Relativistická formulace elektrodynamiky

Klasická formulace.
Zdroje, skalární a vektorový potenciál, elektrická intenzita a magnetická indukce, Maxwellovy rovnice, Lorentzova síla.

4-proud, 4-tok náboje.
Náboj, hustota náboje, 4-tok náboje. Obecný 4-proud, kauzální charakter proudu.

4-potenciál a Maxwellův tenzor.
4-potenciál. Maxwellův tenzor. Vztah Maxwellova tenzoru k 4-potenciálu.

Relativistický tvar Maxwellových rovnic.
Zdrojové rovnice. Potenciálové rovnice.

Lorentzova 4-síla.
Hustota Lorentzovy 4-síly, konvekční proud. Lorentzova 4-síla na částici.

4-potenciál a kalibrační volnost.
Rovnice pro 4-potenciál. Kalibrační volnost 4-potenciálu, kalibrační podmínky. Lorenzova kalibrace. Coulombova kalibrace. Weylova kalibrace

Duál Maxwellova tenzoru a skalární invarianty.
Levi-Civitův tenzor ve 3 a 4 dimenzích. Hodgeova dualita, duál Maxwellova tenzoru. Dualita vakuových Maxwellových rovnic. Skalární invarianty elektromagnetického pole.

Lorentzova transformace elektromagnetického pole.
Transformace 4-proudu, 4-potenciálu, Maxwellova tenzoru. Transformace elektrické intenzity a magnetické indukce.

Klasická formulace

Zdroje

ϱ hustota náboje $\Delta q = \varrho \Delta V$ náboj v malém objemu ΔV

$\vec{j}$ hustota proudu $\Delta I = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$ proud skrze malou plochu $\Delta \vec{S}$

pro prostý konvekční proud (proudění náboje) $\vec{j} = \varrho \vec{v}$

Potenciály

ϕ skalární potenciál

$\vec{A}$ vektorový potenciál

Elektrické a magnetické pole

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ elektrická intenzita

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ magnetická indukce

Maxwellovy rovnice

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$ $\quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$ $\quad \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ zdrojové

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ potenciálové

Lorentzova síla

$\vec{\Phi} = \varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$ hustota síly $\Delta \vec{f} = \vec{\Phi} \Delta V$ síla na objem ΔV

4-proud, 4-tok náboje

Náboj

charakteristika částic (hmoty) jak se účastní elektromagnetické interakce – jak jako zdroj, tak jako citlivost na působení

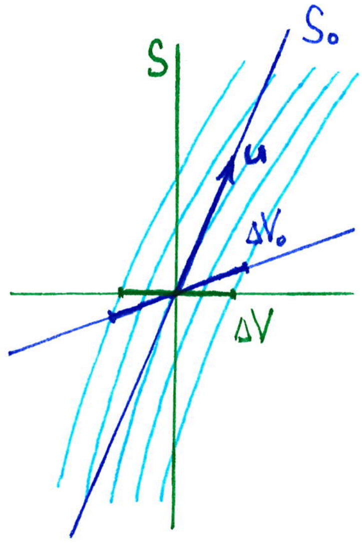
náboj se zachovává – nevzniká a nezaniká, pouze se přemisťuje

může se ale kompenzovat

náboj může být kladný i záporný

kvantová mechanika → náboj je diskrétní

na klasické úrovni není podstatné



Tok náboje – konvekční 4-proud

spojité prostředí nesoucí náboj

popsáno svazkem (kongruencí) světočar

každá světočára nese konstantní náboj

úzký svazek kolem jedné světočáry

klidová soustava svazku S_0

- soustava ve kt. centrální světočáře má nulovou rychlost $\vec{v}_0 = 0$
- závisí pouze na svazku světočar
- v různých bodech svazku je různá

laboratorní soustava S

- nezávislá na svazku
- centrální světočára se pohybuje rychl $\vec{v}$

objem svazku

klidová soustava: $\Delta V_0 = S_\perp l_0$

laboratorní soustava: $\Delta V = S_\perp l = S_\perp l_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \Delta V_0$

hustota náboje

náboj Δq spojený se svazkem nezávisí na soustavě

klidová soustava $\varrho_0 = \frac{\Delta q}{\Delta V_0}$

laboratorní soustava $\varrho = \frac{\Delta q}{\Delta V} = \gamma \varrho_0$

tok náboje = 4-proud (hustota)

4-vektor nesoucí informaci o proudícím náboji

$$\mathbf{j} = \varrho_0 \mathbf{u} \qquad \text{t.j.} \quad j^\mu = \varrho_0 u^\mu = \begin{bmatrix} c\varrho_0\gamma \\ \varrho_0\gamma\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varrho \\ \varrho\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{bmatrix}$$

