Matematický aparát

Prostoročas jako čtyřdimenzionální afinní prostor.

Prostoročas – prostor událostí. 4-vektory, 4-kovektory, duální báze. Prostoročasové tenzory, komponenty tenzorů, zúžení (kontrakce), tenzory jako lineární zobrazení.

Minkowského geometrie.

Pseudoskalární součin a Minkowského metrika. Význam pseudoskalárního součinu. Zvyšování a snižování indexů.

Časové a prostorové složky.

Inerciální soustava, pseudoortonormální báze. Časová normála a prostorové 3-vektory.

Prostoročasový gradient.

Gradient a derivace ve směru. Komponenty gradientu. Rozštěpení na časovou a prostorovou část. Gradient tenzorů.

Transformace komponent tenzorů.

Transformace bází, transformace komponent tenzorů, pseudoortonormální transformce.

Globální a lokální popis.

Globálnost inerciálních souřadnic. Obecné křivočaré souřednice, asociované báze vektorů a forem. Derivace ve směru, gradient v křivočarých souřadnicích. Změna souřadnic, transformace komponent tenzorů. Jednoznačnost třídy inerciálních souřadnic.

Prostoročas jako čtyřdimenzionální afinní prostor

prostoročas – 4D prostor událostí

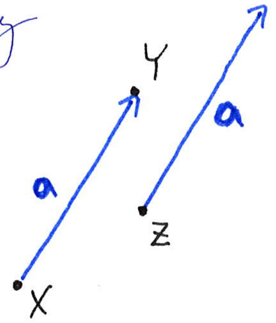
STR: afinní prostor s Minkowského geometrií

afinní struktura

- existence globálních vektorů, tzv. 4-vektory
- vektor je dán dvojicí bodů (událostí)

$\mathbf{a} = Y - X \qquad Y = X + \mathbf{a}$

- stejný vektor můžeme umístit do libovolného bodu – globální rovnoběžnost



4-vektory

4D prostor směrů v prostoročase

díky globální rovnoběžnosti nemusíme mluvit o lokalizaci vekt.

báze = čtveřice lineárně nezávislých vektorů

$\mathbf{e}_\alpha \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$ 0 budeme používat pro časový směr

komponenty

$$\mathbf{a} = \sum_\alpha a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

Einsteinova sčítací konvence

a^α jsou komponenty $\mathbf{a}$ vůči bázi $\mathbf{e}_\alpha$

komponenty vektorů budeme psát ve sloupečku $a^\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$

4-kovektory (též formy či 1-formy)

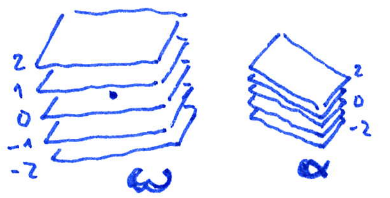
duální prostor k prostoru 4-vektorů = prostor lin. fcionálů na vekt.

dualita je symetrický vztah:

4-vektory jsou duální prostor k prostoru 4-kovektorů

geom. interpretace kovektoru

- systém očíslovaných rovnoběžných ploch

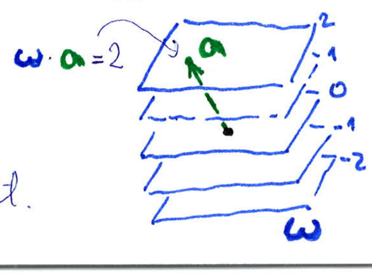


dualita

$$\omega[\mathbf{a}] = \mathbf{a}[\omega] = \langle \omega, \mathbf{a} \rangle = \omega \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \omega \in \mathbb{R}$$

bilineární operace přiřazující kovektoru a vektoru číslo

geometricky: číslo plošky na kterou ukazuje vekt.



báze = čtveřice lineárně nezávislých kovektorů

$\boldsymbol{\epsilon}^\alpha \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$ $\qquad$ 0 pro kovektor s ploškami odpovíd. času

komponenty

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_\alpha \omega_\alpha \boldsymbol{\epsilon}^\alpha \equiv \omega_\alpha \boldsymbol{\epsilon}^\alpha$$ Einsteinova sčítací konv.

ω_α jsou komponenty kovektoru $\boldsymbol{\omega}$ vůči bázi $\boldsymbol{\epsilon}^\alpha$

komponenty kovektorů budeme psát do řádku $\omega_\alpha \leftrightarrow [\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$

dualita bází

vždy budeme volit duální báze vektorů a kovektorů

$$\boldsymbol{\epsilon}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

dualita v komponentách

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a} = \omega_\alpha a^\alpha \quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a} = \omega_\alpha \boldsymbol{\epsilon}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta a^\beta \overset{\text{dualita bází}}{=} \omega_\alpha \delta^\alpha_\beta a^\beta = \omega_\alpha a^\alpha$$

$$= [\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] \cdot \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

tenzory

= výsledky formálních součinů a součtů vekt. a kovektorů za použití standard. pravidel distributivity a asociativity

$A = 3\,a\otimes b + 2\,b\otimes c$ $\quad B = a\otimes c$ $\quad A + 5B + c\otimes a$ $\quad$ stupeň: $\binom{2}{0}$ (vektory) (kovekt.)

$u\otimes v\otimes \omega$ $\quad 2A\otimes \sigma + a\otimes c\otimes \omega$ $\quad a\otimes(b\otimes\omega + c\otimes\sigma)$ $\quad$ stupeň $\binom{2}{1}$

tenzor je K× kontravariantní a L× kovariantní pokud obsahuje K vektorů a L kovektorů

vektor je tenzor stupně $\binom{1}{0}$

kovektor je tenzor stupně $\binom{0}{1}$

obecný tenzor stupně $\binom{K}{L}$ je lineární kombinace součinů K vektorů báze a L kovektorů báze

$$A = \underbrace{A^{\alpha_1\dots\alpha_K}_{\beta_1\dots\beta_L}}_{\substack{\text{komponenty}\\ \text{tenzoru}\\ 4^{K+L}\text{ čísel}}} \underbrace{e_{\alpha_1}\otimes\dots\otimes e_{\alpha_K}}_{\substack{\text{K vektorů}\\ \text{báze}}}\otimes \underbrace{\epsilon^{\beta_1}\otimes\dots\otimes\epsilon^{\beta_L}}_{\substack{\text{L kovektorů}\\ \text{báze}}}$$

Einstein. sč. konv. !!!

