Dynamika relativistické částice

Relativistická pohybová rovnice, 4-síla.

Pohybová rovnice, 4-síla, tvorba klidové hmotnosti, rozštěpení 4-síly v inerciální soustavě, složka neměnící klidovou hmotnost, klidová síla, síla ve směru a kolmo na pohyb.

Druhy 4-sil.

4-síla zachovávající klidovou hmotnost. Nulová 4-síla, vztah růstu klidové hmotnosti a zrychlení.

Mechanické modely 4-síly.

Raketový pohon, fotonová raketa. Tlak hmoty. Odraz hmoty - model ortogonální síly.

4-síla generovaná polem.

4-síla skalárního pole. Lorentzova síla elektromagnetického pole

Síla pro hyperbolický pohyb.

Hyperbolický pohyb (opakování), konstantnost klidového zrychlení. 4-síla zachovávající klidovou hmotnost, konstantnost 3-síly. Nulová síla - fotonová raketa. "Tlačení" paprskem. Skalární síla, konstantní elektrická síla.

Pohybová rovnice, 4-síla

Pohybová rovnice relativistické částice

volná částice = zachovávající 4-hybnost

částice pod vlivem vnějšího působení = proměnné 4-hybnost

kovariantní forma změny 4-hybnosti

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{p} = \mathbf{F} \qquad \text{tj} \qquad \frac{d}{d\tau}p^\mu = F^\mu$$

4-síla

$\mathbf{F}$ 4-vektor charakterizující:

- změnu směru $\mathbf{p}$ = změnu vůči rovnoměrnému přímočar. pohybu
- změnu velikosti $\mathbf{p}$ = změnu klidové hmotnosti

4-síla může mít libovolný kauzální charakter

- prostorupodobná / nulová / časupodobná

Změna klidové hmotnosti

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u} \qquad \mathbf{u}^2 = -c^2 \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 u^\mu) = \frac{dm_0}{d\tau}u^\mu + m_0 a^\mu$$

$$\Downarrow$$

$$-u^\mu \frac{d}{d\tau}p_\mu = \frac{d}{d\tau}m_0 c^2$$

definujeme tvorbu klidové hmotnosti jako složku 4-síly ve směru 4-rychlosti

$$W_0 = -u^\mu F_\mu$$

dostáváme tak rovnici pro změnu klidové energie

$$\frac{d}{d\tau}m_0 c^2 = W_0$$

- změnu klidové hmotnosti určuje složka 4-síly ve směru $\mathbf{u}$
- m_0 se nemění $\Leftrightarrow$ 4-síla kolmá na 4-rychlost

Rozštěpení 4-síly vzhledem k inerciální soustavě

inerciální soustava S s časem t $\qquad dt = \gamma\, d\tau \qquad \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$

4-rychlost $\mathbb{u}$ $\leftrightarrow$ γ-faktor, 3-rychlost $\vec{v}$ $\qquad \mathbb{u} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{bmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

4-hybnost $\mathbb{p}$ $\leftrightarrow$ energie E, 3-hybnost $\vec{p}$ $\qquad \mathbb{p} = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{bmatrix} \qquad m = m_0 \gamma$

4-síla $\mathbb{F}$ $\leftrightarrow$ tvorba energie W, 3-síla $\vec{f}$ $\qquad \mathbb{F} = \gamma \begin{bmatrix} W/c \\ \vec{f} \end{bmatrix}$

pohybová rovnice

$$\frac{d}{d\tau}\mathbb{p} = \mathbb{F} \qquad \text{tj.} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W/c \\ \vec{f} \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$\frac{d}{dt}E = W$ $\qquad$ tvorba energie

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{f}$ $\qquad$ zobecněný Newtonův zákon
určuje změnu 3-hybnosti
pozor: $\vec{p} = m\vec{v}$ $\quad$ m relativistická hmotnost

bilance energie

$$W_0 = -u_\mu F^\mu = -[-\gamma c, \gamma\vec{v}] \cdot \begin{bmatrix} \gamma W/c \\ \gamma \vec{f} \end{bmatrix} = \gamma^2 (W - \vec{v}\cdot\vec{f})$$

$\Downarrow$

$W = \gamma^{-2} W_0 + \vec{v}\cdot\vec{f}$ $\qquad$ tvorba energie W je dána jak tvorbou klidové energie, tak 3-silou $\vec{f}$

$\gamma^{-2} = (1-\frac{v^2}{c^2})$, $\qquad W_0 = \frac{d}{d\tau} m_0 c^2 = \gamma \frac{d}{dt} m_0 c^2$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{\text{nárůst energie}} = \underbrace{\frac{1}{\gamma}\frac{d\, m_0 c^2}{dt}}_{\text{změna vnitřní energie}} + \underbrace{\vec{f}\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\text{práce}}$$

forma analogická 1. větě termodynamiky

W_0 je zodpovědná přímo za změnu klidové energie

$\vec{f}$ nemění pouze 4-rychlost, ale i klidovou hmotnost

rozštěpení 4-síly na nezávislé složky tvořící klidovou hmotnost a zachovávající klidovou hmotnost následuje ...

