Relativistické srážky

4-hybnost a klidová hmotnost.

Srážky - nejjednodušší interakce, 4-hybnost jako míra pohybu, klidová hmotnost, částice nulové klidové hmotnosti

Zákon zachování 4-hybnosti.

Zachování 4-hybnosti. Pravidla pro směr u klasických srážek, kvantové procesy. Základní srážkové procesy. Formulace srážkové úlohy.

Nerelativistické srážky.

Zákon zachování hmotnosti, hybnosti a energie. Elastické a neelastické srážky.

Rozštěpení 4-hybnosti.

Interpretace 4-hybnosti. 3-hybnost, relativistická hmotnost, energie. Vztah energie a hmotnosti. Hybnost a energie pro světelné částice.

Nejjednodušší relativistické srážky.

Syntéza, nárůst klidové hmoty. Rozpad, úbytek hmoty a relativní rychlost výsledných produktů. Elastický rozptyl, těžišťová soustava. Obecná 2-2 srážka, Mandelstamovy proměnné, tvar 4-hybností, úhel roviny dopadu a rozpadu, relativní rychlosti. Anihilace.

Tachyony.

Kauzální charakter 4-hybnosti. Virtuální částice.

4-hybnost a klidová hmotnost

Dynamika systému částic

- zákony pro pohyb částic (obecně fyzikálního systému)
- prozatím pouze zákon setrvačnosti
  = volné těleso se pohybuje po přímé světočáře

charakteristika volného pohybu jedné částice
- neexistuje pojem klidu
- existuje třída "rovnoměrných přímých pohybů" = přímky
- chápeme jako "základní" pohybový stav izolovaného systému

zobecnění na složené celkově izolované systémy
= míra pohybového stavu je pro izolovaný systém neměnná
- co je "míra pohybového stavu" ?
- systém může mít vnitřní strukturu s interakcemi
  tj. může být vnitřně proměnný

částice interagující skrze srážky
- omezíme se nejprve na systém volných částic interagujících spolu pouze v "bodových" srážkách
- každá částice se mezi srážkami pohybuje volně
- interakce je lokalizovaná do bodových okamžitých procesů srážky
- proces srážky zahrnuje
  (elastický) rozptyl, syntézu, rozpad, přeměnu

míra pohybového stavu
= 4-hybnost systému

4-hybnost

míra pohybového stavu systému
ve zvolený okamžik (nadrovina současnosti)
aditivní v zúčastněných volných částicích

4-hybnost jedné volné částice
- směr daný směrem světočáry
- délka dána "odolností" vůči ovlivnění
  = "množství setrvačnosti"

⇓

popsána 4-vektorem $\mathbf{p}$ tečným ke světočáře

klidová hmotnost "hmotné" částice

částice s časupodobnou světočárou
- směr světočáry dán 4-rychlostí $\mathbf{u}$
- 4 hybnost musí mít tvar

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u} \quad \text{tj.} \quad p^\mu = m_0 u^\mu$$

m_0 nazýváme klidovou hmotností částice
jedná se o charakteristiku setrvačných vlastností částice - míra odolnosti vůči působení

platí

$$\mathbf{p}^2 = p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = m_0^2 u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = -m_0^2 c^2$$

⇓

$$m_0^2 = -\frac{1}{c^2}\mathbf{p}^2$$

můžeme chápat jako definici m_0 ze 4-hybnosti světelné (nulové) částice

$\mathbb{p}^2 = 0$ neznamená nutně $\mathbb{p} = 0$, ale že $\mathbb{p}$ je světelný 4-vektor

můžeme definovat, že částice se světelnou světočárou má nulovou klidovou hmotnost

$$m_0^2 = -\frac{1}{c^2}\mathbb{p}^2 = 0$$

přestože klidová hmotnost $m_0 = 0$, částice má netriviální dynamické vlastnosti protože $\mathbb{p} \neq 0$

směr světelné světočáry je dán vlnovým 4-vektorem $\mathbb{k}$

4-hybnost $\mathbb{p}$ musí být úměrná $\mathbb{k}$

kvantová mechanika ukazuje, že faktor úměrnosti mezi kinematickým popisem (pomocí $\mathbb{k}$) a dynamickým popisem (pomocí $\mathbb{p}$) je konst.

$$\mathbb{p} = \hbar\,\mathbb{k} \qquad \text{tj} \qquad p^\mu = \hbar k^\mu$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0545718 \text{ Js} \qquad \text{redukovaná Planckova konst.}$$

$$[k^\mu] = m^{-1} \qquad [p^\mu] = \text{Js}\,m^{-1} = \text{kg}\,m\,s^{-1}$$

pokud nás nezajímá kinematický popis světelné částice (pomocí frekvence ω a vlnové délky tj. pomocí "barvy") stačí pracovat pouze s 4-hybností

v takovém případě budeme často používat značení $\mathbb{k}$ přímo pro 4-hybnost světelné částice abychom je rozlišili od hmotných částic, kde budeme používat $\mathbb{p}$

Zákon zachování 4-hybnosti

Izolované systémy
= systémy neinteragující s ničím mimo ně

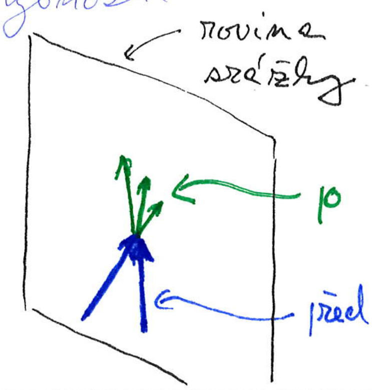
zákon zachování 4-hybnosti (pohybového stavu):
celková 4-hybnost izolovaného systému spočtená v jeden okamžik (na jedné rovině současnosti) se zachovává

srážková úloha
částice "před" → srážka → částice "po"

$$\sum_{\text{před } k} {}^{\text{před } k}\mathbf{p} = \sum_{\text{po } l} {}^{\text{po } l}\mathbf{p} \quad \text{tj.} \quad \sum_{\text{před } k} {}^{\text{před } k}p_r = \sum_{\text{po } l} {}^{\text{po } l}p_r$$

kde
${}^{\text{před } k}\mathbf{p}$ 4-hybnost k-té částice před srážkou
${}^{\text{po } l}\mathbf{p}$ 4-hybnost l-té částice po srážce

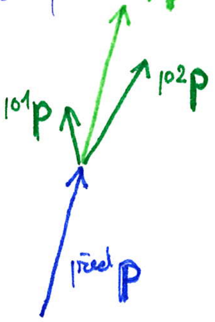
nekvantové srážky
pro klasické srážky se typicky zachovávají "směry"
srážky – zákon zachování podprostoru:
podprostor napnutý na 4-hybnostech částic před
je stejný jako
podprostor napnutý na 4-hybnostech částic po
Př: pro 2 částice před srážkou je určen 2D prostor napnutý na vstupních 4-hybnostech a výstupní částice budou mít 4-hybnosti v této rovině



pro kvantové srážky toto pravidlo obecně neplatí!

