Akční principy pro relativistickou částici

Princip extremální akce.

Geometrická akce pro relativistickou částici.

Popis částice. Akce. Variační úloha. Parametrizace světočáry. Variace akce. Pohybové rovnice, 4-síla elektromagnetického pole.

Lagrangeovský formalismus vůči inerciální soustavě.

Třírozměrný přepis akce. Lagrangián relativistické částice. Lagrangeovy rovnice.

Hamiltonovský formalismus.

Lagrangián. Kanonická hybnost. Hamiltonián. Hamiltonovy kanonické rovnice.

Formalismus “vnitřního” času.

Vnitřní čas. Kvadratická akce a kovariantní Lagrangián, pohybové rovnice. Klidová hmotnost, zobecněná energie. Vlastní čas a 4-rychlost. Hamiltonián.

Princip extremální akce pro srážky.

Akce interagujících částic. Popis srážky, graf interakce. Variace akce. Rovnice pohybu, zákony zachování 4-hybnosti. Řešení pro světočáry a pro polohy interakcí. Vnitřní a vlastní čas, 4-hybnost a klidová hmotnost. Srážková úloha v řeči poloh a vnitřních časů. Srážková úloha v řeči hybností a hmotností.

Princip extremální akce

každý systém je popsán specifikací "historie"
tj. celým svým (potenciálním) vývojem např.:
- prostoročasové trajektorie pro částici
- polní konfigurace pro pole
- světoplocha pro strunu (či "brány")

na prostoru historií je definován funkcionál akce
akce dává pro každou historii číslo
akce pro nezávislé systémy je aditivní
interakce systémů bývá popisována extra členem v akci
akce pro "navazující" historie je aditivní

pohybové rovnice systému určující fyzikálně realiz. historie
jsou dány podmínkou extremality akce, za
předpokladu fixovaných okrajových podmínek

pokud je akce dána časovým integrálem Lagrangiánu

$$S[q] = \int L(q, \dot{q})\, dt$$

pohybové rovnice jsou dány Lagrangeovými rovnicemi

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = 0$$

v relativitě je akce často zadána v kovariantní
formě, které nemá přímo tvar $\int L\, dt$
přepis do tohoto tvaru obvykle vyžaduje narušení
kovariance – např. výběr inerciální soustavy
variační úloha však lze řešit i přímo v kovariantní
formě, což vede ke kovariantním pohybovým rovnicím

Geometrická akce pro relativistickou částici

Popis historie částice

- světočára částice, tj. prostoročasová trajektorie

  $Z(\tau)$ parametrizace pomocí vlastního času

  $Z(\alpha)$ obecná parametrizace pomocí parametru α

- souřadnicové vyjádření

  $x^\mu(\tau) = x^\mu(Z(\tau))$ resp. $x^\mu(\alpha) \equiv x^\mu(Z(\alpha))$

- 4-rychlost a vlastní čas

  $u = \frac{DZ}{d\tau}$ $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ 4-rychlost

  $w = \frac{DZ}{d\alpha}$ $w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha}$ tečný vektor světočáry pro param. α

  $c\,d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-w^2}\,d\alpha$ vlastní čas

Akce

"kinetická" část

$$S_{RP}[Z] = -m_0 c^2 \int_Z d\tau$$

akce je dána geometrickou (pseudo)délkou světočáry

interakce s elektromagnetickým polem

$$S_{RP\text{-}EM}[Z, A_\mu] = q \int A_\mu(Z)\, u^\mu\, d\tau$$

q elektrický náboj

akce nezávisí na parametrizaci $\Leftarrow$ $w^\mu d\alpha = u^\mu d\tau$

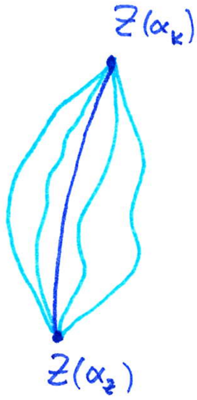
celá akce

$$S[Z, A_\mu] = \int (-m_0 c^2 + q A_\mu u^\mu)\, d\tau$$

Variační úloha

fyzikálně realizovaná světočára extremalizuje akci při fixovaných koncových bodech (událostech) světočáry, nezávisle na parametrizaci světočáry