často budeme místo tenzoru A psát jen jeho komponenty $A^{\alpha_1\dots\alpha_K}_{\beta_1\dots\beta_L}$ musí být ale jasné, vůči jaké bázi to jsou komponenty

operace s tenzory

násobení tenzorů číslem

$r\,A$ $\qquad r\,A^{\mu\dots}_{\nu\dots}$

sčítání tenzorů

$A + B$ $\qquad A^{\mu\dots}_{\nu\dots} + B^{\mu\dots}_{\nu\dots}$ $\qquad$ (stejný stupeň)

tenzorové násobení

$C = A\otimes B = AB$ $\qquad C^{\kappa\dots\,\mu\dots}_{\lambda\dots\,\nu\dots} = A^{\kappa\dots}_{\lambda\dots}\,B^{\mu\dots}_{\nu\dots}$

- stupně se při násobení sčítají
- často nebudeme psát "$\otimes$"
- není komutativní, ale v komponentách se o "nekomutativitu" starají indexy – záleží v jakém pořadí uspořádáme indexy výsledku C

kontrakce = zúžení – zobecnění duality mezi vekt. a kovektory

$C^1_1 A$ $\qquad A^{\alpha\dots\mu\dots}_{\beta\dots\mu\dots}$ sčítání přes 1 horní a dolní index

- snižuje stupeň tenzoru
- zobecňuje dualitu $\qquad \omega\cdot a = C^1_1(\omega\otimes a) \qquad \omega_\mu a^\nu \to \omega_\mu a^\mu$

příklady jednoduchých tenzorů

vektory a kovektory

lin. operátor na vektorech

$\mathbf{A}$: vektory → vektory

$\mathbf{b} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{a}$ $\qquad b^\beta = A^\beta{}_\alpha a^\alpha$ $\qquad \mathbf{A}$ je tenzor stupně $\binom{1}{1}$

komponenty $\mathbf{A}$ píšeme do matice $A^\alpha{}_\beta \leftrightarrow \begin{array}{c|c} & \xrightarrow{\beta} \\ \downarrow\alpha & \begin{bmatrix} A^0_0 & A^0_1 & A^0_2 & A^0_3 \\ A^1_0 & & & \vdots \\ A^2_0 & & & \vdots \\ A^3_0 & \cdots & & A^3_3 \end{bmatrix} \end{array}$

tečka odpovídá kontrakci sousedních indexů:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a} \leftrightarrow A^\alpha{}_\mu a^\mu \qquad \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{A} \leftrightarrow \omega_\mu A^\mu{}_\alpha \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \leftrightarrow A^\alpha{}_\mu B^\mu{}_\beta$

$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = A^\mu{}_\mu$

bilineární forma

$\mathbf{B}$: vektor × vektor → $\mathbb{R}$

$\mathbf{B}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = B_{\alpha\beta}\, a^\alpha b^\beta$ $\qquad \mathbf{B}$ je tenzor stupně $\binom{0}{2}$

komponenty $\mathbf{B}$ píšeme též do matice $B_{\alpha\beta} \leftrightarrow \begin{array}{c|c} & \xrightarrow{\beta} \\ \downarrow\alpha & \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ B_{10} & & & \vdots \\ B_{20} & & & \vdots \\ B_{30} & \cdots & & B_{33} \end{bmatrix} \end{array}$

(neumíme napsat "řádek řádků")

transpozice

$\mathbf{B}^T(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{B}(\mathbf{b},\mathbf{a}) \qquad B^T{}_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$

symetrické a antisymetrické bi-lin formy

$\mathbf{B} = \mathbf{B}^T \qquad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$ ← sym $\qquad \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \qquad B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$ ← antisym.

symetrizace a antisymetrizace

$B_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha})$ – symetrická forma

$B_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta} - B_{\beta\alpha})$ – antisymetrická forma

$B_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)} + B_{[\alpha\beta]}$

univerzalita tenzorů

- každé multilineární zobrazení vektorů a kovektorů do vektorů či kovektorů lze reprezentovat tenzorem

viz kovektor jako lin. funkcionál na vektorech
lin. operátor
bi-lineární forma

tenzory jako multilineární zobrazení na vekt. a kovekt.

A tenzor stupně $\binom{K}{L}$ je ekvivalentní zobrazení

K kovektorů a L vektorů $\longrightarrow \mathbb{R}$

$$A(\underbrace{\omega^1, \dots, \omega^K}_{\text{K různých kovektorů } \omega^k}, \underbrace{a_1, \dots, a_L}_{\text{L různých vektorů } a_l}) = A^{\mu_1 \dots \mu_K}{}_{\nu_1 \dots \nu_L}\, \omega^1_{\mu_1} \dots \omega^K_{\mu_K}\, a_1^{\nu_1} \dots a_L^{\nu_L}$$

příklad - bilineární forma

$$B(a, b) = B_{\alpha\beta}\, a^\alpha b^\beta$$

příklad - vektorový součin v 3D eukl. prostoru

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ $\quad c^j = a^k b^l \varepsilon_{kl}{}^j$ $\quad \varepsilon$ - Levi-Civitův tenzor

Minkowského geometrie

prostoročasový interval

$$\Delta s^2(A,B) = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

funkce vektoru $\Delta x = B - A$

odpovídá bilineární formě

$$\Delta s^2(A,B) = \eta(\Delta x, \Delta x)$$

pseudoskalární součin

tato bilineární forma definuje pseudoskalární součin

$$\eta(a,b) = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

$$= \eta_{\alpha\beta}\, a^\alpha b^\beta$$

η je tzv. metrický tenzor Minkowského geometrie

krátce (pseudo) metrika

jeho složky v inerciální soustavě jsou

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vlastnosti metriky, resp. pseudoskalárního součinu

$\eta_{\alpha\beta}$ tenzor typu $\binom{0}{2}$.

$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$ symetrický tj. $\eta(a,b) = \eta(b,a)$

$\eta_{\alpha\beta}$ nedegenerovaný

tj. $\forall b\ \ \eta(a,b) = 0 \iff a = 0$

$\eta_{\alpha\beta}$ není positivně definitní $\rightarrow$ proto předpona „pseudo"

tj. $\eta(a,a)$ může mít různé znaménko

inverzní metrický tenzor

$\eta^{-1\alpha\beta}$ definován $\eta_{\alpha\mu}\eta^{-1\mu\beta} = \eta^{-1\beta\mu}\eta_{\mu\alpha} = \delta^\beta_\alpha$

v inerciální soustavě

$$\eta^{-1\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

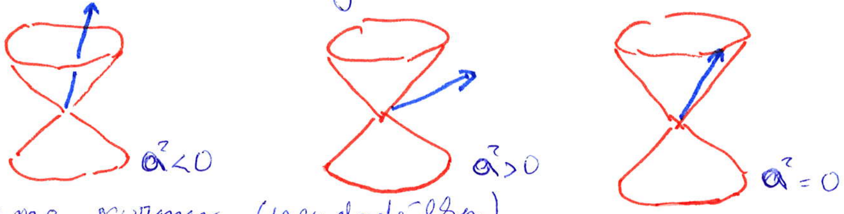
budeme psát $\eta^{\alpha\beta} \equiv \eta^{-1\alpha\beta}$ viz dále