Složky 4-síly tvořící a zachovávající klidovou hmotnost

rozštěpení změny 4-hybnosti

$$\frac{d}{d\tau}\mathbb{P} = \underbrace{\frac{dm_0}{d\tau}\mathbb{u}}_{\text{změna klidové hmotnosti}} + \underbrace{m_0\mathbb{a}}_{\text{změna 4-rychlosti}}$$

obdobně rozštěpíme 4-sílu

$$\mathbb{F} = \frac{W_0}{c^2}\mathbb{u} + \mathbb{F}_* \qquad \text{kde} \quad \mathbb{u}\cdot\mathbb{F}_* = 0$$

složka 4-síly zodpovědná za změnu 4-rychlosti

složka 4-síly zodpovědná za změnu klidové hmotnosti

rozštěpení pohybové rovnice

$$\frac{d\, m_0 c^2}{d\tau} = W_0 \qquad \text{1 rovnice}$$

$$m_0\mathbb{a} = \mathbb{F}_* \qquad \text{3 nezávislé rovnice}$$

(složky kolmé na $\mathbb{u}$)

podmínka kolmosti

$$\mathbb{b} \perp \mathbb{u} \iff b^\mu = \begin{bmatrix} \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{c} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

vskutku:

$$u_\mu b^\mu = [-\gamma c, \gamma\vec{v}]\cdot\begin{bmatrix} b^0 \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \gamma(-cb^0 + \vec{v}\cdot\vec{b}) = 0 \iff b^0 = \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{c}$$

část 4-síly kolmé a rovnoběžná s 4-rychlostí $\mathbb{u}$

$$\mathbb{F}_* = \gamma\begin{bmatrix} \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}_*}{c} \\ \vec{f}_* \end{bmatrix} \qquad \frac{W_0}{c^2}\mathbb{u} = \gamma\begin{bmatrix} W_0/c \\ \frac{W_0}{c^2}\vec{v} \end{bmatrix}$$

celá 4-síla

$$\mathbb{F} = \gamma\begin{bmatrix} \frac{W_0}{c} + \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}_*}{c} \\ \frac{W_0}{c^2}\vec{v} + \vec{f}_* \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} W &= W_0 + \vec{v}\cdot\vec{f}_* = \underbrace{\gamma^{-2}W_0 + \vec{v}\cdot\vec{f}}_{\text{dříve}} \\ \vec{f} &= \frac{W_0}{c^2}\vec{v} + \vec{f}_* \end{aligned}$$

rozštěpení pohyb. rovnic v inerciální soustavě

$$\frac{dE}{dt} = W \Leftrightarrow \underline{\frac{dm_0c^2}{dt}\gamma} + \underline{m_0c^2\frac{d\gamma}{dt}} = \underline{W_0} + \underline{\vec{v}\cdot\vec{f}_*} \qquad \Leftarrow \gamma\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$$

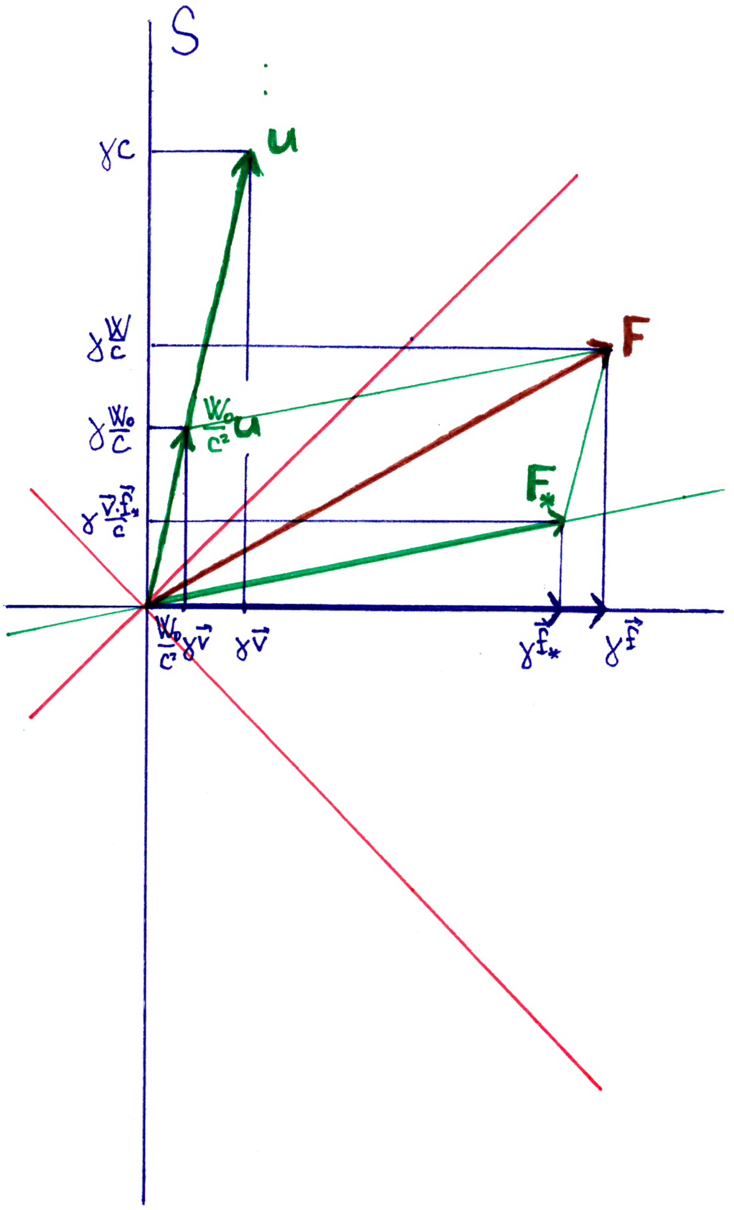
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Leftrightarrow \underline{\frac{dm_0}{dt}\gamma\vec{v}} + \underline{m_0\frac{d\gamma\vec{v}}{dt}} = \underline{\frac{W_0}{c^2}\vec{v}} + \underline{\vec{f}_*}$$