Parametrizace světočáry



světočáry spojující dvě fixované události nebudou mít obecně stejnou délku (vlastní čas) proto je nemůžeme při variaci parametrizovat vlastním časem a uvažovat fixované hodnoty vlastního času pro koncové body světočáry

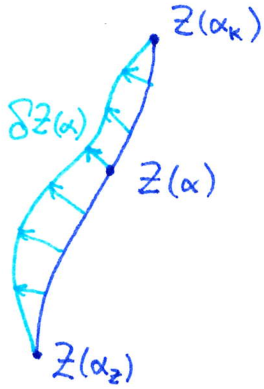
použijeme obecnou parametrizaci parametrem α s pevným oborem hodnot

$$Z : \langle \alpha_z, \alpha_k \rangle \to M$$

akce pak lze zapsat

$$S = -\int \left[m_0 c \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha}\eta_{\mu\nu}} - q A_\mu(x^\nu)\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right] d\alpha$$

Variace akce



$$Z(\alpha) \to Z(\alpha) + \delta Z(\alpha)$$

$\delta Z(\alpha)$ 4-vektor variace světočáry

okrajové podmínky $\delta Z(\alpha_Z) = 0 \quad \delta Z(\alpha_K) = 0$

v souřadnicích

$$x^r(\alpha) \to x^r(\alpha) + \delta x^r(\alpha)$$

$$\frac{dx^r}{d\alpha}(\alpha) \to \frac{dx^r}{d\alpha}(\alpha) + \frac{d\delta x^r}{d\alpha}(\alpha)$$

$$c\frac{d\tau}{d\alpha} = \sqrt{-\frac{dx^r}{d\alpha}\frac{dx^s}{d\alpha}\eta_{rs}} \to \sqrt{-\left(\frac{dx^r}{d\alpha} + \frac{d\delta x^r}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^s}{d\alpha} + \frac{d\delta x^s}{d\alpha}\right)\eta_{rs}}$$

$$= \left(c^2\left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^2 - 2\frac{dx^r}{d\alpha}\frac{d\delta x^s}{d\alpha}\eta_{rs} + \dots\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= c\frac{d\tau}{d\alpha}\left(1 - \frac{1}{c^2\left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^2}\frac{dx^r}{d\alpha}\frac{d\delta x^s}{d\alpha}\eta_{rs} + \dots\right)$$

$$\frac{\frac{dx^r}{d\alpha}}{\frac{d\tau}{d\alpha}} = u^r \to \quad = c\frac{d\tau}{d\alpha} - \frac{1}{c}u_r\frac{d\delta x^r}{d\alpha} + \dots$$

$$A_s(x^k) \to A_s(x^k + \delta x^k) = A_s(x^k) + \delta x^r \nabla_r A_s(x^k) + \dots$$

$$S \to -\int\left[m_0 c\left(c\frac{d\tau}{d\alpha} - \frac{1}{c}u_r\frac{d\delta x^r}{d\alpha}\right) - q\left(A_s + \delta x^r\nabla_r A_s\right)\left(\frac{dx^s}{d\alpha} + \frac{d\delta x^s}{d\alpha}\right)\right]d\alpha$$

$$= \underbrace{-\int\left(m_0c^2 - qA_r u^r\right)d\tau}_{S_0} + \int\left[m_0 u_r\frac{d\delta x^r}{d\alpha} + qA_r\frac{d\delta x^r}{d\alpha} + q(\nabla_r A_s)\frac{dx^s}{d\alpha}\delta x^r\right]d\alpha$$

$$= S_0 + \int\frac{d}{d\alpha}\left[m_0 u_r\delta x^r + qA_r\delta x^r\right]d\alpha + \int\left[-\frac{d}{d\alpha}(m_0u_r) - q\frac{dx^s}{d\alpha}\nabla_s A_r + q\frac{dx^s}{d\alpha}\nabla_r A_s\right]\delta x^r d\alpha$$

$$= S_0 + \underbrace{\Big[(m_0u_r + qA_r)\delta x^r\Big]_{\alpha_Z}^{\alpha_K}}_{0} + \int\left[-\frac{d}{d\tau}(m_0u_r) + qF_{rs}u^s\right]\delta x^r d\tau$$

$$\forall\,\delta x^r \quad \delta S = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau}(m_0u_r) = qF_{rs}u^s$$

pohybová rovnice nabité relativistické částice

- pravá strana = Lorentzova 4-síla
- obě strany kolmé na 4-rychlost u_r
- m_0 je konstantní, $W_0 = 0$