Význam pseudoskalárního součinu

- kvadrát normy = prostoročasový interval

$$a^2 = \eta(a,a) = a^\mu a^\nu \eta_{\mu\nu} = \Delta s^2(X,Y) \qquad \text{kde } a = Y - X$$

znaménko a^2 určuje kauzální charakter vektoru a

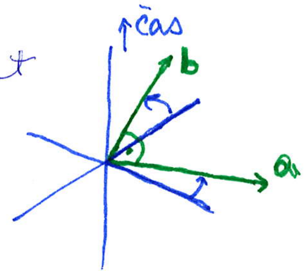


definujeme normu (pseudodélku)

$|a| = \sqrt{|a^2|}$ budeme též psát $a \equiv |a|$

- kolmost

$$a \perp b \iff \eta(a,b) = 0$$

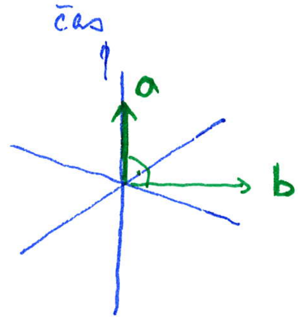


a, b prostorupodobné – normální kolmost
vždy lze nalézt inerc. soust. kde a, b leží v rovině současnosti a zde se jedná o prostorové vektory

$a^0 = 0 \qquad b^0 = 0$

$$0 = \eta(a,b) = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = \eta_{ij} a^i b^j = \delta_{ij} a^i b^j$$

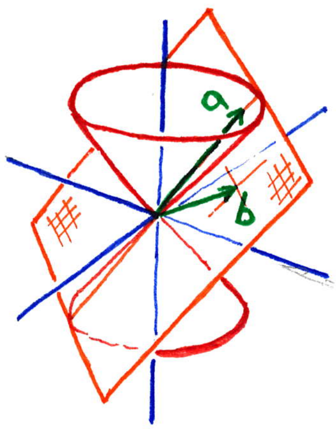
$\to$ běžný 3D skalární součin



a časupodobný b prostorupodobný
b leží v nadrovině současnosti pozorovatele se světočárou ve směru a

$a^i = 0 \Rightarrow b^0 = 0$

a, b časupodobné – nelze!



a světelný tj. $a^2 = 0$
b leží v 3D podprostoru tečném ke světelném kuželu podél směru a

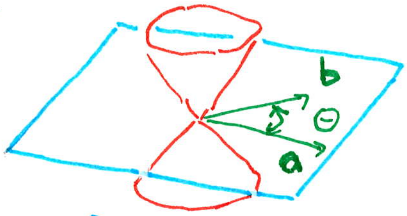
a je kolmý sám na sebe!

- vztah k úhlu, pseudoúhlu, rapiditě

a, **b** tvoří prostorupodobnou 2D rovinu

$$\eta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a\,b\cos\theta$$

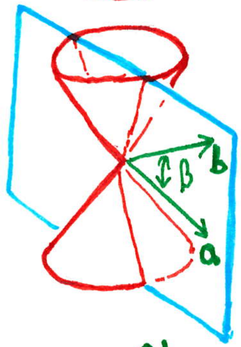
θ úhel mezi vektory **a**, **b**



a, **b** prostorupodobné, ale
tvoří časupodobnou 2D rovinu

$$\eta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a\,b\,\mathrm{ch}\,\beta$$

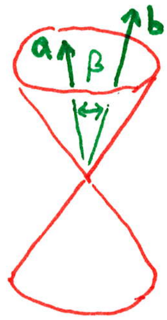
β pseudoúhel mezi vektory **a**, **b**



a, **b** časupodobné
$\Rightarrow$ tvoří časupodobnou 2D rovinu

$$\eta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\,a\,b\,\mathrm{ch}\,\beta$$

β je rapidita mezi vekt. **a**, **b**



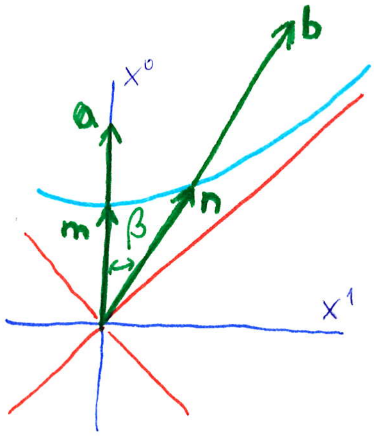
důkaz např. posledního tvrzení

- nechť **m**, **n** jsou "jednotkové" vektory ve směrech **a**, **b**

  $\mathbf{a} = a\,\mathbf{m} \qquad \mathbf{b} = b\,\mathbf{n}$

  $\mathbf{m}^2 = -1 \qquad \mathbf{n}^2 = -1$

- zvolme inerc. soustavu s časovou osou ve směru **a** a s vekt. **b** ležícím v rovině x^0–x^1



- **m**, **n** leží na jednotkové kružnici

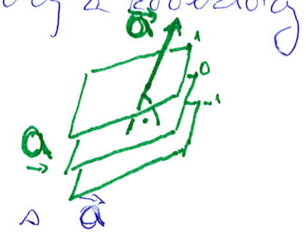
  $\Rightarrow \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{n} = \begin{bmatrix}\mathrm{ch}\,\beta\\ \mathrm{sh}\,\beta\\0\\0\end{bmatrix}$ viz parametrizace pseudokružnice

- dostáváme

$$\eta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a^\alpha b^\beta \eta_{\alpha\beta} = a\,b\,m^\alpha n^\beta \eta_{\alpha\beta} = -\,a\,b\,\mathrm{ch}\,\beta$$

identifikace vektorů a kovektorů

metrický tenzor definuje zobrazení mezi vektory a kovektory



(dočasně označme vektory $\vec{a}$ a kovektory $\underrightarrow{a}$)

$$\vec{a} \underset{\eta}{\overset{\eta^{-1}}{\rightleftarrows}} \underrightarrow{a} \qquad a^\alpha \rightleftarrows a_\alpha$$

akce $\underrightarrow{a}$ je stejná jako pseudoskalární součin s $\vec{a}$

$$\underrightarrow{a}\cdot\vec{b} = \eta(\vec{a},\vec{b}) \qquad \text{tj.} \quad \underrightarrow{a}\cdot\ \equiv \eta(\vec{a},\ )$$

v komponentách

$$a_\nu b^\nu = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu \Rightarrow a_\nu = a^\mu \eta_{\mu\nu}$$