3-vektor hustoty proudu $\vec{j}$

pro prosté proudění (konvekční proud) $\vec{j} = \varrho\vec{v}$

Obecný 4-proud

nabitá látka se může skládat z různých nosičů náboje
každý z nich vytváří 4-tok jak popsáno výše
dohromady vytváří celkový 4-proud

$$\mathbf{j}_{celk} = \sum_k \mathbf{j}_k$$

celkový 4-proud dále budeme rozkládat

$$j^\mu = \begin{bmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{bmatrix} \qquad j_\mu = [-c\rho, \vec{j}\,] \qquad \mathbf{j} = c\rho\,\mathbf{n} + \vec{j}$$

ale hustota náboje ρ a proudu $\vec{j}$ již nemusí splňovat
$\vec{j} = \rho\vec{v}$ pro nějakou (smysluplnou) rychlost $\vec{v}$

kondukční 4-proud

pokud 4-proud nepopisuje prosté proudění náboje a nemáme
vztah $\vec{j} = \rho\vec{v}$, nazýváme ho kondukční

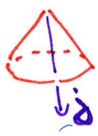
kauzální charakter 4-proudu

4-proud může být obecný 4-vektor

konvekční: $j^\mu = \rho_0 u^\mu$

$\rho_0 > 0$ 

časupodobný do budoucna

$\rho_0 < 0$ 

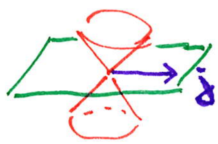
časupodobný do minula

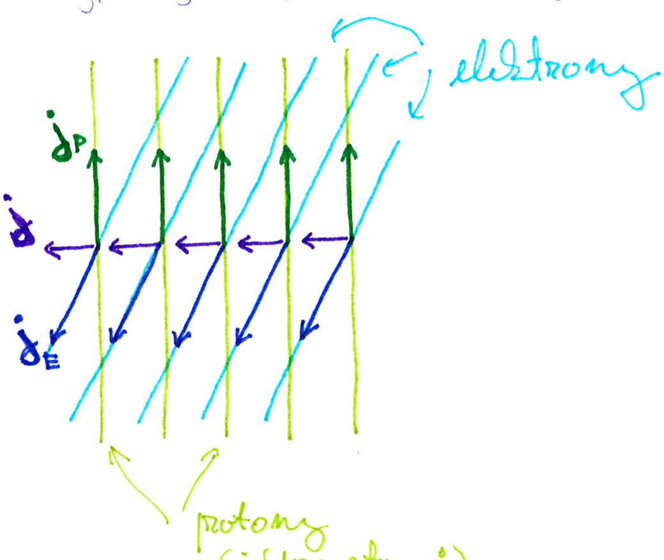
kondukční např. $j^\mu = j^\mu_{protony} + j^\mu_{elektrony} = \rho_{0P} u^\mu_P + \rho_{0E} u^\mu_E$

lze např. dosáhnout, že v laboratorní soustavě

$$\rho_P + \rho_E = 0$$
$$\vec{j}_P + \vec{j}_E = \vec{j} \neq 0$$

$$j^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{j} \end{bmatrix}$$





4-potenciál a Maxwellův tenzor

4-potenciál

$$A^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ \vec{A} \end{bmatrix} \qquad A_\mu = \left[-\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right]$$

4-(ko)vektor zahrnující info o skalárním a vekt. potenciálu
primárně se jedná o kovektor

též

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\phi\,\boldsymbol{\nu} + \vec{A}$$

kde $\boldsymbol{\nu}$ je jednotkový časový kovektor soustavy (viz dříve)

Maxwellův (Faradayův) tenzor

antisymetrický tenzor $F_{\mu\nu}$ stupně 2 zahrnující informaci o elektrické intenzitě $\vec{E}$ a magnetické indukci $\vec{B}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_1 & -\frac{1}{c}E_2 & -\frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ \frac{1}{c}E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\vec{E} \\ \frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix}$$

připomínme, v kartézské soustavě $E^j = E_j \quad B^j = B_j$

$$F^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ \frac{1}{c}E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec{E} \\ \frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix}$$

$$F^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$$

pozor $F^\mu{}_\nu \neq -F^\nu{}_\mu$ ale $F^\mu{}_\nu = -F_\nu{}^\mu$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec{E} \\ -\frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = F^\mu{}_\beta\, \eta^{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta}\, \eta^{\beta\nu}$$

kde $\overleftrightarrow{B}$ je antisymetrický 3-tenzor stupně 2 jehož komponenty jsou