Základní srážkové procesy

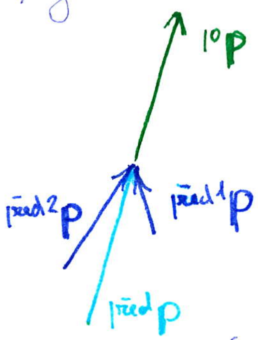
rozpad



1 částice → 2 (nebo více) částic

$${}^{\text{před}}p = \underbrace{{}^{\text{po1}}p + {}^{\text{po2}}p}_{{}^{\text{po}}p}$$

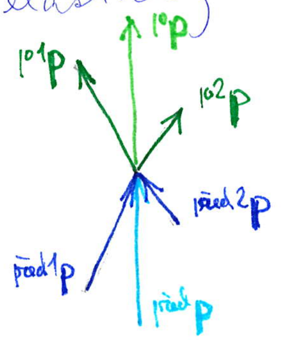
syntéza



2 (nebo více) částice → 1 částice

$$\underbrace{{}^{\text{před1}}p + {}^{\text{před2}}p}_{{}^{\text{před}}p} = {}^{\text{po}}p$$

elastický rozptyl



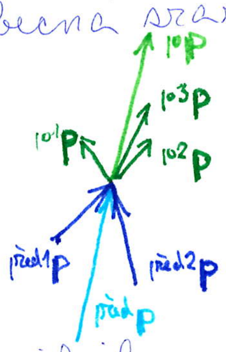
2 částice → 2 stejné částice

stejné typy částic před i po srážce
(tj. stejné klidové hmotnosti)

$${}^{\text{před1}}p + {}^{\text{před2}}p = {}^{\text{po1}}p + {}^{\text{po2}}p$$

$${}^{\text{před1}}m_0 = {}^{\text{po1}}m_0 \qquad {}^{\text{před2}}m_0 = {}^{\text{po2}}m_0$$

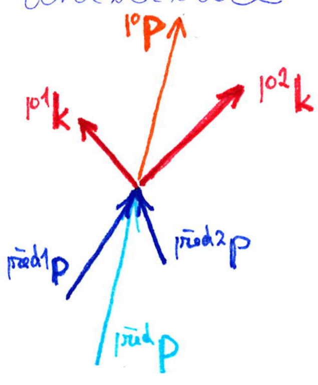
obecná srážka



několik částic → několik částic

$$\underbrace{\sum_{\text{před}k} {}^{\text{před}k}p}_{{}^{\text{před}}p} = \underbrace{\sum_{\text{po}l} {}^{\text{po}l}p}_{{}^{\text{po}}p}$$

anihilace



2 částice → 2 světelné částice

$$\underbrace{{}^{\text{před1}}p + {}^{\text{před2}}p}_{{}^{\text{před}}p} = \underbrace{{}^{\text{po1}}k + {}^{\text{po2}}k}_{{}^{\text{po}}p}$$

Formulace srážkové úlohy

zadáno:

- typy vstupních částic (klidové hmotnosti)
- 4-hybnosti vstupních částic
- typy výstupních částic (klidové hmotnosti)

má se nalézt:

- 4-hybnosti výstupních částic

ne vždy má jednoznačné řešení

dostatečné pro srážky

$2 \to 1 \quad 1 \to 2 \quad 2 \to 2$

- za předpokladu zachování roviny srážky
- až na celkovou symetrii srážky

Nerelativistické srážky

1) zákon zachování hmotnosti

2) zákon zachování hybnosti

elastické srážky (stejné částice před a po srážce bez přenosu energie do jiných podob)

3) zákon zachování energie

invariantní vůči Gal. transf. o rychlost $\vec{V}$

$m \to m$

$\vec{p} \to \vec{p} - m\vec{V}$ $\qquad \vec{p} = m\vec{v}$

$E \to E - \vec{p}\cdot\vec{V} + \frac{1}{2}mV^2$ $\qquad E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$

2) s pomocí 1)

3) s pomocí 1) a 2)

Rozštěpení 4-hybnosti: energie a hybnost

Hmotné částice $(m_0 > 0)$

$$p^\mu = m_0 u^\mu$$

vůči inerciální soustavě dostáváme

$$p^\mu = \begin{bmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 c\gamma \\ m_0 \gamma \vec{v} \end{bmatrix} \quad \text{tj} \quad p^\mu = \begin{bmatrix} p^0 \\ p^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 c \gamma \\ m_0 \gamma v^j \end{bmatrix}$$

kde 4-rychlost standardně dáme

$$u^\mu = \begin{bmatrix} c\gamma \\ \gamma \vec{v} \end{bmatrix} \qquad \frac{v}{c} = \operatorname{th}\beta \qquad \gamma = \operatorname{ch}\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

3-hybnost

prostorovou část 4-hybnosti přirozeně ztotožníme s (analogií) běžné hybnosti

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$$

Relativistická hmotnost

v nerelativistické fyzice je hybnost spojena s rychlostí skrze hmotnost
v analogii definujeme „relativistickou hmotnost"

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad m = m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{1}{c} p^0 \qquad p^0 = mc$$

Energie

p^0 se pro malé rychlosti $\frac{v}{c} \ll 1$ chová

$$p^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right)$$

nejnyšší řád:

$$\frac{p^0}{c} \approx m_0 \qquad \text{klidová hmotnost}$$

první oprava:

$$p^0 c \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots$$

kinetická energie nerelativ. teorie

to nás motivuje identifikovat $p^0 c$ jako energii

$$E = p^0 c = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v rozvoji malých rychlostí tedy máme

$$E = m_0 c^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots}$$

kinetická energie

klidová energie

v nerelativistické situaci je klidová energie $m_0 c^2$, normálně "nedostupná" - celková hmotnost se nemění vyměňovat se proto může jen kinetická energie při srážkách elementárních částic (přesně popsaných až kvantovou mechanikou) se ale částice mohou měnit a klidová hmotnost se nezachovává klidová energie se tak může přeměnit na kinetickou a ztrácí smysl je rozlišovat