snižování a zvyšování indexů

$$a_\nu = a^\mu \eta_{\mu\nu} \qquad a^\nu = a_\mu \eta^{\mu\nu}$$

nebudeme nadále rozlišovat $\vec{a}$ a $\underrightarrow{a}$, budeme psát pouze $\mathbf{a}$

musíme rozlišovat mezi typem komponent

a^μ kontravariantní komponenty (horní index)

a_μ kovariantní komponenty (dolní index)

v inerciální soustavě $a_\alpha = [a_0\, a_1\, a_2\, a_3] = [-a^0\, a^1\, a^2\, a^3] \leftrightarrow a^\alpha = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$$a_0 = -a^0 \quad a_2 = a^2 \qquad \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \eta^{-1\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = a^1 \quad a_3 = a^3$$

zkrácené značení pro skal. součin – jelikož nerozlišujeme $\vec{a}$ a $\underrightarrow{a}$ máme

$$\eta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$$

snižování a zvyšování indexů tenzorů

stejnou operaci můžeme aplikovat na indexy tenzoru

je potřeba dávat pozor na pořadí indexů

$$M^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu} \underset{\text{např.}}{\longrightarrow} M_\kappa{}^\lambda{}_\mu{}^\nu = \eta_{\kappa\alpha}\eta^{\nu\beta} M^{\alpha\lambda}{}_{\mu\beta}$$

pořadí indexů určuje řádek/sloupec u tenzorů stupně 2

$$S^\alpha{}_\beta = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\beta} \\ \alpha\downarrow & \begin{bmatrix} S^0{}_0 & S^0{}_1 & S^0{}_2 & S^0{}_3 \\ S^1{}_0 & S^1{}_1 & S^1{}_2 & \\ S^2{}_0 & S^2{}_1 & \ddots & \\ S^3{}_0 & & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad S_\alpha{}^\beta = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\beta} \\ \alpha\downarrow & \begin{bmatrix} S_0{}^0 & S_0{}^1 & S_0{}^2 & S_0{}^3 \\ S_1{}^0 & S_1{}^1 & S_1{}^2 & \\ S_2{}^0 & S_2{}^1 & \ddots & \\ S_3{}^0 & & & \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} S^0{}_0 & -S^0{}_1 & -S^0{}_2 & -S^0{}_3 \\ -S^1{}_0 & S^1{}_1 & S^1{}_2 & \\ -S^2{}_0 & S^2{}_1 & \ddots & \\ -S^3{}_0 & & & \end{bmatrix}$$

zvýšení indexů metriky

zvyšuje se pomocí inverzní metriky $\eta^{-1\alpha\beta}$

$$\eta^{\alpha\beta} = \eta^{-1\alpha\mu}\eta^{-1\beta\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta^{-1\alpha\beta}$$

proto píšeme $\eta^{\alpha\beta}$ místo $\eta^{-1\alpha\beta}$

rozštěpení na prostor a čas

inerciální soustava definuje nadroviny současnosti

podobně rozštěpíme i vektory

$$\mathbf{a} = a^0 \mathbf{e}_0 + \vec{a}$$

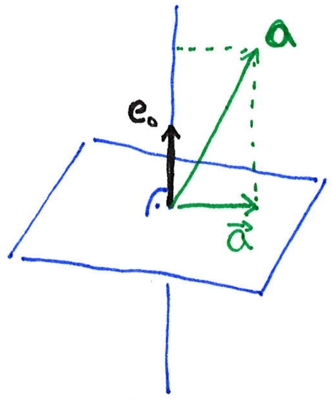
3-vektor

vektor v prostorovém směru

tj kolmý na časovou osu

$\vec{a} \perp \mathbf{e}_0 \qquad \vec{a} = a^s \mathbf{e}_s$

směr časové osy



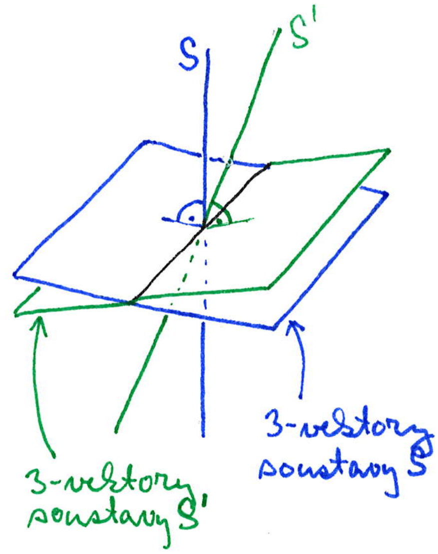
budeme psát

$$\mathbf{a} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

pozor! jiná inerciální soustava definuje jiný prostor 3-vektorů

v prostoročase tvoří jiné 3D podprostory

přesto budeme používat stejné značení $\vec{a}$



prostorové báze a časová normála

prostorové vektory báze označíme též

$\vec{e}_j \equiv \mathbf{e}_j$

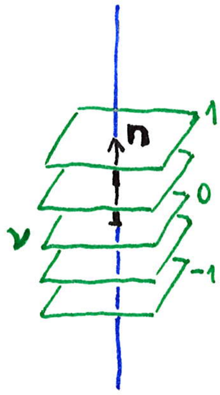
nemusíme odlišovat duální bázi, jelikož

$\vec{e}_j = \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\epsilon}^j$

pro zjednodušení notace označíme

$\mathbf{n} = \mathbf{e}_0$ časový jednotkový vektor směřující do budoucnosti

$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\epsilon}^0$ časový jednotkový kovektor orientovaný do budoucna



platí (viz výše)

$$\mathbf{n} = -\boldsymbol{\nu} \qquad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1 \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = -1$$

$$\mathbf{n} \leftrightarrow n^\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad n_\alpha = [-1, \vec{0}] \quad \boldsymbol{\nu} \leftrightarrow \nu_\alpha = [1, \vec{0}] \quad \nu^\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

snižování a zvyšování indexů

$\mathbf{a}$ jako vektor

$$\mathbf{a} = a^0 \mathbf{n} + \vec{a} = a^0 \mathbf{n} + a^j \vec{e}_j \qquad a^\alpha = \begin{bmatrix} a^0 \\ \vec{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}$ jako kovektor