$$B_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k = \begin{bmatrix} 0 & B^3 & -B^2 \\ -B^3 & 0 & B^1 \\ B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kij} B_{ij} \qquad \overleftrightarrow{B}\cdot\vec{a} = \vec{a}\times\vec{B}$$

a ε_{ijk} je 3-dimensionální Levi-Civitův tenzor (viz dále)

zápis bez matic

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\left(E_\alpha \nu_\beta - \nu_\alpha E_\beta\right) + \varepsilon_{\alpha\beta\kappa} B^\kappa \qquad \mathbf{F} = \frac{1}{c}\left(\vec{E}\,\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\,\vec{E}\right) + \overleftrightarrow{B}$$

$$F_{0k} = -\frac{1}{c}E_k \qquad F_{k0} = \frac{1}{c}E_k \qquad F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k \qquad (\text{kde } E_0 = 0 \;\; B^0 = 0 \;\; \varepsilon_{0\alpha\beta} = 0)$$

Vztah Maxwellova tenzoru a 4-potenciálu

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \qquad \nabla_\mu = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right]$$

časové složky:

$$F_{i0} = \frac{1}{c}E_i = \nabla_i A_0 - \nabla_0 A_i = -\frac{1}{c}\nabla_i \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_i \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad \text{OK.}$$

prostorové složky:

$$F_{ij} = B_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i \Rightarrow B^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{kij}(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) = \varepsilon^{kij}\nabla_i A_j$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Relativistický tvar Maxwellových rovnic

Zdrojové rovnice

$$\nabla_\mu F^{\alpha\mu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\alpha \qquad \text{resp.} \qquad -\nabla\cdot\mathbb{F} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{j}$$

rozpis v soustavě:

$$-\nabla_\mu F^\mu{}_\alpha = -\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec\nabla\right]\cdot\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec E \\ \frac{1}{c}\vec E & \overleftrightarrow{B}\end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{c}\vec\nabla\cdot\vec E, -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec E \underbrace{-\vec\nabla\cdot\overleftrightarrow{B}}_{\vec\nabla\times\vec B}\right] = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left[-c\varrho, \vec j\right] = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec j \qquad \text{O.K.}$$

též:

$$-\nabla\cdot\mathbb{F} = -\left(\boldsymbol{v}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \vec\nabla\right)\cdot\left(\frac{1}{c}(\vec E\boldsymbol{v} + \boldsymbol{n}\vec E) + \overleftrightarrow{B}\right) = -\frac{1}{c}\vec\nabla\cdot\vec E\,\boldsymbol{v} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec E - \vec\nabla\cdot\overleftrightarrow{B}$$

$$= -\frac{1}{c}\vec\nabla\cdot\vec E\,\boldsymbol{v} + \left(\vec\nabla\times\vec B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec E\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c}\varrho\boldsymbol{v} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec j = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\boldsymbol{j}$$

(díky $\boldsymbol{n}\cdot\vec\nabla = 0$, $\quad \vec E\cdot\boldsymbol{v} = 0$, $\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = 1$, $\quad -\vec a\cdot\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{B}\cdot\vec a = \vec B\times\vec a$)

Potenciálové rovnice

zaručují existenci potenciálu

$$\vec B = \vec\nabla\times\vec A \quad \Leftrightarrow \quad \vec\nabla\cdot\vec B = 0$$

$$\vec E + \frac{\partial\vec A}{\partial t} = -\vec\nabla\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vec\nabla\times\left(\vec E + \frac{\partial\vec A}{\partial t}\right) = \vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0$$

podobně $\mathbb{F}$ je dáno 4-potenciálem $\quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$

pouze pokud $F_{\mu\nu}$ splňuje

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0$$

kde $[\dots]$ značí antisymetrizaci

$$\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = \frac{1}{6}\underbrace{\left(\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha F_{\gamma\beta} - \nabla_\beta F_{\alpha\gamma} - \nabla_\gamma F_{\beta\alpha}\right)}_{\text{stejné příspěvky pokrčeny}} \qquad F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$$

časové složky:

$$0ij: \quad \nabla_i F_{j0} + \nabla_j F_{0i} + \nabla_0 F_{ij} = \frac{1}{c}(\nabla_i E_j - \nabla_j E_i) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B_{ij} \qquad \Big/ \tfrac{1}{2}\varepsilon^{kij}$$

$$\Rightarrow \quad \vec\nabla\times\vec E + \frac{\partial}{\partial t}\vec B = 0 \qquad \text{O.K.}$$

prostorové složky

$$ijk: \quad \nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = \nabla_i B_{jk} + \nabla_j B_{ki} + \nabla_k B_{ij} \qquad \Big/ \tfrac{1}{6}\varepsilon^{ijk}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon^{kij}\nabla_k B_{ij} = \nabla_k B^k = \vec\nabla\cdot\vec B = 0 \qquad \text{O.K.}$$

