E)

světelný kužel

degenerovaná geometrie



⊕ $\Delta s^2 = l^2 \equiv \text{konst} > 0$

$l^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 - z^2$

rotační jednodílný hyperboloid (E)

časupodobná plocha

deSitterova geometrie

(pseudogeometrie konst kl. křivosti)