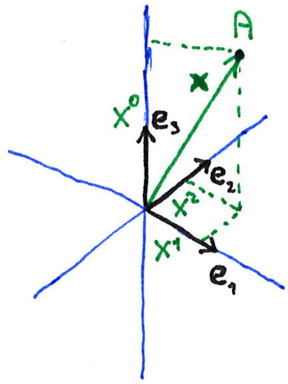
$$\mathbf{a} = a_0 \boldsymbol{\nu} + \vec{a} \qquad a_0 = -a^0 \quad a_j = a^j \qquad a_\alpha = [a_0\ \vec{a}] = [a_0\ a_1\ a_2\ a_3]$$

$$= [-a^0\ \vec{a}] = [-a^0\ a^1\ a^2\ a^3]$$

Časové a prostorové složky inerciální soustava

zadaná:
- počátkem P
- (pseudo)ortonormální bází vektorů e_α

událost A



$$A = P + \mathbf{x}$$

$\mathbf{x}$ – průvodič

P – počátek inerc. soust.

$$\mathbf{x} = x^\alpha e_\alpha \qquad x^\alpha = \mathbf{x} \cdot \epsilon^\alpha$$

ϵ^α – báze kovektorů

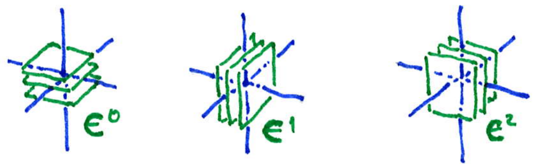
e_α – báze vektorů

x^α – inerciální souřadnice události A

pseudoortonormalita

$$\eta(e_\alpha, e_\beta) = \eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} \pm 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

duální báze kovektorů



$$\epsilon^\alpha \qquad e_\alpha \cdot \epsilon^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

pozor e_α chápané jako kovektory jsou různé od ϵ^α

Například, platí

$$a \cdot \epsilon^\alpha = a^\alpha \qquad a \cdot e_\alpha = a_\alpha$$

tj. pro $\alpha = 0$, platí $a^0 = -a_0 \Rightarrow$

$$\epsilon^0 = -e_0$$

pro $\alpha = 1,2,3$ platí $a^i = a_i \Rightarrow$

$$\epsilon^i = e_i$$

v souřadnicích máme

$$e_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{index}]{\text{snížení}} e_0 = [-1,0,0,0] \; e_1 = [0,1,0,0] \; e_2 = [0,0,1,0] \; e_3 = [0,0,0,1]$$

e_3^α $\qquad$ $e_{3\alpha}$

$$\epsilon^0 = [1,0,0,0] \quad \epsilon^1 = [0,1,0,0] \quad \epsilon^2 = [0,0,1,0] \quad \epsilon^3 = [0,0,0,1] \xrightarrow[\text{index}]{\text{zvýšení}} \epsilon^0 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \epsilon^1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \epsilon^2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \epsilon^3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

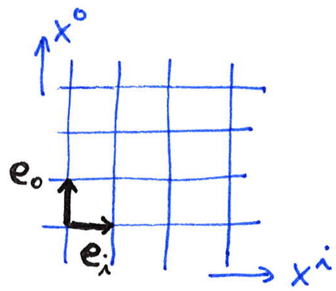
ϵ^0_α $\qquad$ $\epsilon^{0\alpha}$

Prostoročasový gradient

gradient skaláru je definován derivací ve směru

derivace fce f ve směru $\mathbf{a}$ = $\mathbf{a}\cdot\nabla f = a^\mu \nabla_\mu f$

- gradient je přirozeně kovektor (funkcionál na vektorech)
- souřadnice se píší různě $\nabla_\alpha f \equiv (\nabla f)_\alpha$



komponenty v inerciální soustavě

souřadnice x^α

směry souř. os dány vektory $\mathbf{e}_\alpha$

složky kovektoru se dostane zúžením s $\mathbf{e}_\alpha$

$$\nabla_\alpha f = \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla f = \text{derivace ve směru } x^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

složky gradientu jsou parciální derivace

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = f_{,\alpha}$$ ← zkrácené značení, pokud jsou jasné souřadnice

časové a prostorové složky

$$\nabla_0 f = \frac{\partial f}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \qquad \nabla^0 f = -\frac{\partial f}{\partial x^0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$ ← složky prostorového gradientu $\vec{\nabla} f$

můžeme psát

$$\nabla_\alpha f = \left[\frac{\partial f}{\partial x^0}\ \frac{\partial f}{\partial x^1}\ \frac{\partial f}{\partial x^2}\ \frac{\partial f}{\partial x^3}\right] = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\ \vec{\nabla} f\right] \qquad \nabla^\alpha f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x^0} \\ \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{\nabla} f \end{bmatrix}$$

gradient tenzorů (včetně vektorů a kovektorů)

v Minkowského prostoročase máme globální rovnoběžnost a rovnoběžné vektory považujeme za konstantní

⇓ pseudoortonormální báze $\mathbf{e}_\alpha$ roznesená do prostoročasu je konstantní

$$\nabla \mathbf{e}_\alpha = 0 \qquad \nabla \mathbf{e}^\alpha = 0$$

⇓ stačí derivovat inerciální komponenty tenzorů

$\nabla \mathbb{T}$ má složky $\nabla_\alpha T^{\mu\nu\ldots}{}_{\kappa\lambda\ldots} = T^{\mu\nu\ldots}{}_{\kappa\lambda\ldots,\alpha}$

Transformace komponent tenzorů

chování komponent vůči změně báze vekt. prostoru

$$\mathbf{a} = a^{\mu}\,\mathbf{e}_{\mu} = a^{\mu'}\,\mathbf{e}_{\mu'}$$

komponenty vůči $\mathbf{e}_{\mu}$ — komponenty vůči $\mathbf{e}_{\mu'}$

čárka na indexu identifikuje bázi či komponentu vůči bázi (lepší by bylo značit bázi barvou, čárka je jen náhrada za jinou barvu) někdy se čárka píše na hlavní symbol $a^{\mu'} \equiv a'^{\mu}$

vztah bází vektorů

$$\mathbf{e}_{\mu'} = L^{\nu}{}_{\mu'}\,\mathbf{e}_{\nu} \qquad \mathbf{e}_{\mu} = L^{\nu'}{}_{\mu}\,\mathbf{e}_{\nu'}$$

transformace $\mathbf{e}_{\nu} \to \mathbf{e}_{\nu'}$ tj. $S \to S'$ — transformace $\mathbf{e}_{\nu'} \to \mathbf{e}_{\nu}$ tj. $S' \to S$

záleží na čárkování

$L^{\nu}{}_{\mu'}$ a $L^{\nu'}{}_{\mu}$ jsou opačné transformace

$\Rightarrow$ jsou to inverzní matice

$$L^{\mu}{}_{\alpha'}L^{\alpha'}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad L^{\mu'}{}_{\alpha}L^{\alpha}{}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$$

transformace komponent vektoru

$$\mathbf{a} = a^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = a^{\mu}L^{\nu'}{}_{\mu}\mathbf{e}_{\nu'} = a^{\nu'}\mathbf{e}_{\nu'}$$