Lagrangeův formalismus vůči inerciální soustavě

Třírozměrný přepis akce

zvolená inerciální soustava

čas soustavy jako parametr světočáry

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad w^r = \frac{dx^r}{dt} = \frac{d\tau}{dt} u^r = \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

akce

$$S = -\int [m_0 c^2 - q A_r u^r]\, d\tau = -\int \left[m_0 c^2 \frac{d\tau}{dt} - q A_r w^r\right] dt$$

$$= \int \left[-m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{v}\right] dt$$

$$= \int L(x^i, v^i; t)\, dt$$

Lagrangián

$$L(x^i, v^i; t) = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi(t, x^i) + q\, v^j A_j(t, x^i)$$

- nemá tvar T-V a to ani bez EM-členů
- kinetická část pro částici není kvadratická v rychlosti

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q A_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -q \nabla_i \phi + q v^j \nabla_i A_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q v^j \nabla_j A_i + q \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{m v_i = p_i} = \underbrace{-q\left(\nabla_i \phi + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{q E_i} + q \underbrace{\left(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i\right) v^j}_{B_{ij} v^j = (\vec{v}\times\vec{B})_i}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

ekvivalentní prostorové části kovariantní rovnice

$$\frac{d}{d\tau} p_r = q F_{r\nu} u^\nu$$

Hamiltonovský formalismus

Lagrangián

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$= -mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{relativistická hmotnost}$$

Kanonická hybnost

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} + q\vec{A} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

$$m\vec{v} = \vec{P} - q\vec{A} \qquad m^2 = \frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 + \frac{1}{c^2}\frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 + \frac{1}{c^2}(mv)^2 = m_0^2 + \frac{1}{c^2}(\vec{P}-q\vec{A})^2$$

Hamiltonián

$$H = \vec{v}\cdot\vec{P} - L = \frac{(\vec{P}-q\vec{A})\cdot\vec{P}}{m} + mc^2\left(1-\frac{(\vec{P}-q\vec{A})^2}{m^2c^2}\right) + q\phi - \frac{(\vec{P}-q\vec{A})\cdot q\vec{A}}{m}$$

$$= mc^2 + q\phi = \sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2(\vec{P}-q\vec{A})^2} + q\phi$$

Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \frac{1}{2mc^2}2c^2(\vec{P}-q\vec{A}) = \frac{\vec{P}-q\vec{A}}{m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{1}{mc^2}c^2 q(\vec{\nabla}\vec{A})\cdot(\vec{P}-q\vec{A}) + q\vec{\nabla}\phi =$$

$$= -q(\vec{\nabla}\vec{A})\cdot\frac{\vec{P}-q\vec{A}}{m} + q\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \frac{\vec{P}-q\vec{A}}{m} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}+q\vec{A}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{A} = -q\vec{\nabla}\phi + q(\vec{\nabla}\vec{A})\cdot\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -q\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi\right) + q\overleftrightarrow{B}\,\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Formalismus "vnitřního" času

Vnitřní čas

alternativní formulace zavádějící nový preferovaný parametr podél světočáry - tzv. vnitřní čas σ
též hmotnostní či hybnostní čas

při parametrizaci pomocí σ je tečný vektor 4-hybnost

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma} \qquad \mathbb{p} = \frac{\mathcal{D}X}{d\sigma}$$

výhody
- možnost jednotně popsat časupodobné, nulové a prostorupod. světoč.
- kovariantní Lagrangián kvadratický v rychlosti
- možnost vybudování kovariantního Hamiltonova formalismu

nevýhody
- fyzikálně je částice většinou charakterizována klidovou hmotností,
  ta je v tomto popisu pouze odvozená veličina