$\Rightarrow$ mluvíme jen o celkové energii částice

energie je přímo spojená s relativistickou hmotností

$$E = mc^2 \qquad \text{energie} = \text{relat. hmotnost}$$

jedná se vlastně o stejnou veličinu jen vyjádřenou v jiných jednotkách

Vztah energie, hybnosti a klidové hmotnosti

$$p^\mu = \begin{bmatrix} mc \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}E \\ \vec{p} \end{bmatrix}$$

klidová hmotnost

$$m_0^2 = -\frac{1}{c^2} p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{c^4}E^2 - \frac{1}{c^2}p^2 \qquad p^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}$$

energie

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$$

Zákon zachování 4-hybnosti

- zákon zachování energie
  = zákon zachování relativistické hmotnosti
- zákon zachování 3-hybnosti

Světelné (nulové) částice $(m_0 = 0)$

$$p^\mu = \hbar k^\mu$$

vůči inerciální soustavě dostáváme

$$p^\mu = \begin{bmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}E \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar\vec{k} \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad p^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}E \\ p^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\hbar\omega \\ \hbar k^j \end{bmatrix}$$

energie nulové částice

$$E = \hbar\omega$$

hybnost nulové částice

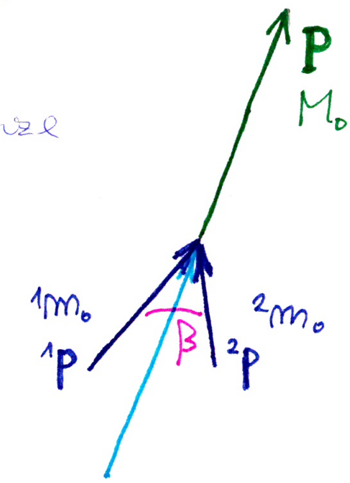
$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

vztah energie a hybnosti

$$\omega = ck \iff E = cp$$

Nejjednodušší relativistické srážky

Syntéze (složení, spojení, fúze) částic



dané:
- typ syntézy, např. 2→1 tj. 1+1 dimenze
- počáteční 4-hybnosti $^1p^\mu$, $^2p^\mu$
  tj. např. $^1m_0, {}^1V, {}^2m_0, {}^2V$ nebo $^1m_0, {}^2m_0, \beta$

hledáme
- výsledná 4-hybnost P^μ
  tj. např. M_0, V nebo M_0

veličiny $^1m_0$, $^2m_0$, β, M_0 jsou invariantní vůči volbě inerciální soustavy

rychlosti $^1v, {}^2v, V$, hybnosti $^1p, {}^2p, P$ a energie $^1E, {}^2E, E$ závisí na volbě inerciální soustavy

zákony zachování

$$^1p^\mu + {}^2p^\mu = P^\mu \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} {}^1E + {}^2E &= E \\ {}^1p + {}^2p &= P \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$E = Mc^2 = {}^1E + {}^2E = \frac{^1m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{^1v^2}{c^2}}} + \frac{^2m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{^2v^2}{c^2}}}$$

$$P = {}^1p + {}^2p = \frac{^1m_0\, {}^1v}{\sqrt{1-\frac{^1v^2}{c^2}}} + \frac{^2m_0\, {}^2v}{\sqrt{1-\frac{^2v^2}{c^2}}} \qquad V = \frac{1}{M} P$$

$\Downarrow$

$$M_0^2 = -\frac{1}{c^2}\mathbb{P}^2 = -\frac{1}{c^2}({}^1\mathrm{p} + {}^2\mathrm{p})^2 = -\frac{1}{c^2}({}^1\mathrm{p}^2 + {}^2\mathrm{p}^2 + 2\, {}^1\mathrm{p}\cdot{}^2\mathrm{p})$$

$$= {}^1m_0^2 + {}^2m_0^2 + 2\, {}^1m_0\, {}^2m_0 \operatorname{ch}\beta \quad \Leftarrow \text{skalární součin či Carnotova věta}$$

$$= ({}^1m_0 + {}^2m_0)^2 + \underbrace{2\, {}^1m_0\, {}^2m_0 (\operatorname{ch}\beta - 1)}_{\geq 0}$$

$\Downarrow$

$$M_0 \geq {}^1m_0 + {}^2m_0$$

klidová energie vzniklé částice je větší než klidové energie původních částic

klidová energie narostla o vzájemnou kinetickou energii původních částic alternativní odvození klidové hmotnosti M_0

$$M_0^2 = -\frac{1}{c^2}\mathbf{P}^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{c^2}E^2 - P^2\right) =$$

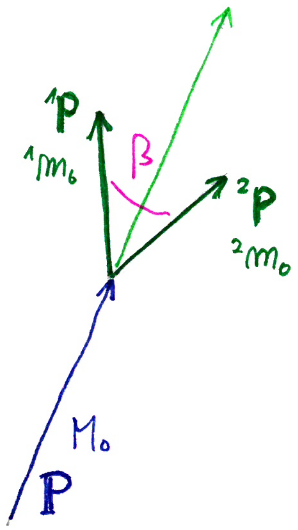
$$= \frac{1}{c^2}\left(\left({}^1m_0 c\,{}^1\gamma + {}^2m_0 c\,{}^2\gamma\right)^2 - \left({}^1m_0\,{}^1v\,{}^1\gamma + {}^2m_0\,{}^2v\,{}^2\gamma\right)^2\right)$$

$$= \left({}^1m_0\,\mathrm{ch}\,{}^1\beta + {}^2m_0\,\mathrm{ch}\,{}^2\beta\right)^2 - \left({}^1m_0\,\mathrm{sh}\,{}^1\beta + {}^2m_0\,\mathrm{sh}\,{}^2\beta\right)^2$$

$$= {}^1m_0^2\left(\mathrm{ch}^2\,{}^1\beta - \mathrm{sh}^2\,{}^1\beta\right) + {}^2m_0^2\left(\mathrm{ch}^2\,{}^2\beta - \mathrm{sh}^2\,{}^2\beta\right)$$
$$+ 2\,{}^1m_0\,{}^2m_0\left(\mathrm{ch}\,{}^1\beta\,\mathrm{ch}\,{}^2\beta - \mathrm{sh}\,{}^1\beta\,\mathrm{sh}\,{}^2\beta\right)$$

$$= {}^1m_0^2 + {}^2m_0^2 + 2\,{}^1m_0\,{}^2m_0\,\mathrm{ch}(\underbrace{{}^1\beta - {}^2\beta}_{=\beta})$$