$$\Rightarrow \quad a^{\nu'} = L^{\nu'}{}_{\mu}a^{\mu} \qquad a^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu'}a^{\nu'}$$

vztah bází kovektorů

dualita bází $\quad \boldsymbol{\epsilon}^{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{\alpha'}\cdot\mathbf{e}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$

$$\delta^{\alpha'}_{\beta'} = L^{\alpha'}{}_{\kappa}\,\delta^{\kappa}_{\lambda}\,L^{\lambda}{}_{\beta'} = L^{\alpha'}{}_{\kappa}\,\boldsymbol{\epsilon}^{\kappa}\cdot\mathbf{e}_{\lambda}\,L^{\lambda}{}_{\beta'} = L^{\alpha'}{}_{\kappa}\,\boldsymbol{\epsilon}^{\kappa}\cdot\mathbf{e}_{\beta'} \quad \Downarrow$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\kappa}\,\boldsymbol{\epsilon}^{\kappa} \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{\alpha} = L^{\alpha}{}_{\kappa'}\,\boldsymbol{\epsilon}^{\kappa'}$$

transformace $\boldsymbol{\epsilon}^{\kappa} \to \boldsymbol{\epsilon}^{\kappa'}$, $S \to S'$ — transformace $\boldsymbol{\epsilon}^{\kappa'} \to \boldsymbol{\epsilon}^{\kappa}$, $S' \to S$

transformace komponent kovektoru

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{\mu}\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = \omega_{\mu}L^{\mu}{}_{\nu'}\boldsymbol{\epsilon}^{\nu'} = \omega_{\nu'}\boldsymbol{\epsilon}^{\nu'}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{\nu'} = L^{\mu}{}_{\nu'}\,\omega_{\mu} \qquad \omega_{\nu} = L^{\mu'}{}_{\nu}\,\omega_{\mu'}$$

transformace komponent tenzorů

$$T^{\kappa'\lambda'\ldots}{}_{\mu'\nu'\ldots} = L^{\kappa'}{}_{\alpha} L^{\lambda'}{}_{\beta}\ldots L^{\gamma}{}_{\mu'} L^{\delta}{}_{\nu'}\ldots T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$$

"kolik má indexů, tolikrát jsi (ko)vektorem"

lze použít jako definici:

tenzor je hromada čísel $T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ vůči bázi, která se při změně báze transformuje podle předpisu výše

Lorentzovy transformace

Lorentzovy transformace jsou vztahy mezi souřadnicemi události v inerciální soustavě S a inerc. soustavě S'
souřadnice události A jsou zároveň komponenty 4-průvodiče

$\mathbf{x} = A - P$ kde $P = P'$ je společný počátek soustav S, S'

$\mathbf{x} \xrightarrow{S} x^\alpha = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x} \xrightarrow{S'} x^{\alpha'} = \begin{bmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{bmatrix}$ $\quad x^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\mu} x^{\mu} \quad x^{\alpha} = L^{\alpha}{}_{\mu'} x^{\mu'}$

Lorentzovy transformace tak popisují i transformaci 4-vektorů

$a^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\mu} a^{\mu} \qquad a^{\alpha} = L^{\alpha}{}_{\mu'} a^{\mu'}$ $\qquad L^{\alpha'}{}_{\mu}, L^{\alpha}{}_{\mu'}$ inverzní

to odpovídá změně báze

$\mathbf{e}_{\alpha'} = L^{\mu}{}_{\alpha'} \mathbf{e}_{\mu} \qquad \mathbf{e}_{\alpha} = L^{\mu'}{}_{\alpha} \mathbf{e}_{\mu'}$

Lorentzovy transformace splňují (pseudo)ortonormální podm.

$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu'\nu'} L^{\mu'}{}_{\alpha} L^{\nu'}{}_{\beta}$

ta zaručuje invarianci formy skalárního součinu

$\eta(a,b) = a^\alpha b^\beta \eta_{\alpha\beta} = a^{\alpha'} b^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'}$ stejné $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

pro speciální Lorentzovu transf. máme

$L^{\alpha'}{}_{\mu} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\beta & -\mathrm{sh}\beta & & \\ -\mathrm{sh}\beta & \mathrm{ch}\beta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad L^{\alpha}{}_{\mu'} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\beta & \mathrm{sh}\beta & & \\ \mathrm{sh}\beta & \mathrm{ch}\beta & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

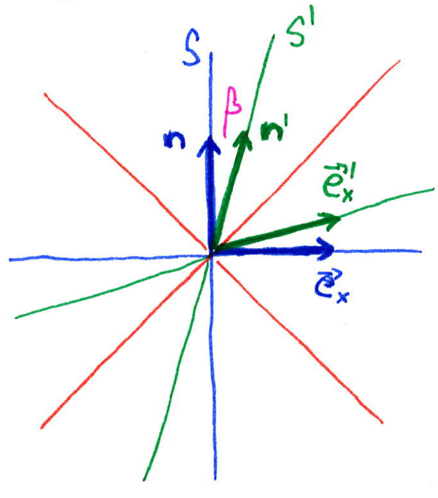
což dává

$\mathbf{n}' = \mathrm{ch}\beta\, \mathbf{n} + \mathrm{sh}\beta\, \vec{e}_x$

$\vec{e}_x{}' = +\mathrm{sh}\beta\, \mathbf{n} + \mathrm{ch}\beta\, \vec{e}_x$

$\vec{e}_y{}' = \vec{e}_y$

$\vec{e}_z{}' = \vec{e}_z$



Rozštěpení do směru rychlosti a kolmo na něj

někdy potřebujeme rychlost v obecném směru, ne pouze ve směru x
označíme směr pohybu v soustavě S jednotk. vekt. $\vec{e}_\parallel$
a směr pohybu v soustavě S' jednotkovým vekt. $\vec{e}_\parallel'$
směry kolmé na rovinu pohybu (nejenom na $n, \vec{e}_\parallel$)
budeme značit $\vec{a}_\perp$
tyto tvoří 2D prostorupodobný podprostor invariantní vůči Lorentz. transformaci

pro bázi můžeme psát

$$n' = \operatorname{ch}\beta\, n + \operatorname{sh}\beta\, \vec{e}_\parallel$$
$$\vec{e}_\parallel' = \operatorname{sh}\beta\, n + \operatorname{ch}\beta\, \vec{e}_\parallel$$