$$p^\mu = m_0 u^\mu \qquad u^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = -c^2$$

$$\Downarrow$$

$$m_0^2 = -\frac{1}{c^2}\mathbb{p}^2 = -\frac{1}{c}p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu}$$

vztah vlastního a vnitřního času

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} = p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad d\tau = m_0 d\sigma$$

kauzální charakter světočar

časupodobné	$\sigma \in \mathbb{R}$	$\tau \in \mathbb{R}$	$m_0 \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{p} < 0$
světelné	$\sigma \in \mathbb{R}$	nedefinováno	$m_0 = 0$	$\mathbb{p} = 0$
prostorupodobné	$\sigma \in \mathbb{R}$	$\tau \in i\mathbb{R}$	$m_0 \in i\mathbb{R}^+$	$\mathbb{p} > 0$

Akce a kovariantní Lagrangián

$$S = \int \left[\frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \eta_{\mu\nu} + q \frac{dx^\mu}{d\sigma} A_\mu(x^\nu) \right] d\sigma$$

kovariantní Lagrangián

$$L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) = \frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \eta_{\mu\nu} + q \frac{dx^\mu}{d\sigma} A_\mu(x^\nu)$$

kanonická hybnost, derivace Lagrangiánu

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\sigma}} = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} + q A_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = q (\nabla_\mu A_\nu) \frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

pohybové rovnice

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\sigma}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\sigma}}\right) = \eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma^2} + q (\nabla_\nu A_\mu) \frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

$\Downarrow$

$$\eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma^2} = q (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) \frac{dx^\nu}{d\sigma} = q F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\sigma}$$

Klidová hmotnost

konstanta pohybu – zobecněná energie

$$\mathcal{E} = \frac{dx^\mu}{d\sigma} P_\mu - L = \frac{dx^\mu}{d\sigma}\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\sigma} + q A_\mu\right) - \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\eta_{\mu\nu} - q \frac{dx^\mu}{d\sigma} A_\mu = \frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\eta_{\mu\nu}$$

specifikace této konstanty určuje klidovou hmotnost

$$m_0^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \eta_{\mu\nu}$$

mechanická a kanonická 4-hybnost

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma} \qquad \text{mechanická 4-hybnost}$$

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma} + q A^\mu \qquad \text{kanonická 4-hybnost}$$

$$\Downarrow \; p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = -m_0^2 c^2$$

Vlastní čas a 4-rychlost

$u^\mu \propto p^\mu \quad u^2 = -c^2$ 4-rychlost

$\Downarrow$

$p^\mu = m_0 u^\mu$

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$

$\Downarrow$

$d\tau = m_0 d\sigma$ vztah τ a σ

pohybová rovnice ve vlastním čase

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\sigma} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{d\tau} p_\mu = q F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

stejné jako pro geometrickou akci

Hamiltonián

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} = P^\mu - qA^\mu$$

$$H = \frac{dx^\mu}{d\sigma} P_\mu - L = (P^\mu - qA^\mu) P_\mu - \frac{1}{2}(P^\mu - qA^\mu)(P^\nu - qA^\nu)\eta_{\mu\nu} - (P^\mu - qA^\mu) qA_\mu$$

$$= \frac{1}{2}(P^\mu - qA^\mu)(P^\nu - qA^\nu)\eta_{\mu\nu}$$

Princip extremální akce pro srážky

Formulace úlohy

uvažujme systém navzájem se srážejících a proměňujících částic bez interakce s vnějším polem

akce je dána součtem volných akcí pro světočáry částic mezi interakcemi a vnějšími plochami

$$S = \sum_h \int_0^{\sigma_h} \frac{1}{2} \frac{dx_h^\mu}{d\sigma} \frac{dx_h^\nu}{d\sigma} \eta_{\mu\nu} \, d\sigma$$