Rozpad částice



dané
- typ rozpadu, např. $1\to 2$ tj. 1+1 dimenze
- vstupní 4-hybnost P^μ
  tj. např. M_0, V nebo pouze M_0
- typy vzniklých částic
  tj. klidové hmotnosti $^1m_0, {}^2m_0$

hledáme
- výsledné 4-hybnosti
  tj. např. $^1V, {}^2V$ nebo relativní rapiditu β

veličiny $M_0, {}^1m_0, {}^2m_0, \beta$ nezávisí na volbě soustavy

veličiny $^1V, {}^2V, V, {}^1\vec{p}, {}^2\vec{p}, \vec{P}, {}^1E, {}^2E, E$ závisí na volbě soustavy

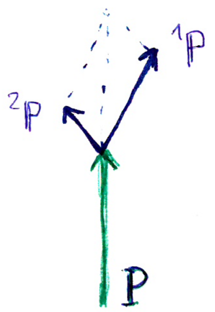
stejné vzorce jako u syntézy, $\Rightarrow$

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{M_0^2 - {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2}{2\,{}^1m_0\,{}^2m_0} \qquad \Leftarrow \; M_0^2 = {}^1m_0^2 + {}^2m_0^2 + 2\,{}^1m_0\,{}^2m_0 \operatorname{ch}\beta$$

$\Rightarrow$ klidová hmotnost rozpadající se částice musí být větší než součet klidových hmotností vzniklých komponent

$$\operatorname{ch}\beta > 1 \quad \Rightarrow \quad M_0 > {}^1m_0 + {}^2m_0$$

těžišťové soustava



$$\mathbb{P} = {}^1\mathbb{p} + {}^2\mathbb{p}$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} M_0 c \\ \vec{0} \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbb{p} = \begin{bmatrix} {}^1m c \\ {}^1\vec{p} \end{bmatrix} \qquad {}^2\mathbb{p} = \begin{bmatrix} {}^2m c \\ {}^2\vec{p} \end{bmatrix}$$

$$M_0 = {}^1m + {}^2m$$

$$\vec{0} = {}^1\vec{p} + {}^2\vec{p} \quad \Rightarrow \quad {}^1\vec{p} = p\vec{e}_\parallel \quad {}^2\vec{p} = -p\vec{e}_\parallel$$

$${}^im^2 = {}^im_0^2 + \frac{1}{c^2}p^2 \quad \Leftarrow \text{normalizace 4-hyb.}$$

$${}^2m^2 = {}^2m_0^2 + \frac{1}{c^2}p^2 = (M_0 - {}^1m)^2 = M_0^2 + {}^1m_0^2 + \frac{1}{c^2}p^2 - 2M_0\,{}^1m$$

$$\Downarrow \quad {}^1m = \frac{M_0^2 + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2}{2M_0}$$

$$\frac{1}{c^2}p^2 = {}^1m^2 - {}^1m_0^2 = \frac{1}{4M_0^2}\left(\left(M_0^2 + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right)^2 - 4M_0^2\,{}^1m_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4M_0^2}\left((M_0^2)^2 + ({}^1m_0^2)^2 + ({}^2m_0^2)^2 - 2M_0^2\,{}^1m_0^2 - 2M_0^2\,{}^2m_0^2 - 2\,{}^1m_0^2\,{}^2m_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{4M_0^2}\lambda(M_0^2, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)$$

$$\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \quad \text{Källenova trojúhel. fce}$$

$$\left[\; S = \frac{1}{4}\sqrt{-\lambda(a^2,b^2,c^2)} \qquad c\,\triangle_S\,b,\ a \;\right]$$

$${}^1\mathbb{p}: \quad {}^1m = \frac{M_0^2 + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2}{2M_0} = {}^1m_0 \operatorname{ch} {}^1\beta \qquad {}^2\mathbb{p}: \quad {}^2m = \frac{M_0^2 - {}^2m_0^2 + {}^1m_0^2}{2M_0} = {}^2m_0 \operatorname{ch} {}^2\beta$$

$$\frac{1}{c}\,{}^1\vec{p} = \frac{1}{2M_0}\lambda^{1/2}(M_0^2, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\vec{e} = {}^1m_0 \operatorname{sh} {}^1\beta\,\vec{e} \qquad \frac{1}{c}\,{}^2\vec{p} = -\frac{1}{2M_0}\lambda^{1/2}(M_0^2, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\vec{e} = {}^2m_0 \operatorname{sh} {}^2\beta\,\vec{e}$$

$$\frac{{}^1v}{c} = \operatorname{th} {}^1\beta = \frac{\lambda^{1/2}(M_0^2, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)}{M_0^2 + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2} \qquad \frac{{}^2v}{c} = \operatorname{th} {}^2\beta = -\frac{\lambda^{1/2}(M_0^2, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)}{M_0^2 + {}^2m_0^2 - {}^1m_0^2}$$

$${}^1\mathbb{p}\cdot{}^2\mathbb{p} = -\,{}^1m_0\,{}^2m_0 c^2 \operatorname{ch}\beta = -\,{}^1m\,{}^2m c^2 + {}^1\vec{p}\cdot{}^2\vec{p} = -\,{}^1m\,{}^2m c^2 - p^2$$

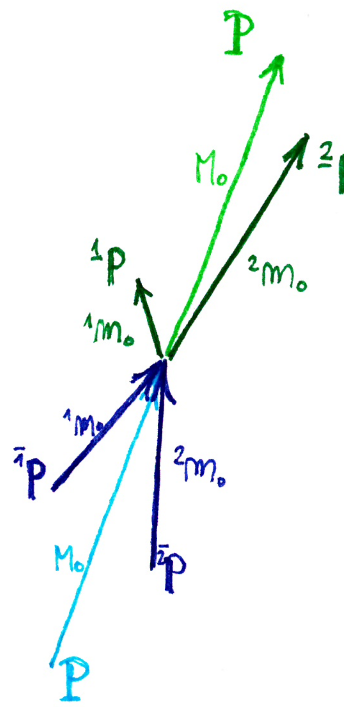
$$\frac{1}{c^2}\,{}^1\mathbb{p}\cdot{}^2\mathbb{p} = -\frac{1}{4M_0^2}\left(\left(M_0^2 + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right)\left(M_0^2 + {}^2m_0^2 - {}^1m_0^2\right) + \lambda(M_0^2, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{4M_0^2}\left((M_0^2)^2 - \cancel{({}^1m_0^2)^2} - \cancel{({}^2m_0^2)} + 2\,\cancel{{}^1m_0^2}\,{}^2m_0^2 + (M_0^2)^2 - 2M_0^2\,{}^1m_0^2 - 2M_0^2\,{}^2m_0^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(M_0^2 - {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ch}\beta = \frac{M_0^2 - {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2}{2\,{}^1m_0\,{}^2m_0}$$