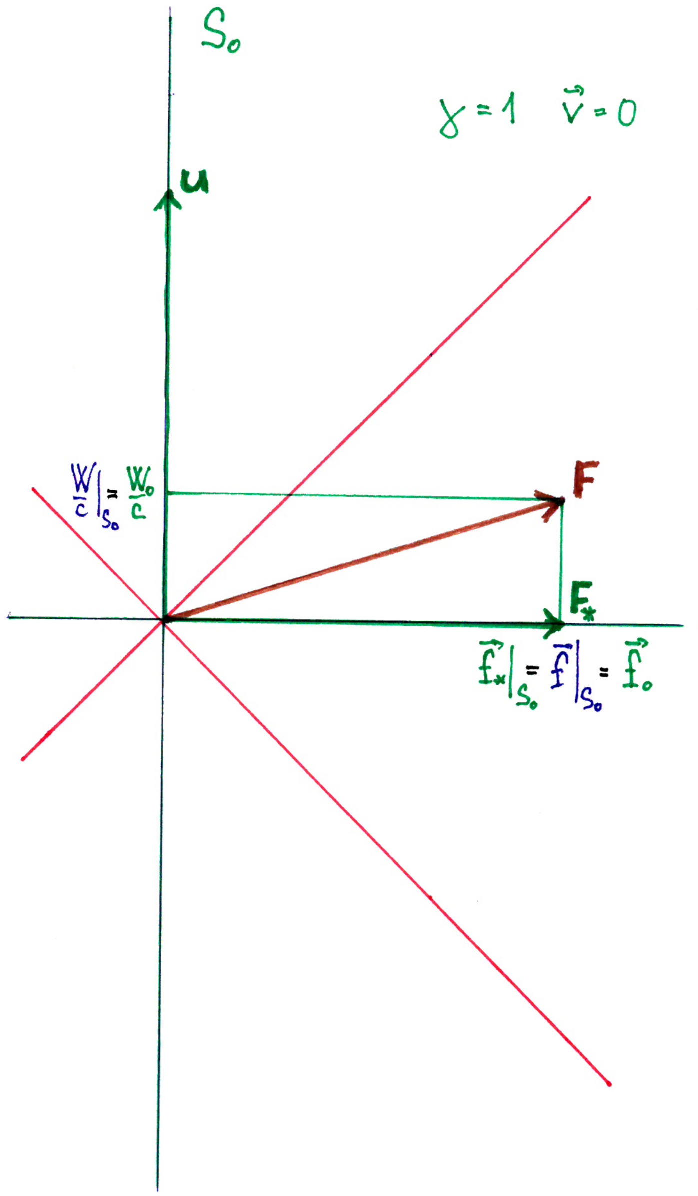
redukuje se na rovnice

$$\gamma\frac{d}{dt}m_0c^2 = W_0 \qquad m_0\frac{d\gamma\vec{v}}{dt} = \vec{f}_* \qquad m_0c^2\frac{d\gamma}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{f}_*$$

konzistentní díky

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{\vec{v}}{c}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\gamma\vec{v}}{c} \qquad \Leftarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = 2\gamma\frac{d}{dt}\gamma - 2\gamma\frac{\vec{v}}{c}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\gamma\vec{v}}{c}$$


S
u
γc
γW/c
γW₀/c
W₀/c² u
F
F*
γ v·f*/c
W₀/c²
γv
γf*
γf


S₀
γ=1 v=0
u
F
F*
W/c|S₀ = W₀/c
f*|S₀ = f|S₀ = f₀

Klidová 3-síla

Klidová soustava $S_0 \equiv S'$

- soustava, ve které se částice momentálně nepohybuje
- během pohybu se mění!

$$u^{\mu'} = \begin{bmatrix} c \\ \vec{0} \end{bmatrix} \qquad a^{\mu'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a}_0 \end{bmatrix} \qquad F^{\mu'} = \begin{bmatrix} W_0/c \\ \vec{f}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F} = \frac{W_0}{c^2} u + \mathbb{F}_* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} W_0/c \\ \vec{f}_0 \end{bmatrix} = \frac{W_0}{c^2} \begin{bmatrix} c \\ \vec{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f}_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad F_*^{\mu'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f}_0 \end{bmatrix}$$

pohybové rovnice

$$m_0 a = \mathbb{F}_* \quad \Leftrightarrow \quad m_0 \vec{a}_0 = \vec{f}_0$$

veličiny v klidové soustavě

$\vec{a}_0$ 3-zrychlení v klidové soustavě, tj $\vec{a}_0 = \vec{A}_0$

$\vec{f}_0$ 3-síla v klidové soustavě (též klidová 3-síla)

charakterizují co cítí pozorovatel spojený s částicí

velikost klidového 3-zrychlení $|\vec{a}_0|$

= velikost 4-zrychlení $a = \sqrt{a_\mu a^\mu}$

transformace mezi laboratorní soustavou S a klid. soust S_0

$S_0 \equiv S'$ se vůči S pohybuje rychlostí $\vec{v}$

směr pohybu $\vec{v} = v \vec{e}_\parallel$

rozklad 3-vektorů $\vec{b} = b_\parallel \vec{e}_\parallel + \vec{b}_\perp$

Lorentzova transformace $S \to S'$

$$L^\mu{}_{\nu'} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & \parallel & \perp \\ \hline 0 & \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 \\ \parallel & \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ \perp & 0 & 0 & I_\perp \end{array}$$