Popis srážky

srážka je popsána grafem a vnitřními časy hran

vnější vrcholy - polohy vstupujících a vystupujících částic

vnitřní vrcholy - polohy interakcí

hrany - světočára částice mezi interakcemi resp. okrajovými plochami

vnitřní čas - délka vnitřního času světočáry mezi vrcholy

značení

vrcholy X_I I index probíhající všechny vrcholy

X_I^α souřadnice I-tého vrcholu

hrany ${}^hX(\sigma)$ h index probíhající všechny světočáry

${}^hX^\alpha(\sigma)$ souřadnice h-té světočáry

${}^hX(\sigma)$ vede z X_{z_h} do X_{k_h}

z_h index počátku h-té světočáry

k_h index konce h-té světočáry

vnitřní čas σ_h vnitřní délka h-té světočáry

$X_{z_h} = {}^hX(0)$ $X_{k_h} = {}^hX(\sigma_h)$ $\sigma \in (0, \sigma_h)$

vlastní čas τ_h vlastní délka h-té světočáry měřeno metrikou prostoročasu

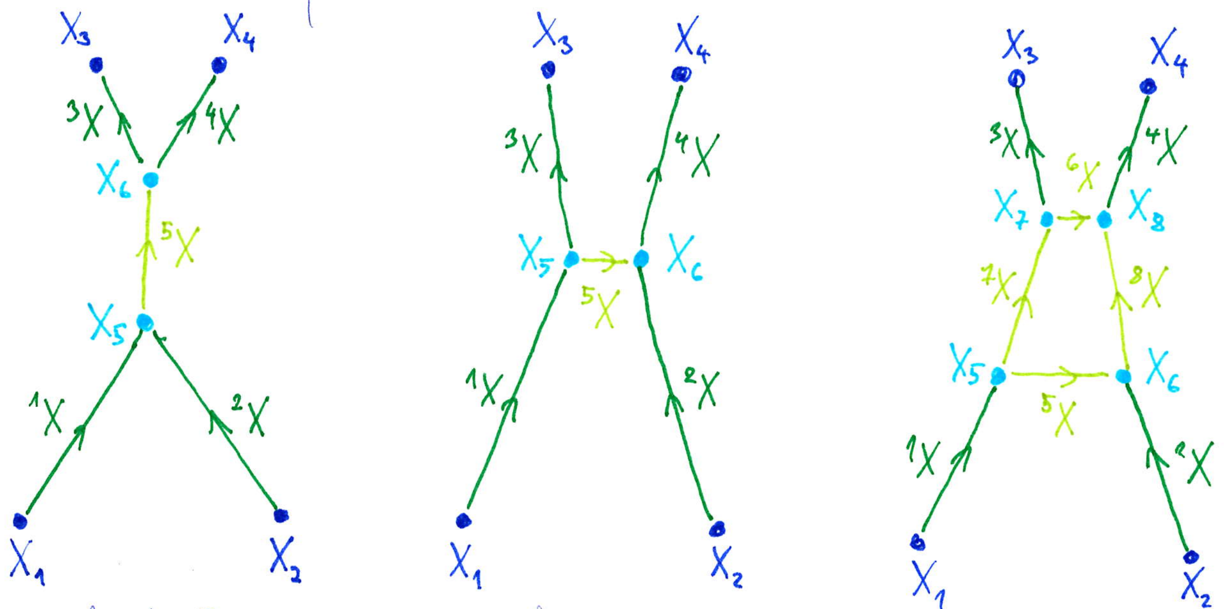
klidová hmotnost ${}^hm_0$ klidová hmotnost h-té částice

4-hybnost ${}^h\mathbf{p}$ 4-hybnost h-té částice

Graf srážky

stejné vnější polohy částic mohou být spojeny různou strukturou interakcí

příklad: 4 vnější polohy spojené pomocí interakcí stupně 3



$h = 1 \dots 5$, $j = 1 \dots 6$ | $h = 1 \dots 5$, $j = 1 \dots 6$ | $h = 1 \dots 8$, $j = 1 \dots 8$

X_j vnější polohy částic

X_j polohy interakcí

$^hX(\sigma)$ světočáry vstupujících a vystupujících částic

$^hX(\sigma)$ světočáry interakčních částic

Variace akce

variují se plochy interakcí a světočáry všech částic při fixovaných vnějších plochách a zadaných vnitřních časech