Elastický rozptyl

= klidové hmotnosti vcházejících částic jsou shodné s klidovými hmotnostmi vycházejících částic



dáno:
- typ rozptylu, např. 2→2
  $\Rightarrow$ 1+1 dimenzionální úloha
- 4-hybnosti vcházejících částic
  tj. např. $^{1}m_0, {}^{\bar1}v, {}^{2}m_0, {}^{\bar2}v$

hledáme
- 4-hybnosti vycházejících částic
  tj. např. $^{1}v, {}^{2}v$

zákony zachování

$$^{\bar1}p^\mu + {}^{\bar2}p^\mu = {}^{1}p^\mu + {}^{2}p^\mu \iff \begin{array}{l} ^{\bar1}\underline{E} + {}^{\bar2}\underline{E} = {}^{1}\underline{E} + {}^{2}\underline{E} \\ ^{\bar1}p + {}^{\bar2}p = {}^{1}p + {}^{2}p \end{array}$$

lze rozdělit na posloupnost syntéza-rozpad

$$^{\bar1}p^\mu + {}^{\bar2}p^\mu \to \underline{P}^\mu \qquad \underline{P}^\mu \to {}^{1}p^\mu + {}^{2}p^\mu$$

což jsou předchozí úlohy

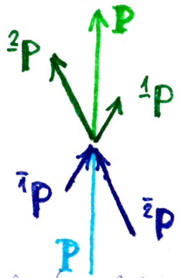
těžišťová soustava

= celková 4-hybnost nemá prostorové složky $P^\mu = \begin{bmatrix} M_0 c \\ \vec{0} \end{bmatrix}$

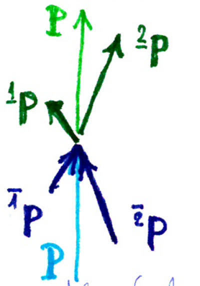
$\Rightarrow$ $M_0 = {}^{\bar1}m + {}^{\bar2}m$ (v těžišťové soustavě)

$\Rightarrow$ relativní rapidita před a po je stejná

$\Rightarrow$ $^{1}v, {}^{2}v$ jsou shodné s $^{\bar1}v, {}^{\bar2}v$ až na možnou změnu orientace



volný průlet



zrcadlový odraz

pro srážky elementárních částic (kvantová mechanika) se nemusí zachovat rovina vstupních a výstupních světočar

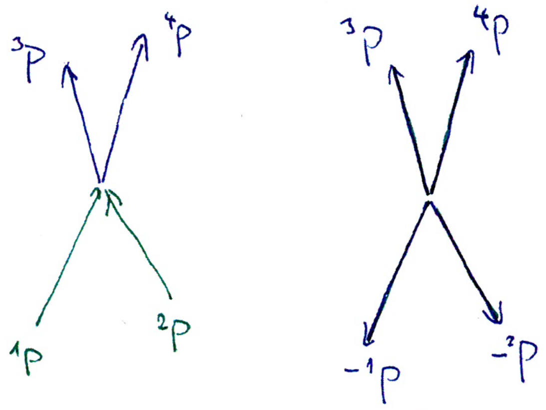
Obecný rozptyl 2 → 2

zákon zachování

$$^1p + {}^2p = {}^3p + {}^4p$$

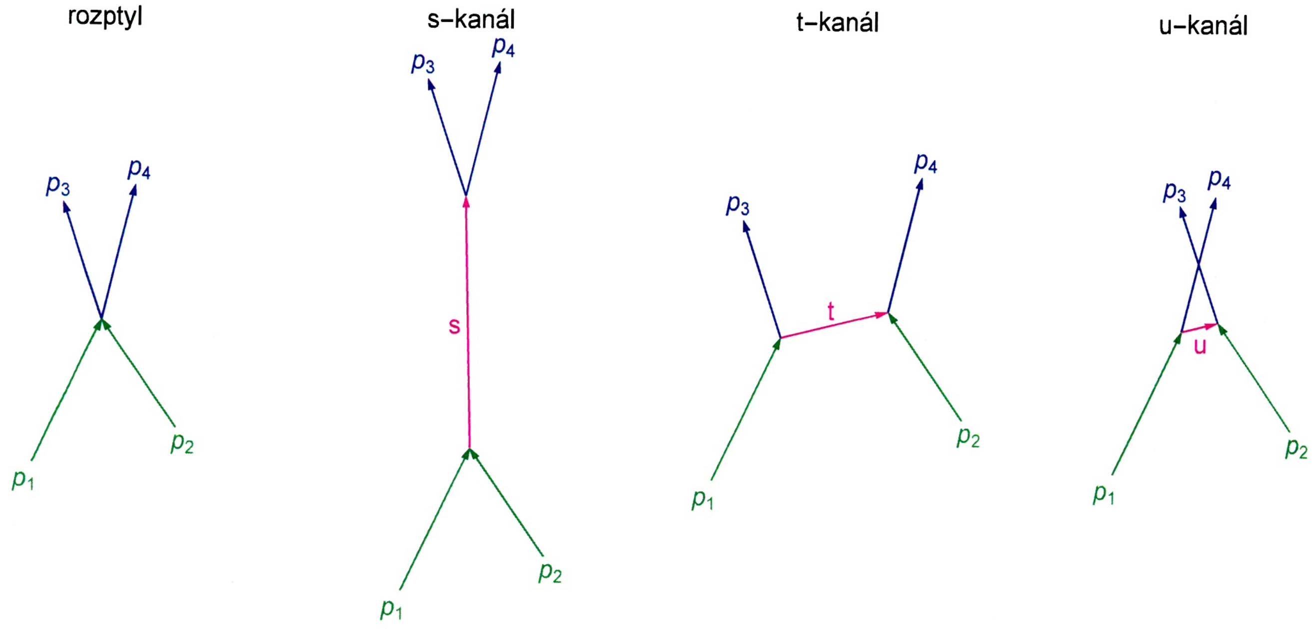
symetrický tvar:

$$(-{}^1p) + (-{}^2p) + {}^3p + {}^4p = 0$$



nebudeme předpokládat shodnost rovin vstupních a výstupních částic

srážku lze rozložit na 2 po sobě jdoucí procesy
syntézy a rozpadu (s-kanál)
toto lze formálně provést pro všechny dvojice
(t-kanál a u-kanál)



$$^1p + {}^2p = \sigma \qquad {}^1p - {}^3p = \tau \qquad {}^1p - {}^4p = \upsilon$$

$$^3p + {}^4p = \sigma \qquad -{}^2p + {}^4p = \tau \qquad -{}^2p + {}^3p = \upsilon$$