$$F_*^{\mu'} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{0\parallel} \\ \vec{f}_{0\perp} \end{bmatrix} \qquad F_*^\mu = L^\mu{}_{\nu'} F_*^{\nu'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ f_{0\parallel} \\ \vec{f}_{0\perp} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{v f_{0\parallel}}{c} \\ f_{0\parallel} \\ \frac{1}{\gamma} \vec{f}_{0\perp} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{v f_{*\parallel}}{c} \\ f_{*\parallel} \\ \vec{f}_{*\perp} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} f_{*\parallel} &= f_{0\parallel} \\ \vec{f}_{*\perp} &= \frac{1}{\gamma} \vec{f}_{0\perp} \end{aligned}$$

$$a^{\mu'} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{0\parallel} \\ \vec{a}_{0\perp} \end{bmatrix} \qquad a^\mu = L^\mu{}_{\nu'} a^{\nu'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a_{0\parallel} \\ \vec{a}_{0\perp} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{v a_{0\parallel}}{c} \\ a_{0\parallel} \\ \frac{1}{\gamma} \vec{a}_{0\perp} \end{bmatrix} = \gamma^2 \begin{bmatrix} \gamma^2 \frac{v A_\parallel}{c} \\ \gamma^2 A_\parallel \\ \vec{A}_\perp \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} A_\parallel &= \gamma^{-3} a_{0\parallel} \\ \vec{A}_\perp &= \gamma^{-2} \vec{a}_{0\perp} \end{aligned}$$

Rozklad 3-síly podél a kolmo s pohybem

směr pohybu $\vec{v} = v\vec{e}_\parallel$

rozklad 3-vektorů $\vec{b} = b_\parallel \vec{e}_\parallel + \vec{b}_\perp \qquad \vec{b}_\perp \cdot \vec{e}_\parallel = 0$

$$u^\mu = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma v \\ \vec{0} \end{bmatrix} \qquad a^\mu = \gamma^2 \begin{bmatrix} \gamma^2 \frac{vA_\parallel}{c} \\ \gamma^2 A_\parallel \\ \vec{A}_\perp \end{bmatrix} \qquad F^\mu = \gamma \begin{bmatrix} W/c \\ f_\parallel \\ \vec{f}_\perp \end{bmatrix} \qquad F_*^\mu = \gamma \begin{bmatrix} \frac{v f_{*\parallel}}{c} \\ f_{*\parallel} \\ \vec{f}_{*\perp} \end{bmatrix}$$

pohybová rovnice

$$m_0 \mathbf{a} = \mathbf{F}_*$$

$$\Updownarrow$$

$$m_0 a^\mu = F_*^\mu$$

$$\Updownarrow$$

$$m_0 \gamma \begin{bmatrix} \gamma^2 \frac{vA_\parallel}{c} \\ \gamma^2 A_\parallel \\ \vec{A}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v f_{*\parallel}}{c} \\ f_{*\parallel} \\ \vec{f}_{*\perp} \end{bmatrix}$$

podélná složka

$$m_0 \gamma^3 A_\parallel = f_{*\parallel}$$

$$\Downarrow$$

$$m_\parallel A_\parallel = f_{*\parallel}$$

$$m_\parallel = m\gamma^2 = m_0\gamma^3$$ podélná hmotnost

kolmá složka

$$m_0 \gamma \vec{A}_\perp = \vec{f}_{*\perp}$$

$$\Downarrow$$

$$m_\perp \vec{A}_\perp = \vec{f}_{*\perp}$$

$$m_\perp = m = m_0 \gamma$$ kolmá hmotnost

přechod ke klidové soustavě (kontrola konzistence)

$$(m_0\gamma^3)(\gamma^{-3} a_{0\parallel}) = f_{0\parallel}$$

$$\Downarrow$$

$$m_0 a_{0\parallel} = f_{0\parallel}$$

$$(m_0\gamma)(\gamma^{-2}\vec{a}_{0\perp}) = \gamma^{-1}\vec{f}_{0\perp}$$

$$\Downarrow$$

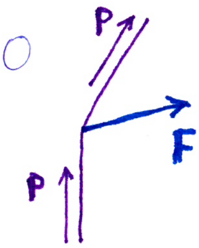
$$m_0 \vec{a}_{0\perp} = \vec{f}_{0\perp}$$

Druhy 4-sil

4-síla dána pouze 3-sílou
+ nějakou podmínkou určující W

Síla zachovávající klidovou hmotnost

m_0 se nemění, tj. $W_0 = 0$, tj. $u^r F_r = 0$



$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_* = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}_*}{c} \\ \vec{f}_* \end{bmatrix} \qquad W = \vec{v}\cdot\vec{f}_* \qquad \vec{f} = \vec{f}_*$$

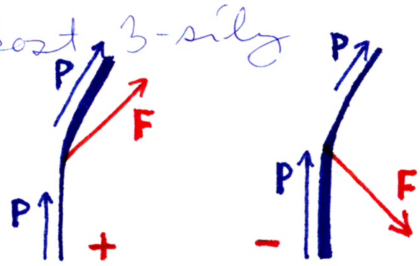
Lorentzova síla určující působení elektromag. pole na částici má tento charakter - viz příště