$X_J^\mu \to X_J^\mu + \delta X_J^\mu$ J probíhá vnitřní vrcholy

$X_J^\mu \to X_J^\mu \quad \delta X_J^\mu = 0$ pro J číslující vnější vrcholy

${}^k X^\mu(\sigma) \to {}^k X^\mu(\sigma) + {}^k\delta X^\mu(\sigma)$ k číslující všechny světočáry

${}^k\delta X^\mu(0) = \delta X^\mu_{y_k} \qquad {}^k\delta X^\mu(\sigma_k) = \delta X^\mu_{x_k}$

variace koncových bodů světočar odpovídají variacím vrcholů

akce:

$$\delta S = \sum_{\text{hrany } k} \int_0^{\sigma_k} \frac{d^k X^\mu}{d\sigma}\left(\frac{d}{d\sigma}\,{}^k\delta X^\nu\right)\eta_{\mu\nu}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{\text{hran } k}\left[\int_0^{\sigma_k} \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\,{}^k\delta X^\mu\right) d\sigma - \int_0^{\sigma_k}\left(\frac{d}{d\sigma}\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\right){}^k\delta X^\mu\, d\sigma\right]$$

$$= \sum_{\text{hrany } k}\left[\left.\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_k}\delta X^\mu_{x_k} - \left.\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\right|_{\sigma=0}\delta X^\mu_{y_k} - \int_0^{\sigma_k}\left(\frac{d}{d\sigma}\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\right){}^k\delta X^\mu\, d\sigma\right]$$

$$= \sum_{\text{vrcholy } J}\left[\sum_{\substack{\text{hrany } k \\ \text{vycházející} \\ \text{z vrcholu } J}} (\pm 1)\left.\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\right|_{\text{vrchol } J}\right]\delta X_J^\mu - \sum_{\text{hrany } k}\int_0^{\sigma_k}\left(\frac{d}{d\sigma}\frac{d^k X_\mu}{d\sigma}\right){}^k\delta X^\mu\, d\sigma$$

orientace k v J
- −1 začátek k
- +1 konec k

Rovnice pohybu

4-hybnost

$$ {}^{a}p_r = \frac{d\,{}^{a}x_r}{d\sigma} $$

variace světočar ${}^{a}\delta x^r$

$$ \frac{d}{d\sigma}\,{}^{a}p_r = 0 $$

tj. 4-hybnost konstantní mezi srážkami

variace interakcí δx^r_J

pro každý interakční vrchol J

$$ \sum_{\substack{\text{hrany } h \\ \text{vycházející} \\ \text{z vrcholu J}}} \pm\,{}^{h}p_r = 0 \iff \sum_{\substack{\text{hrany } h \\ \text{vstupující} \\ \text{do J}}} {}^{a}p_r = \sum_{\substack{\text{hrany } h \\ \text{vystupující} \\ \text{z J}}} {}^{a}p_r $$

zákon zachování 4-hybnosti v každé interakci

Řešení pro světočáry

${}^{a}X(\sigma)$ = přímka s koncovými body X_{z_a} a X_{k_a}

$$ {}^{a}X(\sigma) = X_{z_a} + \frac{X_{k_a} - X_{z_a}}{\sigma_a}\,\sigma $$

$$ \sigma = 0 \rightarrow X_{z_a} \qquad \sigma = \sigma_a \rightarrow X_{k_a} $$

$$ {}^{a}p = \frac{d\,{}^{a}X}{d\sigma} = \frac{X_{k_a} - X_{z_a}}{\sigma_a} $$

4-hybnost je dána 4-vektorem světočáry děleným vnitřním časem

vlastní čas světočáry

$$ -c^2\tau_a^2 = (X_{k_a} - X_{z_a})^2 = (x^r_{k_a} - x^r_{z_a})(x^s_{k_a} - x^s_{z_a})\,\eta_{rs} $$

klidová hmotnost částice

$$ {}^{a}m_0^2 = -\frac{1}{c^2}\,{}^{a}p^2 = -\frac{1}{c^2}\frac{(X_{k_a} - X_{z_a})^2}{\sigma_a^2} = \frac{\tau_a^2}{\sigma_a^2} \Rightarrow {}^{a}m_0 = \frac{\tau_a}{\sigma_a} $$