Mandelstamovy proměnné

$$-c^2 s = \sigma^2 = \sigma_r \sigma^r = ({}^1p + {}^2p)^2 = ({}^3p + {}^4p)^2$$

$$-c^2 t = \tau^2 = \tau_r \tau^r = ({}^1p - {}^3p)^2 = ({}^2p - {}^4p)^2$$

$$-c^2 u = \upsilon^2 = \upsilon_r \upsilon^r = ({}^1p - {}^4p)^2 = ({}^2p - {}^3p)^2$$

klidové hmotnosti

$$^n m_0^2 = -\frac{1}{c^2}\, {}^n p^2 = -\frac{1}{c^2}\, {}^n p_r\, {}^n p^r$$

nejsou nezávislé

$$s + t + u = {}^1m_0^2 + {}^2m_0^2 + {}^3m_0^2 + {}^4m_0^2$$

důkaz:

$$s+t+u = -\frac{1}{2c^2}\left(({}^1p+{}^2p)^2 + ({}^3p+{}^4p)^2 + ({}^1p-{}^3p)^2 + ({}^2p-{}^4p)^2 + ({}^1p-{}^4p)^2 + ({}^2p-{}^3p)^2 \right)$$

$$= {}^1m_0^2 + {}^2m_0^2 + {}^3m_0^2 + {}^4m_0^2 - \frac{1}{2c^2}\big({}^1p^2 + {}^2p^2 + {}^3p^2 + {}^4p^2 + 2\,{}^1p\cdot{}^2p + 2\,{}^3p\cdot{}^4p$$
$$- 2\,{}^1p\cdot{}^3p - 2\,{}^2p\cdot{}^4p - 2\,{}^1p\cdot{}^4p - 2\,{}^2p\cdot{}^3p \big)$$

$$= {}^1m_0^2 + {}^2m_0^2 + {}^3m_0^2 + {}^4m_0^2 - \frac{1}{2c^2}\underbrace{({}^1p + {}^2p - {}^3p - {}^4p)^2}_{0 \;\Leftarrow\; \text{zákon zachování}}$$

interpretace

$s = -\frac{1}{c^2}({}^1p + {}^2p)^2 = M_0^2$ celková klidová hmota soustavy
$= \frac{1}{c^2}E_0$ energie v těžišťové soustavě

t transfer hybnosti z páru ${}^1p, {}^3p$ na ${}^2p, {}^4p$

u — " — ${}^1p, {}^4p$ na ${}^2p, {}^3p$

určují Lor. inv. aspekty srážky

4-hybnosti v těžišťové soustavě v řeči $s, t, u, {}^1m_0, {}^2m_0, {}^3m_0, {}^4m_0$ + orientace

vztahy ${}^1p, {}^2p \Leftrightarrow s, {}^1m_0, {}^2m_0, \Delta\beta_{12}$ viz syntéza/rozpad

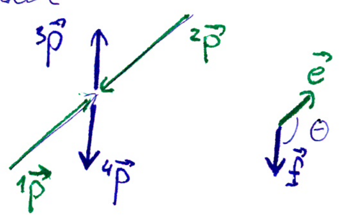
$${}^1p = \frac{c}{2\sqrt{s}}\begin{bmatrix} s + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2 \\ \lambda^{1/2}(s, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\vec{e} \end{bmatrix} \qquad {}^2p = \frac{c}{2\sqrt{s}}\begin{bmatrix} s + {}^2m_0^2 - {}^1m_0^2 \\ -\lambda^{1/2}(s, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\vec{e} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{ch}\Delta\beta_{12} = \frac{s - {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2}{2\,{}^1m_0\,{}^2m_0} \qquad M_0 \to \sqrt{s}$$

obdobně vztah ${}^3p, {}^4p \Leftrightarrow s\ {}^3m_0\ {}^4m_0\ \Delta\beta_{34}$

$${}^3p = \frac{c}{2\sqrt{s}}\begin{bmatrix} s + {}^3m_0^2 - {}^4m_0^2 \\ \lambda^{1/2}(s, {}^3m_0^2, {}^4m_0^2)\,\vec{f} \end{bmatrix} \qquad {}^4p = \frac{c}{2\sqrt{s}}\begin{bmatrix} s + {}^4m_0^2 - {}^3m_0^2 \\ -\lambda^{1/2}(s, {}^3m_0^2, {}^4m_0^2)\,\vec{f} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{ch}\Delta\beta_{34} = \frac{s - {}^3m_0^2 - {}^4m_0^2}{2\,{}^3m_0\,{}^4m_0} \qquad M_0 \to \sqrt{s}$$

jediný invariantní zatím neurčený parametr je úhel Θ roviny syntézy a roviny rozpadu

$\Theta = \sphericalangle\, \vec{e}, \vec{f} \qquad \cos\Theta = \vec{e}\cdot\vec{f}$



skalární součin 4-vekt. ${}^1p\ {}^3p$

$$\frac{1}{c^2}\,{}^1p\cdot{}^3p = \frac{1}{c^2}\,{}^1p_\mu\,{}^3p^\mu =$$

$$\frac{1}{4s}\left(-(s + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2)(s + {}^3m_0^2 - {}^4m_0^2) + \lambda^{1/2}(s, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\lambda^{1/2}(s, {}^3m_0^2, {}^4m_0^2)\ \vec{e}\cdot\vec{f} \right)$$

skalární součiny

$$\frac{1}{c^2}\,{}^1p\cdot{}^2p = -\frac{1}{2}\left(s - {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right)$$

$$\frac{1}{c^2}\,{}^3p\cdot{}^4p = -\frac{1}{2}\left(s - {}^3m_0^2 - {}^4m_0^2\right)$$

$$-\frac{1}{c^2}\,{}^1p\cdot{}^3p = -\frac{1}{2}\left(t - {}^1m_0^2 - {}^3m_0^2\right) \Leftarrow$$

$$-\frac{1}{c^2}\,{}^2p\cdot{}^4p = -\frac{1}{2}\left(t - {}^2m_0^2 - {}^4m_0^2\right)$$

$$-\frac{1}{c^2}\,{}^1p\cdot{}^4p = -\frac{1}{2}\left(u - {}^1m_0^2 - {}^4m_0^2\right)$$

$$-\frac{1}{c^2}\,{}^2p\cdot{}^3p = -\frac{1}{2}\left(u - {}^2m_0^2 - {}^3m_0^2\right)$$

viz rozpad
výběr jiných dvojic 4-hyb.
$\Leftarrow$ a využití symetrie
definic s, t, u