Nulová 4-síla

$\mathbb{F}^2 = 0$ tj. $0 = F_r F^r = \gamma^2\left(-\frac{W^2}{c^2} + \vec{f}^2\right)$

⇓

$W = \pm f c$ kde $f = |\vec{f}|$ je velikost 3-síly



$$F^r = \gamma \begin{bmatrix} \pm f \\ \vec{f} \end{bmatrix}$$

znaménko určuje orientaci 4-síly do budoucnosti/minulosti

$W_0 = -u^r F_r = \gamma^2(\pm c f - \vec{v}\cdot\vec{f})$

rozštěpení 4-síly

$F^r = \frac{W_0}{c^2}u^r + F_*^r \qquad u^r F_{*r} = 0 \Rightarrow 0 = F_r F^r = -\frac{W_0^2}{c^4}c^2 + F_*^r F_{*r} \Rightarrow W_0 = \pm c\sqrt{F_*^r F_{*r}}$

pohybové rovnice

$W_0 = \frac{d}{d\tau} m_0 c^2 \qquad F_*^r = m_0 a^r$ ⇓

změna klidové hmotnosti

$\frac{dm_0}{d\tau} = \pm m_0 \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}\log m_0 = \pm\frac{a}{c} \Rightarrow \log\frac{m_0}{m_{0\,\text{počáteční}}} = \pm\int \frac{a}{c}\,d\tau$

⇓

$m_0 = m_{0\,\text{počáteční}} \exp\left(\pm\int_{\tau_{\text{poč.}}}^{\tau} \frac{a}{c}\,d\tau\right)$

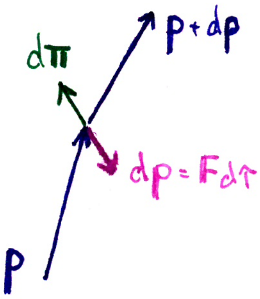
změna klidové hmotnosti přímo souvisí s velikostí 4-zrychl.

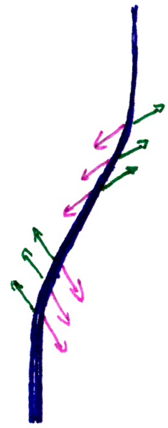
Mechanické modely 4-síly

mechanické realizace 4-síly
= změna pohybu tělesa díky
- odhazování hmoty (raketový motor)
- absorbce hmoty ("tlačení" paprskem)
- odraz hmoty

Odhazování hmoty

bilance 4-hybnosti





$$p = (p+dp) + d\pi$$

stará 4-hybnost — nová 4-hybnost — odhozená hmota

$$\Rightarrow \quad dp = -d\pi = F\,d\tau$$

$d\pi$ časupodobné/nulové do budoucnosti

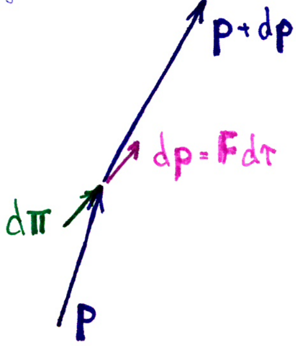
F časupodobné/nulové do minulosti

4síla
- snižuje klidovou hmotnost m_0
- mění 4-rychlost

nejefektivnější "pálení" hmoty na hybnost
- F nulová 4-síla → fotonová raketa

Absorbce hmoty

bilance 4-hybnosti



$$p + d\pi = (p+dp)$$

$$\Rightarrow \quad dp = d\pi = F\,d\tau$$

$d\pi$ časupodobné/nulové do budoucnosti

dp časupodobné/nulové do budoucnosti

4 síla
- zvyšuje klidovou hmotnost m_0
- mění 4-rychlost

nejefektivnější "tlačení" pomocí světelného paprsku

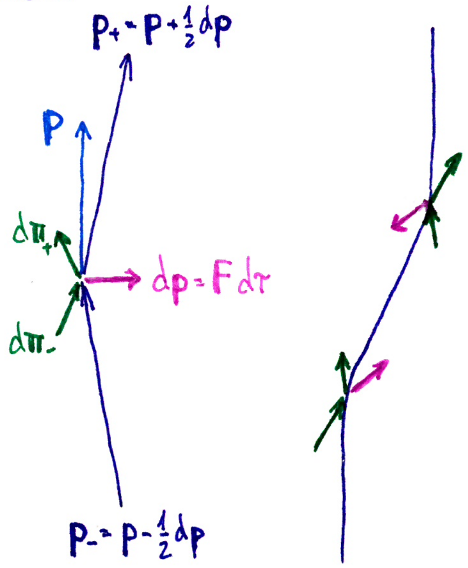
Odraz hmoty

elastický odraz hmoty modeluje 4-sílu neměnící klidovou hmotnost

bilance 4-hybnosti

$$\underbrace{\left(p-\tfrac{1}{2}dp\right)}_{\text{stará 4-hybnost}} + \underbrace{d\pi_-}_{\text{nalétávající hmota}} = \underbrace{\left(p+\tfrac{1}{2}dp\right)}_{\text{nová 4-hybnost}} + \underbrace{d\pi_+}_{\text{odražená hmota}}$$

$$dp = d\pi_- - d\pi_+ = F\,d\tau$$



těžišťové soustava

těžišťová soustava

$$d\pi_- = \begin{bmatrix} d\mathcal{E}/c \\ d\vec{\pi} \end{bmatrix} \qquad d\pi_+ = \begin{bmatrix} d\mathcal{E}/c \\ -d\vec{\pi} \end{bmatrix}$$

$$dp = \begin{bmatrix} 0 \\ 2d\vec{\pi} \end{bmatrix} = F\,d\tau$$

$$p = \begin{bmatrix} E/c \\ 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{těžišťové soustava}$$