Lorentzova síla

Hustota Lorentzovy síly

médium popsané 4-proudem j^μ

působí na něj elektromagnetické pole popsané $F_{\mu\nu}$

působení je dáno hustotou 4-síly

$$\Phi^\alpha = F^\alpha{}_\mu j^\mu \qquad (\Rightarrow j^\mu \Phi_\mu = j^\mu j^\nu F_{\mu\nu} = 0 \ !)$$

vůči soustavě:

$$\Phi^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec{E} \\ \frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\varrho \\ \vec{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} \\ \varrho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w}{c} \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix}$$

díky $\overleftrightarrow{B}\cdot\vec{j} = \vec{j}\times\vec{B}$

vztah 4-síly a hustoty 4-síly

ΔF^μ 4-síla na nabitou látku (částice) v klidovém objemu ΔV_0

$$\Delta F^\mu = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\Delta W}{c} \\ \Delta\vec{f} \end{bmatrix}$$

ΔW tvorba energie (výkon)

$\Delta\vec{f}$ 3-síla

$$\Phi^\mu = \frac{\Delta F^\mu}{\Delta V_0}$$

(klidová) hustota 4-síly

invariantní definice nezávislá na volbě soustavy

$$\Phi^\mu = \frac{\gamma}{\Delta V_0}\begin{bmatrix} \frac{\Delta W}{c} \\ \Delta\vec{f} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta V}\begin{bmatrix} \frac{\Delta W}{c} \\ \Delta\vec{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w}{c} \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix}$$

$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$ hustota výkonu v laboratorní soustavě

$\vec{\Phi} = \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta V}$ hustota 3-síly v laboratorní soustavě

$$\Phi^\mu = \begin{bmatrix} \frac{w}{c} \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} \\ \varrho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \end{bmatrix}$$

bez faktoru γ !

$\Downarrow$

$\vec{\Phi} = \varrho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$ hustota Lorentzovy 3-síly

$w = \vec{j}\cdot\vec{E}$ hustota výkonu Lorentzovy síly

konvekční tok náboje

prosté proudění náboje $\Rightarrow$ $j^\mu = \varrho_0 u^\mu$ tj. $j^\mu = \begin{bmatrix} c\varrho \\ \varrho\vec{v} \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\Phi^\alpha = F^\alpha{}_\nu j^\nu = \varrho_0 F^\alpha{}_\nu u^\nu$ tj. $\Phi^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{w}{c} \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix} = \varrho \begin{bmatrix} \frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{c} \\ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \end{bmatrix} \Rightarrow$ $w = \varrho\,\vec{v}\cdot\vec{E}$, $\vec{\Phi} = \varrho(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

pro 4-sílu platí

$u^\mu \Phi_\mu = \varrho_0 u^\mu u^\nu F_{\mu\nu} = 0$ neboli $w = \vec{v}\cdot\vec{\Phi}$

4-síla je kolmá na 4-rychlost nositelů náboje

Lorentzova síla na částici

částici si lze představit jako úzký svazek konvekčně proudícího náboje

náboj $\Delta q = \varrho \Delta V$ proud: $\vec{j}\Delta V = \varrho\vec{v}\,\Delta V = \Delta q\,\vec{v}$

4-síla na částici

$$\Delta F^r = \Phi^r \Delta V_0 = \gamma\, \Phi^r \Delta V = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\vec{j}\cdot\vec{E}\Delta V}{c} \\ (\varrho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})\Delta V \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \Delta q \frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{c} \\ \Delta q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \frac{\Delta W}{c} \\ \Delta\vec{f} \end{bmatrix}$$

3-síla a výkon (po vynechání 'Δ')

$$\vec{f} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

$$W = q\,\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{v}\cdot\vec{f}$$

4-síla je kolmá na 4-rychlost částice

Relativistické formulace

Zdroje - 4-proud

j^μ

4-potenciál

A_μ

Maxwellův tenzor

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

Maxwellovy rovnice.

$$\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$ potenciálová

$$\nabla_\nu F^{\alpha\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\nu$$ zdrojová