dostáváme

$$\vec{e}\cdot\vec{f} = \frac{2s\left(t - {}^1m_0^2 - {}^3m_0^2\right) + \left(s + {}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right)\left(s + {}^3m_0^2 - {}^4m_0^2\right)}{\lambda^{1/2}(s, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\lambda^{1/2}(s, {}^3m_0^2, {}^4m_0^2)}$$

$$= \frac{s\left(t - u + \underbrace{s + t + u - {}^1m_0^2 - {}^3m_0^2 - {}^4m_0^2 - {}^2m_0^2}\right) + \left({}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right)\left({}^3m_0^2 - {}^4m_0^2\right)}{\lambda^{1/2}(s, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\lambda^{1/2}(s, {}^3m_0^2, {}^4m_0^2)}$$

$$= \frac{s(t-u) + \left({}^1m_0^2 - {}^2m_0^2\right)\left({}^3m_0^2 - {}^4m_0^2\right)}{\lambda^{1/2}(s, {}^1m_0^2, {}^2m_0^2)\,\lambda^{1/2}(s, {}^3m_0^2, {}^4m_0^2)}$$

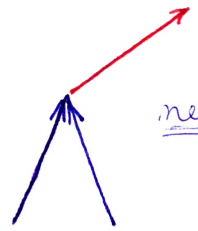
obecný rozptyl je zadán
- typy částic $\to$ ${}^1m_0$ ${}^2m_0$ ${}^3m_0$ ${}^4m_0$
- celkovou kl. hmotn = energií v těžišťové soust $M_0 = \sqrt{s}$
- [úhlem roviny syntézy a roviny rozpadu θ
- transférem hybnosti t (nebo u)] $\leftarrow$ jeden z těchto údajů

+ orientace a umístění těžišťové soustavy

Anihilace

přeměna páru částice + antičástice na světelné částice
- vstupující částice mají stejnou klid. hmotnost
- vystupující částice mají nulovou klid. hmotnost

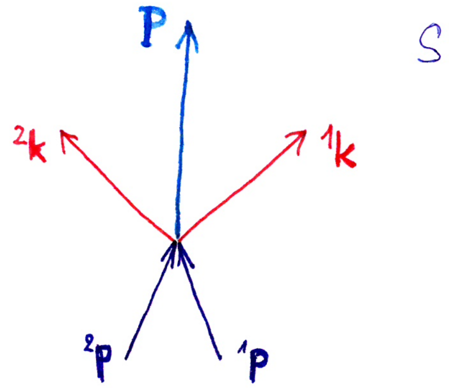
proces 2→1 není možný
- vstupující 4-hybnost časupodobná
- vystupující 4-hybnost nulová



nelze!

proces 2→2 - možné

těžišťová soustava S



$$ {}^1p^\mu + {}^2p^\mu = {}^1k^\mu + {}^2k^\mu $$

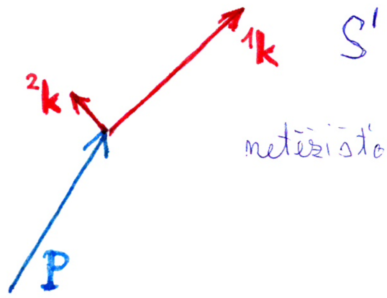
$$ \begin{bmatrix} m_0\gamma c \\ m_0\gamma v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_0\gamma c \\ -m_0\gamma v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ -\hbar k \end{bmatrix} $$

$\omega = ck$

$\Downarrow$ $m_0\gamma c^2 = \hbar\omega$ tj. $mc^2 = E$

výsledné 4-hybnosti

$$ {}^{1,2}k^\mu = \begin{bmatrix} mc \\ \pm mc \end{bmatrix} $$



netěžišťová s.

netěžišťová soustava S'

boost β - rychlost $\frac{v}{c} = \mathrm{th}\,\beta$ v rovině $t-x$

$$ {}^1k^\mu \to {}^1k^{\mu'} = e^{\beta}\,{}^1k^\mu = \begin{bmatrix} mce^{\beta} \\ mce^{+\beta} \end{bmatrix} \qquad {}^2k^\mu \to {}^2k^{\mu'} = e^{-\beta}\,{}^2k^\mu = \begin{bmatrix} mce^{-\beta} \\ -mce^{-\beta} \end{bmatrix} $$

přímé řešení - pouze rozpad na fotony

$$ {}^1p + {}^2p \to \boxed{P \to {}^1k + {}^2k} \qquad {}^ik^2 = 0 \qquad p^{\mu'} = \begin{bmatrix} E/c \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 c\,\mathrm{ch}\beta \\ M_0 c\,\mathrm{sh}\beta \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1,2}k^{\mu'} = \begin{bmatrix} \frac{\hbar\,{}^{1,2}\omega}{c} \\ \pm\frac{\hbar\,{}^{1,2}\omega}{c} \end{bmatrix} $$

$$ E = \hbar\,{}^1\omega + \hbar\,{}^2\omega $$

$$ cP = \hbar\,{}^1\omega - \hbar\,{}^2\omega $$

$\Downarrow$

$$ {}^1\omega = \frac{E+cP}{2\hbar} = \frac{M_0c^2}{2\hbar}(\mathrm{ch}\beta + \mathrm{sh}\beta) = \frac{M_0c^2}{2\hbar}e^{\beta} = \frac{M_0c^2}{2\hbar}\gamma\left(1+\frac{v}{c}\right) = \frac{M_0c^2}{2\hbar}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} $$

$$ {}^2\omega = \frac{E-cP}{\hbar} = \frac{M_0c^2}{2\hbar}(\mathrm{ch}\beta - \mathrm{sh}\beta) = \frac{M_0c^2}{2\hbar}e^{-\beta} = \frac{M_0c^2}{2\hbar}\gamma\left(1-\frac{v}{c}\right) = \frac{M_0c^2}{2\hbar}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} $$