$\Downarrow$

$$p \cdot F = m_0 u^\mu F_\mu = 0$$

$F = F_\star$ 4-síla neměnící klidovou hmotnost

4-síla generovaná polem

Skalární pole

- popsané skalární fcí Ψ v prostoročase

4-síla na částici

$$F_\mu = -e\,\nabla_\mu \Psi$$

skalární náboj
charakterizuje citlivost částice na pole

gradient pole

tvorba klidové hmotnosti (energie)

obecně nezachovává klidovou hmotnost

$$W_0 = -u^\mu F_\mu = e\,u^\mu \nabla_\mu \Psi = e\,\frac{d}{d\tau}\Psi$$

$$\Downarrow \quad \frac{d m_0 c^2}{d\tau} = W_0 = e\,\frac{d}{d\tau}\Psi$$

$$\Downarrow \quad m_0 c^2 = \bar{m}_0 c^2 + e\Psi \qquad m_0 = \bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\Psi$$

klidová energie (hmotnost) částice se skládá z "holé" energie $\bar{m}_0 c^2$ (hmotnosti $\bar{m}_0$) a příspěvku od skalárního pole Ψ

složka 4-síly kolmé na 4-rychlost

$$F_* = P_u \cdot F \qquad \text{tj} \quad F_*^\mu = -e\,P_u{}^\mu{}_\nu \nabla^\nu \Psi$$

kde P_u je projektor na směry prostoročasově kolmé k u

$$P_u{}^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{c^2}u^\mu u_\nu$$

vskutku $P_u{}^\mu{}_\nu u^\nu = u^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu(-c^2) = 0$

Elektromagnetické pole

- prozatím popsáno prostorovými vektorovými poli
  $\vec{E}$ elektrické intenzity
  $\vec{B}$ magnetické indukce

4-síla na částici

F vždy zachovává klidovou hmotnost

$\Rightarrow W_0 = -U^\mu F_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad F^\mu = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}}{c} \\ \vec{f} \end{bmatrix}$

3-síla $\vec{f}$ je dána Lorentzovou silou

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

4-síla

$$F^\mu = \gamma \begin{bmatrix} \frac{q\vec{v}\cdot\vec{E}}{c} \\ q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \end{bmatrix}$$

více viz příště

po zavedení kovariantního popisu EM pole

Síla pro hyperbolický pohyb

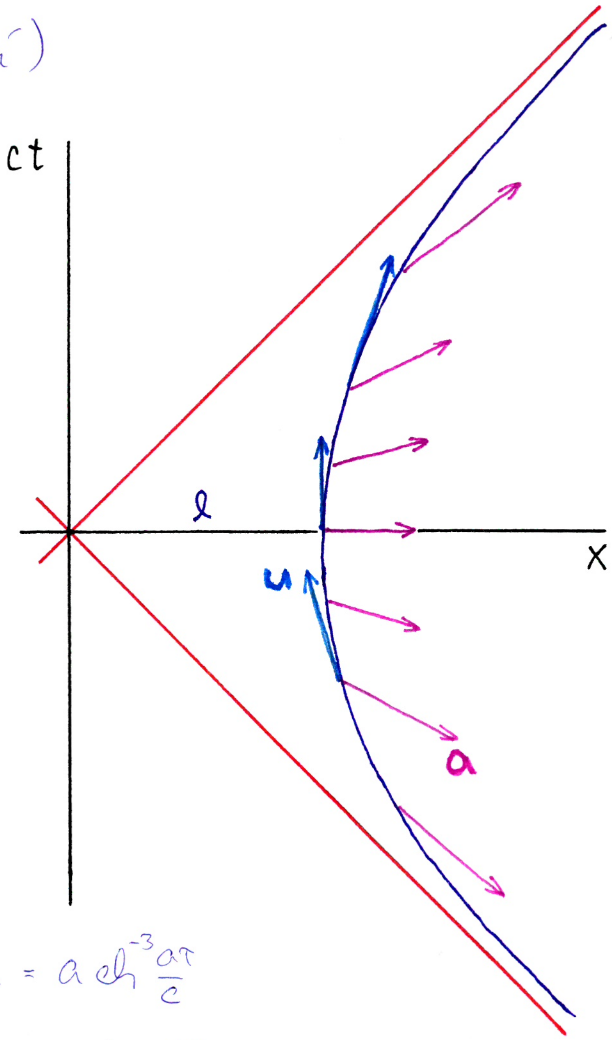
Hyperbolický pohyb (opakování)

poloha

$$x^0 = ct = \ell \, \mathrm{sh}\frac{c\tau}{\ell}$$

$$x^1 = x = \ell \, \mathrm{ch}\frac{c\tau}{\ell}$$

pohyb v 1+1 dimenzi



4-rychlost

$$u = \begin{bmatrix} c\,\mathrm{ch}\frac{c\tau}{\ell} \\ c\,\mathrm{sh}\frac{c\tau}{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma v \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \mathrm{ch}\frac{c\tau}{\ell} = \mathrm{ch}\beta \qquad \frac{v}{c} = \mathrm{th}\,\beta \qquad \beta = \frac{c\tau}{\ell}$$