Lorentzova síla

$$\Phi^\alpha = F^{\alpha\nu} j_\nu$$

4-potenciál a kalibrační volnost

Rovnice pro 4-potenciál

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\alpha = \nabla_\gamma F^{\alpha\gamma} = \nabla_\gamma(\nabla^\alpha A^\gamma - \nabla^\gamma A^\alpha) = \nabla^\alpha(\nabla_\gamma A^\gamma) - \Box A^\alpha$$

neboli $\nabla \cdot \mathbb{F} = \Box \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}$

kde $\Box$ je d'Alambertův operátor (též vlnový)

$$\Box = \nabla_\gamma \nabla^\gamma = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{bmatrix} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Kalibrační volnost

měřitelné veličiny jsou $\vec{E}$ a $\vec{B}$, tj $F_{\mu\nu}$

existence potenciálu je zaručena Maxwellov. rov.

$$\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

4-potenciál není určen jednoznačně

existují "triviální" potenciály dávající $F_{\mu\nu} = 0$

platí

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad \Leftarrow \quad A_\mu = \nabla_\mu \psi$$

(implikace "$\Leftarrow$" je triviální: $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \nabla_\mu \nabla_\nu \psi - \nabla_\nu \nabla_\mu \psi = 0$)

$\Downarrow$

dva 4-potenciály lišící se o $\nabla\psi$ jsou ekvivalentní

$$A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \psi \quad \Rightarrow \quad F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

kalibrační podmínka

dodatečná podmínka na 4-potenciál, která fixuje volnost v 4-potenciálu

lze volit různé kalibrační podmínky tak, aby nám zjednodušili některé rovnice či výpočty

Lorenzova kalibrace

kovariantní dodatečná podmínka

$$\nabla_\mu A^\mu = 0$$

lze vždy splnit využitím kalibrační volnosti

nechť 4-potenciál A'_μ nesplňuje Lorenzovu podmínku

$$\nabla_\mu A'^\mu = -\alpha$$

hledáme 4-potenciál splňující Lorenzovu podmínku

$$A_\mu = A'_\mu + \nabla_\mu \psi$$

$$0 = \nabla_\mu A^\mu = \nabla_\mu A'^\mu + \nabla_\mu \nabla^\mu \psi = -\alpha + \Box \psi$$

$$\Rightarrow \Box \psi = \alpha$$ lze řešit

rovnice pro 4-potenciál

užitím Lorenzovy kalibrace se nám zjednoduší rovnice pro 4-potenciál

$$\Box A^\mu = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu \qquad \nabla_\mu A^\mu = 0$$

Coulombova kalibrace

kalibrační podmínka

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

lze vždy splnit (obdobný argument jako pro Lorenzovu pdm.)
při specifikaci asymptotického chování jsou potenciály určeny jednoznačně

rovnice pro potenciály

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

$$\Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

skalární potenciál dán řešením Poissonovy úlohy

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\varrho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

potenciál je dán okamžitým rozložením náboje v čase t
nekauzální vztah!
potenciál není přímo měřitelný, pouze skrze $\vec{E}$
ϕ ale vstupuje do rovnice pro $\vec{A}$ a ovlivní ho
v kombinaci $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ se nekauzalita vyruší

zdrojový člen pro vekt. potenciál

$$-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi$$

je bezdivergentní

$$-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t}\right) = 0$$

lze tak chápat jako bezdivergentní část $\vec{j}_{DF}$ toku $\vec{j}$
rovnice pro $\vec{A}$ má charakter

$$\Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}_{DF}$$

pozor! $\vec{j}_{DF}$ závisí nelokálně na $\vec{j}$
(i pro lokalizované $\vec{j}$ je bezdivergentní část $\vec{j}_{DF}$ nenulová v celém prost.)

případ bez nábojů

$$\varrho = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$$

veškerá informace ve vekt. potenciálu $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Weylova kalibrace

podmínka závislá na volbě inerciální soustavy

$\phi = 0$ tj $n \cdot A = 0$ resp. $A_0 = 0$

lze vždy splnit využitím kalibrační volnosti

nechť $A'_r = [-\frac{1}{c}\phi', \vec{A}']$ je obecný 4-potenciál

položme $\psi = \int \phi' dt$ tj. $\frac{\partial}{\partial t}\psi = \phi'$

pak $A_r = A'_r + \nabla_r \psi = \left[-\frac{1}{c}\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi, \vec{A}' + \vec{\nabla}\psi\right] = [0, \vec{A}]$ $\quad \vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\psi$

splňuje Weylovu kalibrační podmínku

vztahy pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

veškerá informace je zakódovaná v $\vec{A}$

zbývá volnost v časově nezávislé kalibraci

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\tilde{\psi} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi} = 0 \qquad \text{tj } \tilde{\psi}(x, y, z)$$

lze tuto volnost využít ke splnění Coulombovy kal. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$?

nechť $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = -\alpha$ pozor! α může být časově závislé

transformace $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\tilde{\psi}$ dává $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \underbrace{-\alpha}_{\text{časově závislé}} + \underbrace{\vec{\nabla}^2\tilde{\psi}}_{\text{časově nezávislé}}$

⇓

lze vynulovat pouze v jednom čase to

co je časová změna $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$?