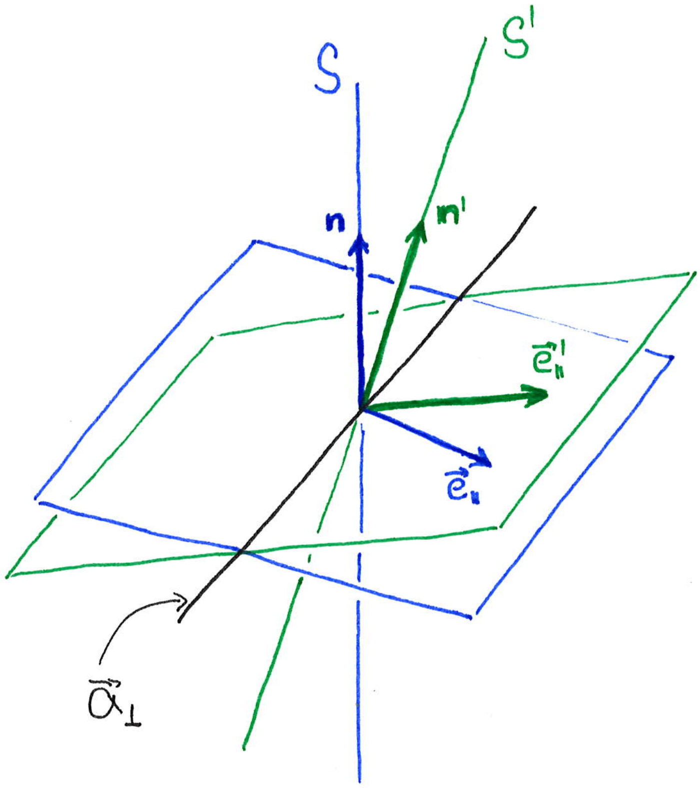
obecný 4-vektor rozštěpíme

$$a = a^0 n + a_\parallel \vec{e}_\parallel + \vec{a}_\perp \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^0 \\ a_\parallel \\ \vec{a}_\perp \end{bmatrix}_S$$

v soustavě S

$$a = a^{0\prime} n' + a_\parallel' \vec{e}_\parallel' + \vec{a}_\perp' \leftrightarrow \begin{bmatrix} a^{0\prime} \\ a_\parallel' \\ \vec{a}_\perp' \end{bmatrix}_{S'}$$

v soustavě S'



speciální Lorentz. transf. pak dává

$$a^{0\prime} = \operatorname{ch}\beta\, a^0 - \operatorname{sh}\beta\, a_\parallel$$
$$a_\parallel' = -\operatorname{sh}\beta\, a^0 + \operatorname{ch}\beta\, a_\parallel$$
$$\vec{a}_\perp' = \vec{a}_\perp$$

neboli

$$\begin{bmatrix} a^{0\prime} \\ a_\parallel' \\ \vec{a}_\perp' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\beta & -\operatorname{sh}\beta & \\ -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & \\ & & P_\perp \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^0 \\ a_\parallel \\ \vec{a}_\perp \end{bmatrix}$$

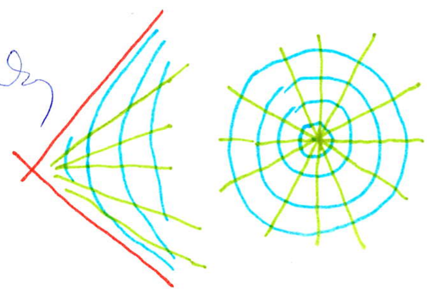
$P_\perp$ projektor na směry kolmé k n a $\vec{e}_\parallel$

Lokální a globální popis

prostoročas STR (a také euklidovský prostor) je globálně plochý
= existuje v něm globální rovnoběžnost
⇒ umožňuje ztotožnit vektory a tenzory v různých bodech a mluvit o globálních vektorech a tenzorech

zakřivené prostoročasy (OTR) nadále nemají globální rovnoběžnost
vektory a tenzory je nutné chápat lokálně, v každém bodě zvlášť
umisťování tenzorů do jednotlivých bodů prostoročasu může být výhodné i v STR, např. při použití křivočarých souř.

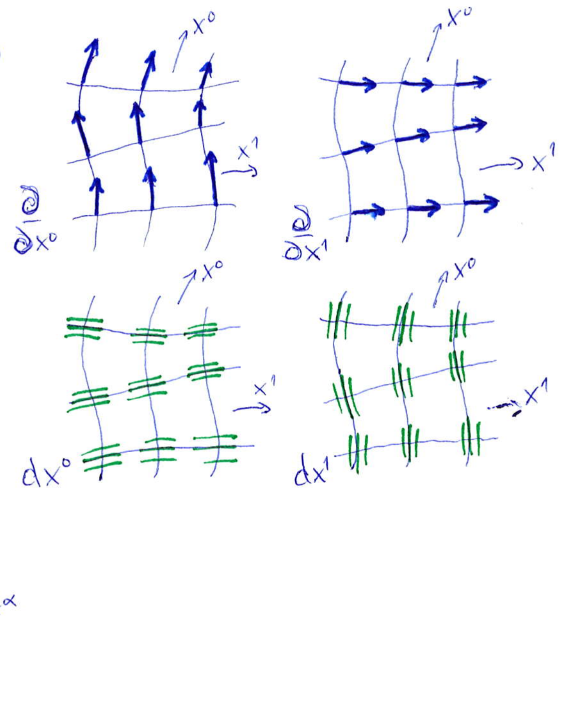
obecné (křivočaré) souřadnice
- očíslování bodů prostoročasu pomocí 4 čísel
  x^0, x^1, x^2, x^3 – funkce na prostoročase
- souřadnice nemusejí respektovat afinní strukturu či metrickou strukturu prostoročasu
  tj. souřadnicové čáry nemusejí být přímky
- například polární souřadnice, urychlené souřadnice, ...



báze vektorů a kovektorů

vektory – tečné k souřadnic. čarám

$$e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$



kovektory - gradienty souřadnic

$$\epsilon^\alpha = dx^\alpha \equiv \nabla x^\alpha$$

derivace ve směru $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\cdot\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \equiv f_{,\alpha}$$

derivace ve směru
z geometrické definice $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$

dualita bází

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\cdot dx^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} = \delta^\beta_\alpha$$

souřadnice gradientu

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\cdot\nabla f = f_{,\alpha} \qquad \text{tj} \qquad \nabla f = f_{,\alpha}\, dx^\alpha$$

souřadnice vektoru

$$a = a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad a^\alpha = a \cdot dx^\alpha$$

souřadnice kovektoru

$$\alpha = \alpha_\mu \, dx^\mu \qquad \alpha_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot \alpha$$

souřadnice tenzoru

$$\mathbb{T} = T^{\alpha\beta\dots}_{\kappa\lambda\dots} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \otimes \dots \otimes dx^\kappa \otimes dx^\lambda$$

$$T^{\alpha\beta\dots}_{\kappa\lambda\dots} = \mathbb{T}\left(dx^\alpha, dx^\beta, \dots, \frac{\partial}{\partial x^\kappa}, \frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \dots\right)$$

změna souřadnic

$x^\alpha \qquad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad dx^\alpha \qquad$ souřadný systém S