4-zrychlení

$$a = \begin{bmatrix} \frac{c^2}{\ell}\,\mathrm{sh}\frac{c\tau}{\ell} \\ \frac{c^2}{\ell}\,\mathrm{ch}\frac{c\tau}{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\,\mathrm{sh}\frac{a\tau}{c} \\ a\,\mathrm{ch}\frac{a\tau}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^4 \frac{vA}{c} \\ \gamma^4 A \end{bmatrix}$$

$$a = \sqrt{a_\tau a^\tau} = \frac{c^2}{\ell} \qquad \frac{c\tau}{\ell} = \frac{a\tau}{c} = \beta \qquad A = \gamma^{-3} a = a\,\mathrm{ch}^{-3}\frac{a\tau}{c}$$

přímý výpočet v inerciální soustavě

$$x^2 - c^2t^2 = \ell^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\ell^2 + c^2t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{ct}{\sqrt{\ell^2 + c^2t^2}} \qquad \gamma = \frac{1}{\ell}\sqrt{\ell^2 + c^2t^2} \qquad p = mv = m_0 v \gamma = m_0 a t$$

$$\Rightarrow A = \frac{c^2\ell^2}{\sqrt{\ell^2 + c^2t^2}^{\,3}} = \gamma^{-3} a$$

4-síla zachovávající klidovou hmotnost

$$F^\mu = F_*^\mu = m_0 a^\mu$$

$$\Downarrow \quad F^\mu = \begin{bmatrix} f_0 \,\mathrm{sh}\frac{a\tau}{c} \\ f_0 \,\mathrm{ch}\frac{a\tau}{c} \end{bmatrix} \qquad f_0 = m_0 a \quad \text{konstanta}$$

3-síla

$$F^\mu = \gamma \begin{bmatrix} W/c \\ f \end{bmatrix} = \mathrm{ch}\frac{a\tau}{c} \begin{bmatrix} \frac{v f_0}{c} \\ f_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} W = v f_0 \\ f = f_0 = \text{konstanta!!} \end{matrix}$$

pohybová rovnice v inerciální soustavě

$$\underset{\downarrow \atop m_0 a t}{\frac{d}{dt} p} = \underset{\downarrow \atop f_0}{f} \qquad \text{(pouze 1 prostorová dimenze)}$$

splněno!

alternativně – rovnice ve směru pohybu

$$m_\parallel A_\parallel = f_{*\parallel} \quad \Leftrightarrow \quad (m_0 \gamma^3)(\gamma^{-3} a) = f_0$$

$m_\parallel$, $A_\parallel$: v-závislé; $f_{*\parallel}$: v-nezávislé (konstanta)

splněno!

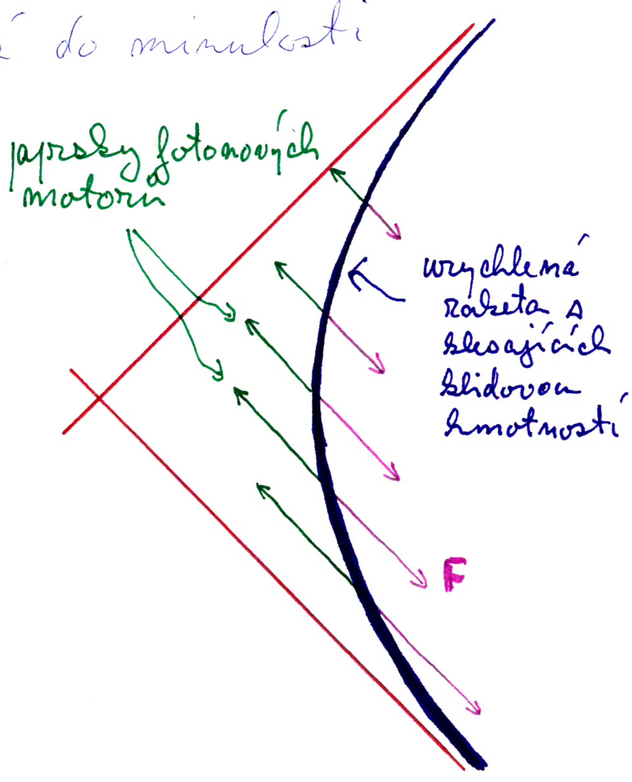
Nulová 4-síla (fotonová raketa)

$\mathbf{F}^2 = 0 \qquad \mathbf{F}$ nulová orientovaná do minulosti

$$\Downarrow \quad m_0 = m_{0p\check{c}} \exp\left(-\int_0^\tau \frac{a}{c}\, d\tau\right)$$