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

pro $\varrho = 0$ je $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ konstantní v čase

⇒ kalibrací $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\tilde{\psi}$ lze vynulova $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ vždy

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ pro $\varrho = 0$ (Coulombova kalibrace)

rovnice pro potenciál v případě $\varrho = 0$

$$\nabla_r A^r = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

⇓

$$\Box A^\alpha = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\alpha \qquad \text{resp. } \Box\begin{bmatrix}0\\ \vec{A}\end{bmatrix} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\begin{bmatrix}0\\ \vec{j}\end{bmatrix}$$

⇓

$$\Box\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} \qquad \phi = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

Duál Maxwellova tenzoru a skalární invarianty

Levi-Civitův tenzor

dim = 3 (+++)

ε_{ijk} je antisymetrický 3-tenzor stupně $\binom{0}{3}$ jehož složky v positivně orientované kartézské soustavě jsou

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{pro } ijk \text{ sudou permutaci } 123 \\ -1 & \text{pro } ijk \text{ lichou permutaci } 123 \\ 0 & \text{pro } ijk \text{ jež není permutace} \end{cases}$$

v negativně orientované kart. soustavě je znaménko opačné

konzistence při změně souřadnic

$$\varepsilon_{i'j'k'} = T^m{}_{i'}\, T^n{}_{j'}\, T^l{}_{k'}\, \varepsilon_{mnl} = \sum_{\sigma \text{ permutace } 123} \underbrace{\varepsilon_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}}_{\text{sign}\,\sigma} T^{\sigma_1}{}_1\, T^{\sigma_2}{}_2\, T^{\sigma_3}{}_3 = \det T^m{}_{n'}$$

$T^m{}_{n'}$ ortonormální matice (kartéz. → kartéz. soust) $\Rightarrow \det T^m{}_{n'} = \pm 1$

vektorový součin

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \iff c^k = a^i b^j \varepsilon_{ij}{}^k$$

dualita mezi vektory a antisym. matici

$$\vec{B} \leftrightarrow \overleftrightarrow{B} \qquad B_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k \qquad B^k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} B_{ij}$$

platí

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{[ijk]} \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} = 6 \qquad \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl} = \delta^l_k \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{mnk} = \delta^m_i \delta^n_j - \delta^m_j \delta^n_i = 2\delta^m_{[i}\delta^n_{j]}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} \qquad \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{mnl} = 6\,\delta^m_{[i}\delta^n_j\delta^l_{k]}$$

dim = 4 (−+++)

$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ je antisymetrický 4-tenzor stupně $\binom{0}{4}$ jehož složky v positivně orientované inerciální soustavě jsou

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{pro } \kappa\lambda\mu\nu \text{ sudou permutace } 0123 \\ -1 & \text{pro } \kappa\lambda\mu\nu \text{ lichou permutaci } 0123 \\ 0 & \text{pro } \kappa\lambda\mu\nu \text{ jež není permutace} \end{cases}$$

v negativně orientované inerciální soustavě je znaménko opačné

platí

$$\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = \varepsilon_{[\kappa\lambda\mu\nu]} \qquad \frac{1}{2}\varepsilon^{\kappa\lambda}{}_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = -2\,\delta^{[\kappa}_{[\mu}\delta^{\lambda]}_{\nu]} \qquad \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = -24$$

v inerc. souřadnicích $\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = -\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$

vztah 4D a 3D Levi-Civitova tenzoru

soustava S → časová normála n → ${}^{3D}\varepsilon = n \cdot {}^{4D}\varepsilon$ ⇒

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk}$$

Hodgeův duál

Levi-Civitův tenzor umožňuje definovat Hodgeův duál

$*$: antisym. tenzor stupně p → antisym. tenzor stupně $D-p$

vlastnosti závisí na dimenzi D, stupni p a signatuře

Minkowského prostoročas v dim $=4$ $(-+++)$ a stupeň $p=2$

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$$

splňuje

$$**F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} \qquad \Leftarrow \quad \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\kappa\lambda} = -2\delta^{[\mu}_{[\kappa}\delta^{\nu]}_{\lambda]}$$

vyjádření v inerc. soustavě

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\vec{E} \\ \frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix} \Rightarrow *F \cong \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\vec{E}^* \\ \frac{1}{c}\vec{E}^* & \overleftrightarrow{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{B} \\ -\vec{B} & \frac{1}{c}\overleftrightarrow{E} \end{bmatrix} \quad \text{tj} \quad \frac{1}{c}\vec{E}^* = -\vec{B}, \quad \vec{B}^* = \frac{1}{c}\vec{E}$$