$x^{\alpha'} \qquad \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \qquad dx^{\alpha'} \qquad$ –"– $\qquad S'$

máme zadané

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu) \qquad \text{resp.} \qquad x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'})$$

vyjádření $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}$ v bázi $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \cdot dx^\mu\right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv x^\mu{}_{,\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

vztah pro komponenty vektoru v bázi $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

$\Rightarrow x^\mu{}_{,\alpha'}$ je transformační matice $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}$

$\Rightarrow x^{\alpha'}{}_{,\mu}$ je transformační matice $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \to \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

vyjádření $dx^{\alpha'}$ v bázi dx^μ

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} dx^\mu \equiv x^{\alpha'}{}_{,\mu} \, dx^\mu \qquad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} dx^{\alpha'} \equiv x^\mu{}_{,\alpha'} \, dx^{\alpha'}$$

transformace komponent tenzorů (viz diskuze dříve)

$$a^{\gamma'} = x^{\gamma'}{}_{,\mu} \, a^\mu \qquad a^\mu = x^\mu{}_{,\gamma'} \, a^{\gamma'}$$

$$a_{\gamma'} = x^\mu{}_{,\gamma'} \, a_\mu \qquad a_\mu = x^{\gamma'}{}_{,\mu} \, a_{\gamma'}$$

$$T^{\alpha'\beta'\dots}_{\gamma'\delta'\dots} = x^{\alpha'}{}_{,\kappa} \, x^{\beta'}{}_{,\lambda} \dots x^\mu{}_{,\gamma'} \, x^\nu{}_{,\delta'} \dots T^{\kappa\lambda\dots}_{\mu\nu\dots}$$

lokální charakter transformací

$x^{\alpha'}{}_{,\mu}$ a $x^\mu{}_{,\alpha'}$ jsou závislé na poloze

báze se bod od bodu mění $\Rightarrow$ problém při derivování

$$\nabla a = \nabla\left(a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = (\nabla a^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + a^\alpha \left(\nabla \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \quad \text{není } 0\,!$$

Obecný vztah dvou inerciálních soustav

inerciální soustava
- respektuje afinní strukturu
- respektuje metrickou strukturu

lze shrnout do podmínky tvaru metrického tenzoru

$$\eta = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

jaká je nejobecnější transformace souřadnic zachovávající tento tvar metriky?

uvažuje inerc. soust x^α a obecnou soust $x^{\alpha'}$

$$\eta_{\alpha\beta} = x^{\mu'}{}_{,\alpha}\, x^{\nu'}{}_{,\beta}\, \eta_{\mu'\nu'} \qquad \text{chceme} \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \eta_{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

derivujeme podle x^γ

$$0 = x^{\mu'}{}_{,\alpha\gamma}\, x^{\nu'}{}_{,\beta}\, \eta_{\mu'\nu'} + x^{\mu'}{}_{,\alpha}\, x^{\nu'}{}_{,\beta\gamma}\, \eta_{\mu'\nu'} \qquad (-)$$

$$0 = \quad \alpha \to \beta \to \gamma \qquad (+)$$

$$0 = \quad \alpha \leftarrow \beta \leftarrow \gamma \qquad (+)$$

$$0 = 2\, x^{\mu'}{}_{,\alpha\beta}\, \eta_{\mu'\nu'}\, x^{\nu'}{}_{,\gamma}$$

nedegenerovaná matice transf. souřadnic

nedegenerovaná matice metriky

$$\Downarrow$$

$$0 = x^{\mu'}{}_{,\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

$\Downarrow$ $x^{\mu'}$ lineární fce x^α

$$x^{\mu'} = L^{\mu'}{}_\alpha x^\alpha - p^{\mu'} \qquad L^{\mu'}{}_\alpha,\ p^{\mu'} \ \text{konstanty}$$

+ podmínka ortonormality

$$x^{\mu'}{}_{,\alpha} = L^{\mu'}{}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \eta_{\alpha\beta} = L^{\mu'}{}_\alpha\, L^{\nu'}{}_\beta\, \eta_{\mu'\nu'}$$

Příklad – pseudopolární (Rindlerovy) souřadnice

inerc. soust S $\qquad x^\alpha = (ct, x, y, z)$

Rindler. soust. S' $\qquad x^{\alpha'} = (\beta, l, y, z)$

$$\begin{aligned} ct &= l \operatorname{sh}\beta & \qquad \beta &= \operatorname{arcth}\frac{ct}{x} \\ x &= l \operatorname{ch}\beta & \qquad l &= \sqrt{x^2 - c^2t^2} \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}$$

transformační matice

$$L^\alpha{}_{\beta'} = x^\alpha{}_{,\beta'} = \begin{array}{c|cccc} & \beta & l & y & z \\ \hline ct & l\operatorname{ch}\beta & \operatorname{sh}\beta & 0 & 0 \\ x & l\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$L^{\alpha'}{}_\beta = x^{\alpha'}{}_{,\beta} = \begin{array}{c|cccc} & ct & x & y & z \\ \hline \beta & \frac{x}{l^2} & -\frac{ct}{l^2} & 0 & 0 \\ l & -\frac{ct}{l} & \frac{x}{l} & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l}\operatorname{ch}\beta & -\frac{1}{l}\operatorname{sh}\beta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transformace metriky

$$\eta_{\alpha'\beta'} = L^\mu{}_{\alpha'} L^\nu{}_{\beta'} \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -l^2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

tedy

$$\eta = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = -l^2 d\beta^2 + dl^2 + dy^2 + dz^2$$

nejedná se o inerciální soustavu

alternativní výpočet

$$\begin{aligned} c\,dt &= \operatorname{sh}\beta\, dl + l\operatorname{ch}\beta\, d\beta \\ dx &= \operatorname{ch}\beta\, dl + l \operatorname{sh}\beta\, d\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta &= -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(l\operatorname{ch}\beta\, d\beta + \operatorname{sh}\beta\, dl)^2 + (l\operatorname{sh}\beta\, d\beta + \operatorname{ch}\beta\, dl)^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -l^2(\operatorname{ch}^2\beta - \operatorname{sh}^2\beta)\, d\beta^2 + (\operatorname{ch}^2\beta - \operatorname{sh}^2\beta)\, dl^2 + (-l\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta + l\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta)(d\beta\, dl + dl\, d\beta) + dy^2 + dz^2 \\ &= -l^2 d\beta^2 + dl^2 + dy^2 + dz^2 \end{aligned}$$