$$= m_{0p\check{c}} \exp\left(-\frac{a}{c}\tau\right)$$

počáteční klidová hmotnost exponenciálně roste s vlastní délkou letu



Elektromagnetická síla

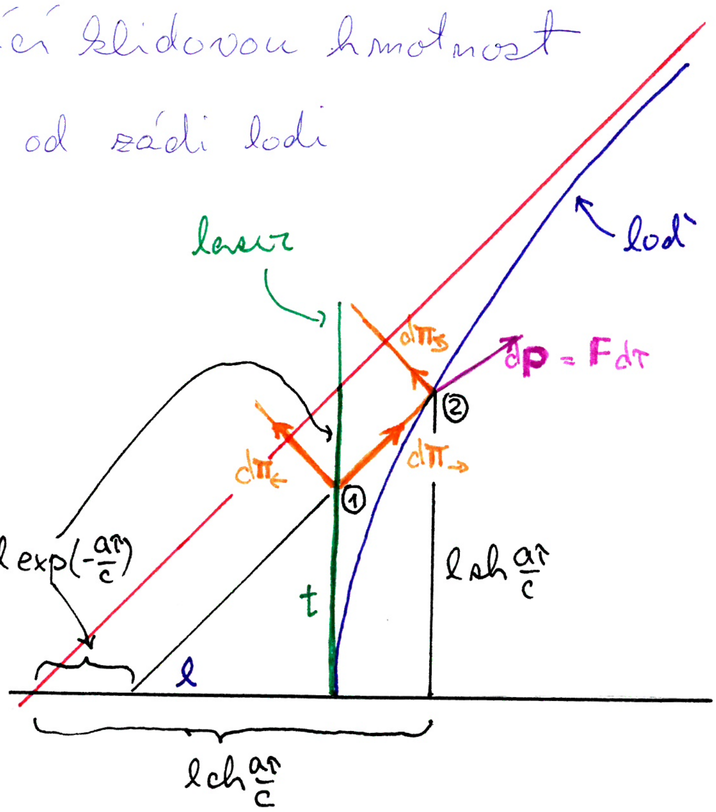
$\vec{E} = konst \qquad \vec{B} = 0$

$$F^{\mu} = \gamma \begin{bmatrix} \vec{v}.\vec{f} \\ \vec{f} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{qEv}{c} \\ qE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qE \, sh \frac{a\tau}{c} \\ qE \, ch \frac{a\tau}{c} \end{bmatrix}$$

$$f = f_0 = qE$$

Realizace 4-síly zachovávající klidovou hmotnost

„laserový paprsek" odražený od zádi lodi



① stojící hmota spálená na světelný paprsek

② odraz paprsku od zádi lodi

① bilance 4-hybnosti

$$\mathbb{P} = (\mathbb{P} + d\mathbb{P}) + d\Pi_{\leftarrow} + d\Pi_{\rightarrow}$$

4-hybnost zdroje, pokles klid. hm., paprsek doleva, paprsek doprava

klidová soustava laseru

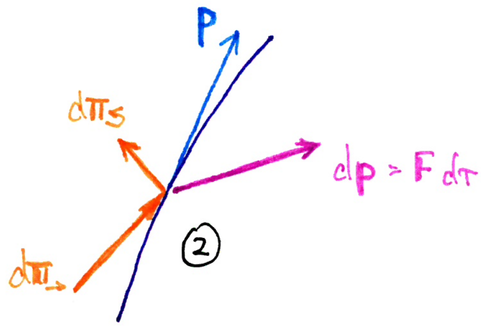
$$\begin{bmatrix} M_0 c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (M_0 - dM_0)c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\pi \\ -d\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\pi \\ +d\pi \end{bmatrix}$$

$dM_0 > 0$ kolik hmoty „spáleno"

$d\pi > 0$ energie paprsku v soustavě laseru

$$\Downarrow\ dM_0 = \frac{2}{c} d\pi$$

② bilance 4-hybnosti



$$\mathbf{p} + d\Pi_{\rightarrow} = (\mathbf{p} + d\mathbf{p}) + d\Pi_{\nwarrow}$$

$$\Rightarrow d\mathbf{p} = d\Pi_{\rightarrow} - d\Pi_{\nwarrow}$$

hyperbolický pohyb $\Rightarrow dp = f_0\,d\tau = m_0 a\,d\tau$

$$\begin{bmatrix} dp\,\mathrm{sh}\frac{a\tau}{c} \\ dp\,\mathrm{ch}\frac{a\tau}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\pi \\ d\pi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\pi_{\nwarrow} \\ -d\pi_{\nwarrow} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} dp\,\mathrm{sh}\frac{a\tau}{c} = d\pi - d\pi_{\nwarrow} \\ dp\,\mathrm{ch}\frac{a\tau}{c} = d\pi + d\pi_{\nwarrow} \end{matrix}$$

$$\Downarrow\ 2d\pi = dp \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) = m_0 a \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\tau$$

①+② $\Rightarrow$ hmotnost „spálená" na paprsek:

$$\frac{dM_0}{d\tau} = \frac{m_0 a}{c} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) \Rightarrow M_0 = m_0\left(\exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) - 1\right)$$

vztah vlastního času lodi τ a času laseru t

$$ct = l\left(1 - \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right)\right)$$

$$M_0 = m_0\left[\frac{l}{l - ct} - 1\right]$$

diverguje pro $\tau \to \infty$, což je v konečném čase laseru $ct \to l$

Síla skalárního pole

$$\psi = \psi(s) \qquad s = \sqrt{-(x^0)^2 + (x^1)^2} = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$$

$$\nabla_\mu \psi = [\psi_{,0}, \psi_{,1}] = \psi' [s_{,0}, s_{,1}] = \frac{\psi'(s)}{s} [-x^0, x^1]$$

$$\Downarrow \quad \nabla^\mu \psi = \frac{\psi'(s)}{s} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \end{bmatrix}$$

vyčísleno na světočáře $s = l$

$$F^\mu = -e \nabla \psi = -e \psi'(l) \begin{bmatrix} \mathrm{sh} \frac{a\tau}{c} \\ \mathrm{ch} \frac{a\tau}{c} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad f_0 = -e \psi'(l)$$

4-síla kolmá na 4-rychlost

v tomto případě skalární pole nemění klid. hmotnost

světočáre se pohybuje po ekvipotenciále $\psi = \text{konst}$