Řešení pro polohy interakcí

pro každou interakci máme zákon zach. 4-hybnosti

$$\sum_{h \text{ vstupující do } J} {}^h\mathbf{p} = \sum_{h \text{ vystupující z } J} {}^h\mathbf{p}$$

kde $\quad {}^h\mathbf{p} = \dfrac{X_{k_h} - X_{z_h}}{\sigma_h}$

jedná se o soustavu rovnic lineárních v X_J
kde J probíhá vnitřní vrcholy
tj. N_{int} rovnic pro N_{int} neznámých
(kde N_{int} je počet interakcí = vnitřních vrcholů)
lze (alespoň v principu) řešit

Řešení

zadáno $\quad X_E \qquad E$ - probíhá vnější vrcholy
$\qquad \sigma_h \qquad h$ - probíhá všechny hrany

1) polohy interakcí
$X_J \qquad J$ - probíhá vnitřní vrcholy

2) 4-hybnosti částic
$${}^h\mathbf{p} = \frac{X_{k_h} - X_{z_h}}{\sigma_h}$$

3) hmotnosti částic (a vlastní čas)
$${}^h m_0^2 = -\frac{1}{c^2}{}^h\mathbf{p}^2 \qquad \text{resp.} \qquad {}^h m_0 = \frac{\tau_h}{\sigma_h}$$
$$\tau_h^2 = -\frac{1}{c^2}\left(X_{k_h} - X_{z_h}\right)^2$$

úloha je zadána v řeči koncových poloh a vnitřních časů částic
fyzikálně bychom spíše chtěli vnější 4-hybnosti a klidové hmotnosti částic

Změna proměnných

lze řešit srážková úloha pro
- zadané vnější 4-hybnosti
- umístění srážky
- klidové hmotnosti zúčastněných částic

v principu ano, ale jedná se o nelineární úlohy které nemusí mít rozumné řešení

lze rozložit do 2 kroků
1) změna vnějších poloh na vnější 4-hybnosti a umístění srážky — přímočaré
2) změna vnitřních časů σ_a na klidové hmot. ${}^a m_0$ - netriviální

1) vnější polohy → vnější 4-hybnosti + umístění

vnější 4-hybnosti musí splňovat celkový zákon zachování 4-hybnosti

plyne ze sumy zákonů zachování pro všechny interakce

$$\sum_{\substack{\text{vnější}\\\text{vstupující}\\\text{krany}}} {}^a p = \sum_{\substack{\text{vnější}\\\text{vystupující}\\\text{krany}}} {}^a p$$

tj. jedna vnější 4-hybnost lze dopočítat z ostatních

díky translační symetrii z vnějších 4-hybností nelze dopočítat "umístění" srážky

lze najít 1-1 korespondence

vnější polohy X_ε ↔ vnější 4-hybnosti ${}^a p$ splňující zákon zachování + centrum srážky X_0

$$X_0 = \frac{1}{N_{\text{vnější}}} \sum_{\substack{\text{vnější}\\\text{polohy } \varepsilon}} X_\varepsilon$$

úloha zůstává lineární pro neznámé* polohy interakcí X_J

2) změna σ_e na $^e m_0$

$$\sigma_e \leftrightarrow {}^e m_0 = \frac{\tau_e}{\sigma_e}$$

nelineární transformace protože τ_e jsou kvadratické v polohách interakcí
obecně nemá reálné řešení

Kauzální charakter částic
částice zúčastněné ve srážce nemusí vyjít časupodobné → tachyony
vždy existuje řešení pro interakční polohy X_1 začátek a konec světočar však nemusí být položeny časupodobně
pro tachyony
$^e p^2 > 0 \Rightarrow {}^e m_0^2 < 0 \Rightarrow {}^e m_0$ imaginární
$(X_{Z_1} - X_{Z_2})^2 > 0 \Rightarrow \tau_e^2 < 0 \Rightarrow \tau_e$ imaginární
podmínka kauzálnosti dává dodatečné omezení na zadané veličiny!