důkaz:

$$-\frac{1}{c}E^*_k = *F_{0k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0kij}F^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}B^{ij} = B_k \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{c}\vec{E}^* = \vec{B}$$

$$B^*_{ij} = \varepsilon_{ijk}B^{*k} = *F_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij0k}F^{0k} + \varepsilon_{ijk0}F^{k0}\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{1}{c}E^k \quad \Rightarrow \quad \vec{B}^* = \frac{1}{c}\vec{E}$$

též máme

$$\frac{1}{c}\vec{E}^{**} = -\vec{B}^* = -\frac{1}{c}\vec{E} \qquad \vec{B}^{**} = \frac{1}{c}\vec{E}^* = -\vec{B} \quad \Rightarrow \quad **\mathbb{F} = -\mathbb{F}$$

skalární součin na antisym. tenzorech stupně 2

$$\langle \mathbb{F}, \mathbb{F}' \rangle = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\vec{E}' + \vec{B}\cdot\vec{B}'$$

důkaz:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}\vec{E} \\ -\frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\vec{E}' \\ \frac{1}{c}\vec{E}' & \overleftrightarrow{B}' \end{bmatrix} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}E^i\left(-\frac{1}{c}E'_i\right) + \left(-\frac{1}{c}E^i\right)\frac{1}{c}E'_i + B^{ij}B'_{ij}\right)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}B_k\,\varepsilon_{ijl}B'^l = B^kB'_k$$

platí

$$\langle *\mathbb{F}, *\mathbb{F}' \rangle = -\langle \mathbb{F}, \mathbb{F} \rangle$$

důkaz $\langle *\mathbb{F}, *\mathbb{F}' \rangle = -\frac{1}{c^2}\vec{E}^*\cdot\vec{E}'^* + \vec{B}^*\cdot\vec{B}'^* = -(-\vec{B})\cdot(-\vec{B}') + \left(\frac{1}{c}\vec{E}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\vec{E}'\right) = \frac{1}{c^2}\vec{E}\cdot\vec{E}' - \vec{B}\cdot\vec{B}' = -\langle \mathbb{F}, \mathbb{F}' \rangle$

Dualita vakuových Maxwellových rovnic

$$\nabla_\mu F^{\alpha\mu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{[\alpha} *F_{\beta\gamma]} = 0$$

$$\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\mu *F^{\alpha\mu} = 0$$

důkaz ponechán posluchačům

důkaz:

$$\nabla_\mu *F^{\alpha\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\kappa\lambda}\nabla_\mu F_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\kappa\lambda}\nabla_{[\mu}F_{\kappa\lambda]}$$

$\Downarrow$

$$\nabla_{[\mu}F_{\kappa\lambda]} = \frac{1}{3}\varepsilon_{\alpha\mu\kappa\lambda}\nabla_\nu *F^{\nu\mu}$$

$\Downarrow$

$$\nabla_{[\mu}F_{\kappa\lambda]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\mu *F^{\alpha\mu} = 0$$

druhá ekvivalence se dostane transformací $F_{\mu\nu} \to *F_{\mu\nu}$

Skalární invarianty elektromagnetického pole

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\langle \mathbb{F}, \mathbb{F}\rangle = -\frac{\varepsilon_0 c^2}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 - \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\langle \mathbb{F}, *\mathbb{F}\rangle = \frac{\varepsilon_0 c^2}{4} F^{\mu\nu} *F_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{8} F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\left(-\tfrac{1}{c}\vec{E}\cdot(-\vec{B}) + \vec{B}\cdot\left(\tfrac{1}{c}\vec{E}\right)\right) = \varepsilon_0 c\, \vec{E}\cdot\vec{B}$$

dva skalární invarianty kvadratické v $F_{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad E^2 - c^2B^2$$

$$F^{\kappa\lambda}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \vec{E}\cdot\vec{B}$$

Lorentzova transformace EM pole

Lorentzovy transformace

S' pohybující se vůči S rychlostí $\vec{v} = v\vec{e}_\parallel$

$$L^{\alpha'}{}_{\beta} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\beta & -\operatorname{sh}\beta & 0 \\ -\operatorname{sh}\beta & \operatorname{ch}\beta & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \qquad L^{\alpha}{}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix}$$

4-proud

$$j^{\mu'} = \begin{bmatrix} c\varrho' \\ j'_\parallel \\ \vec{j}'_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\varrho \\ j_\parallel \\ \vec{j}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma\left(\varrho - j_\parallel \frac{v}{c^2}\right) \\ \gamma(j_\parallel - \varrho v) \\ \vec{j}_\perp \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \varrho' &= \gamma\left(\varrho - \tfrac{v}{c^2} j_\parallel\right) \\ j'_\parallel &= \gamma(j_\parallel - \varrho v) \\ \vec{j}'_\perp &= \vec{j}_\perp \end{aligned}$$