Anihilace v řeči Mandelstamových proměnných

$$ {}^1m_0 = {}^2m_0 = m_0 \qquad {}^3m_0 = {}^4m_0 = 0 $$

$$ s+t+u = 2m_0^2 $$

$$ \lambda(s, m_0^2, m_0^2) = s^2 + \cancel{2m_0^4} - 4sm_0^2 - \cancel{2m_0^4} = s(s-4m_0^2) $$

$$ \lambda(s,0,0) = s^2 $$

$$ {}^1p = \frac{c}{2\sqrt{s}}\begin{bmatrix} s \\ \sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}\,\vec{e} \end{bmatrix} = \frac{c}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{s} \\ \sqrt{s-4m_0^2}\,\vec{e} \end{bmatrix} \qquad {}^2p = \frac{c}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{s} \\ -\sqrt{s-4m_0^2}\,\vec{e} \end{bmatrix} $$

$$ \frac{1}{2}\sqrt{s} = m \qquad s = 4m^2 $$

$$ {}^1k = \frac{c}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{s} \\ \sqrt{s}\,\vec{f} \end{bmatrix} \qquad {}^2k = \frac{c}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{s} \\ -\sqrt{s}\,\vec{f} \end{bmatrix} $$

$$ \operatorname{ch}\Delta\beta = \frac{s-2m_0^2}{2m_0^2} = \frac{s}{2m_0^2} - 1 = 2\frac{m}{m_0} - 1 $$

$$ \cos\Theta = \vec{e}\cdot\vec{f} = \frac{\cancel{s}(t-u)}{\cancel{s}\sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}} = \frac{t-u}{\sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}} = \frac{s+2t-2m_0^2}{\sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}} $$

$$ t-u = \sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}\cos\Theta $$

$$ t+u = 2m_0^2 - s $$

$$ t = m_0^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}\cos\Theta = m_0^2 - 2m^2 + 2m\sqrt{m^2-m_0^2}\cos\Theta $$

$$ u = m_0^2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{s}\sqrt{s-4m_0^2}\cos\Theta = m_0^2 - 2m^2 - 2m\sqrt{m^2-m_0^2}\cos\Theta $$

$$ -t = (m^2-m_0^2) + m^2 - 2m\sqrt{m^2-m_0^2}\cos\Theta $$

$$ -u = (m^2-m_0^2) + m^2 + 2m\sqrt{m^2-m_0^2}\cos\Theta $$

$$ \Theta = 0 \qquad \cos\Theta = 1 $$

$$ -t = \left(-\sqrt{m^2-m_0^2} + m\right)^2 = m_0^2\left(\operatorname{sh}\tfrac{\Delta\beta}{2} - \operatorname{ch}\tfrac{\Delta\beta}{2}\right)^2 = +m_0^2\exp(+\Delta\beta) $$

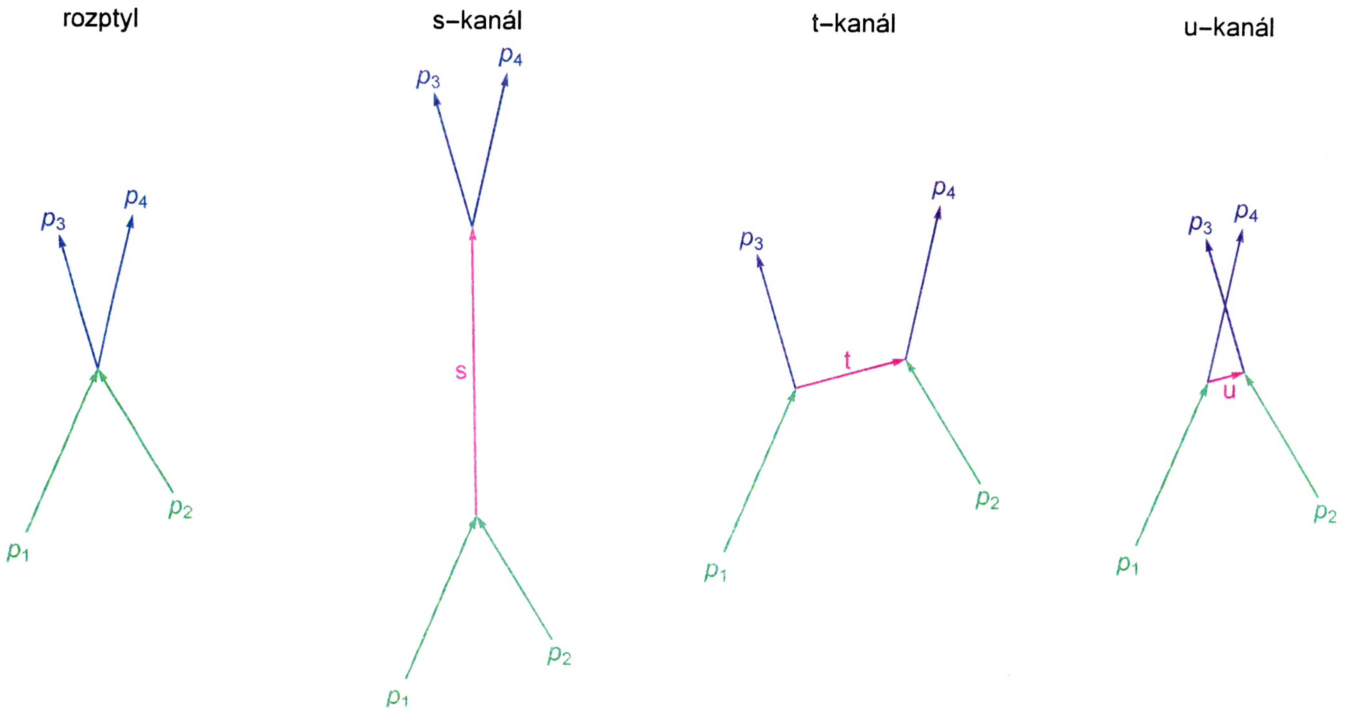
$$ -u = \left(\sqrt{m^2-m_0^2} + m\right)^2 = m_0^2\left(\operatorname{sh}\tfrac{\Delta\beta}{2} + \operatorname{ch}\tfrac{\Delta\beta}{2}\right)^2 = m_0^2\exp(-\Delta\beta) $$

volba $\sqrt{m^2-m_0^2} = -\operatorname{sh}\frac{\Delta\beta}{2}$ $\qquad m = m_0\operatorname{ch}\frac{\Delta\beta}{2}$

Tachyony

tachyony = částice s prostorupodobnou 4-hybností
- objevují se jako formální řešení srážkových problémů
- spojují prostorupodobně položené události
- mají formálně imaginární klidovou hmotnost $m_0 = \sqrt{-\frac{P^2}{c^2}}$

v přírodě se (na klasické úrovni) nevyskytují
mohou být užitečné jako technický mezikrok při výpočtu
viz Mandelstamovy proměnné pro 2-2 rozptyl



Kvantová teorie

při výpočtu kvantových amplitud se uplatňují i procesy obsahující tzv. virtuální částice
tyto částice mohou mít i tachyonový charakter
- není možno přímo pozorovat
- pozorovatelná je pouze celková amplituda, která vede vždy ke kauzálním (odsvětelně se šířícím) předpovědím