4-potenciál

$$A^{\mu'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi' \\ A'_\parallel \\ \vec{A}'_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ A_\parallel \\ \vec{A}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\gamma(\phi - vA_\parallel) \\ \gamma\left(A_\parallel - \frac{v}{c^2}\phi\right) \\ \vec{A}_\perp \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \phi' &= \gamma(\phi - vA_\parallel) \\ A'_\parallel &= \gamma\left(A_\parallel - \tfrac{v}{c^2}\phi\right) \\ \vec{A}'_\perp &= \vec{A}_\perp \end{aligned}$$

Maxwellův tenzor

$$F^{\alpha'}{}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E'_\parallel & \frac{1}{c}\vec{E}'_\perp \\ \frac{1}{c}E'_\parallel & 0 & \vec{B}'_{\parallel\perp} \\ \frac{1}{c}\vec{E}'_\perp & \vec{B}'_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}'_{\perp\perp} \end{bmatrix} = L^{\alpha'}{}_{\mu} F^{\mu}{}_{\nu} L^{\nu}{}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_\parallel & \frac{1}{c}\vec{E}_\perp \\ \frac{1}{c}E_\parallel & 0 & \vec{B}_{\parallel\perp} \\ \frac{1}{c}\vec{E}_\perp & \vec{B}_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix}$$

kde
$$\vec{B}_{\perp\parallel} = \overleftrightarrow{B}\cdot\vec{e}_\parallel = \vec{e}_\parallel \times \vec{B} = \vec{e}_\parallel \times \vec{B}_\perp$$
$$\vec{B}_{\parallel\perp} = \vec{e}_\parallel \cdot \overleftrightarrow{B} = -\vec{e}_\parallel \times \vec{B} = -\vec{e}_\parallel \times \vec{B}_\perp$$
$$\overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} = \varepsilon_{\perp\perp k} B^k = \varepsilon_{\perp\perp\parallel} B_\parallel = +\varepsilon B_\parallel \qquad {}^{\perp}\varepsilon = \varepsilon_{\perp\perp\parallel} = \varepsilon\cdot\vec{e}_\parallel = \overleftrightarrow{e}_\parallel$$

$$F^{\alpha'}{}_{\beta'} = \begin{bmatrix} -\gamma\frac{v}{c^2}E_\parallel & \gamma\frac{1}{c}E_\parallel & \gamma\frac{1}{c}(\vec{E}_\perp - v\vec{B}_{\parallel\perp}) \\ \gamma\frac{1}{c}E_\parallel & -\gamma\frac{v}{c^2}E_\parallel & \gamma\left(\vec{B}_{\parallel\perp} - \frac{v}{c^2}\vec{E}_\perp\right) \\ \frac{1}{c}\vec{E}_\perp & \vec{B}_{\perp\parallel} & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\frac{v}{c} & 0 \\ \gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_\parallel & \frac{1}{c}\gamma(\vec{E}_\perp - v\vec{B}_{\parallel\perp}) \\ \frac{1}{c}E_\parallel & 0 & \gamma\left(\vec{B}_{\parallel\perp} - \frac{v}{c^2}\vec{E}_\perp\right) \\ \frac{1}{c}\gamma(\vec{E}_\perp + v\vec{B}_{\perp\parallel}) & \gamma\left(\vec{B}_{\perp\parallel} + \frac{v}{c^2}\vec{E}_\perp\right) & \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & E'_\parallel = E_\parallel \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp - v\vec{B}_{\parallel\perp}) = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp) \\ & \vec{B}'_{\perp\parallel} = \vec{e}_\parallel \times \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_{\perp\parallel} + \tfrac{v}{c^2}\vec{E}_\perp\right) = \gamma\left(\vec{e}_\parallel \times \vec{B}_\perp + \tfrac{v}{c^2}\vec{E}_\perp\right) \quad /\vec{e}_\parallel\times \;\Rightarrow\; \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \tfrac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_\perp\right) \\ & \overleftrightarrow{B}'_{\perp\perp} = \overleftrightarrow{B}_{\perp\perp} \;\Rightarrow\; B'_\parallel = B_\parallel \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel & \vec{E}'_\perp &= \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}_\perp) \\ B'_\parallel &= B_\parallel & \vec{B}'_\perp &= \gamma\left(\vec{B}_\perp - \tfrac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}_\perp\right) \end{aligned}$$