Akční principy pro relativistickou částici

+SP

Princip extremální akce.

Geometrická akce pro relativistickou částici.

Popis částice. Akce. Variační úloha. Parametrizace světočáry. Variace akce. Pohybové rovnice, balance klidové hmotnosti, rovnice pro 4-hybnost a 4-rychlost, 4-síla skalárního a elektromagnetického pole.

Lagrangeovský formalismus vůči inerciální soustavě.

Třírozměrný přepis akce. Lagrangián relativistické částice. Lagrangeovy rovnice.

Hamiltonovský formalismus.

Lagrangián. Kanonická hybnost. Hamiltonián. Hamiltonovy kanonické rovnice.

Princip extremální akce

každý systém je popsán specifikací "historie"
  tj. celým svým (potenciálním) vývojem např.:
  - prostoročasové trajektorie pro částici
  - plné konfigurace pro pole
  - světoplocha pro struny (či "brány")

na prostoru historií je definován funkcionál akce
  akce dává pro každou historii číslo
  akce pro nezávislé systémy je aditivní
  interakce systémů bývá popisována extra členem v akci
  akce pro "navazující" historie je aditivní

pohybové rovnice systému určující fyzikální realiz. historie
  jsou dány podmínkou extremality akce, za
  předpokladu fixovaných okrajových podmínek

pokud je akce dána časovým integrálem Lagrangiánu
  $S[q] = \int L(q, \dot{q})\, dt$
  pohybové rovnice jsou dány Lagrangeovými rovnicemi
  $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})\right)^{\dot{}} - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = 0$

v relativitě je akce často zadána v kovariantní
  formě, která nemá přímo tvar $\int L\, dt$
  přepis do tohoto tvaru obvykle vyžaduje narušení
  kovariance – např. výběr inerciální soustavy
  variační úloha však lze řešit i přímo v kovariantní
  formě, což vede ke kovariantním pohybovým rovnicím

Geometrická akce pro relativistickou částici

Popis historie částice

- světočára částice, tj. prostoročasová trajektorie

  $Z(\tau)$ parametrizace pomocí vlastního času

  $Z(\alpha)$ obecná parametrizace pomocí parametru α

- souřadnicové vyjádření

  $x^\mu(\tau) = x^\mu(Z(\tau))$ resp. $x^\mu(\alpha) = x^\mu(Z(\alpha))$

- 4-rychlost a vlastní čas

  $u = \frac{DZ}{d\tau}$ $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ 4-rychlost

  $w = \frac{DZ}{d\alpha}$ $w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\alpha}$ tečný vektor světočáry pro param. α

  $c\, d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-w^2}\, d\alpha$ vlastní čas

Akce

"kinetická" část

$$S_{RP}[Z] = -\bar{m}_0 c^2 \int_Z d\tau$$

akce je dána geometrickou (pseudo)délkou světočáry

$\bar{m}_0$ (holá) klidová hmotnost

interakce se skalárním polem

$$S_{RP\text{-}SP}[Z,\Psi] = -e\int_Z \Psi(Z)\, d\tau$$

e skalární náboj pro pole Ψ

interakce s elektromagnetickým polem

$$S_{RP\text{-}EM}[Z, A_\mu] = q\int A_\mu(Z)\, u^\mu\, d\tau$$

q elektrický náboj

akce nezávisí na parametrizaci $\Leftarrow$ $w^\mu d\alpha = u^\mu d\tau$

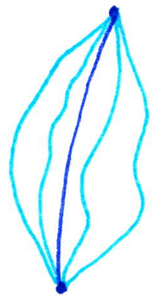
celá akce

$$S[Z,\Psi,A_\mu] = -\int\left(\bar{m}_0 c^2 + e\Psi - q A_\mu u^\mu\right) d\tau$$

Variační úloha

fyzikálně realizovaná světočára extremalizuje akci při fixovaných koncových bodech (událostech) světočáry, nezávisle na parametrizaci světočáry

Parametrizace světočáry



světočáry spojující dvě fixované události nebudou mít obecně stejnou délku (vlastní čas) proto je nemůžeme při variaci parametrizovat vlastním časem a uvažovat fixované hodnoty vlastního času pro koncové body světočáry

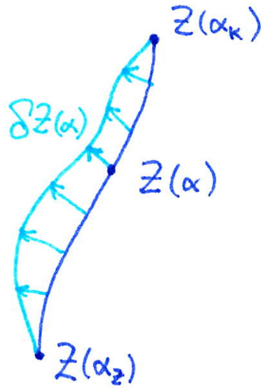
použijeme obecnou parametrizaci parametrem α s pevným oborem hodnot

$$Z : \langle \alpha_z , \alpha_k \rangle \to M$$

akce pak lze zapsat

$$S = -\int \left[\left(m_0 c + \frac{e}{c} \Psi(x^\nu) \right) \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha}\eta_{\mu\nu}} - q A_\mu(x^\nu)\frac{dx^\mu}{d\alpha} \right] d\alpha$$

Variace akce



$$Z(\alpha) \to Z(\alpha) + \delta Z(\alpha)$$

$\delta Z(\alpha)$ 4-vektor variace světočáry

okrajové podmínky $\delta Z(\alpha_z)=0 \quad \delta Z(\alpha_k)=0$

v souřadnicích

$$x^\mu(\alpha) \to x^\mu(\alpha) + \delta x^\mu(\alpha)$$

$$\frac{dx^\mu}{d\alpha}(\alpha) \to \frac{dx^\mu}{d\alpha}(\alpha) + \frac{d\delta x^\mu}{d\alpha}(\alpha)$$

$$c\frac{d\tau}{d\alpha} = \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha}\eta_{\mu\nu}} \to \sqrt{-\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}+\frac{d\delta x^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}+\frac{d\delta x^\nu}{d\alpha}\right)\eta_{\mu\nu}}$$

$$= \left(c^2\left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^2 - 2\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{d\delta x^\nu}{d\alpha}\eta_{\mu\nu} + \dots\right)^{\frac12}$$

$$= c\frac{d\tau}{d\alpha}\left(1 - \frac{1}{c^2\left(\frac{d\tau}{d\alpha}\right)^2}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{d\delta x^\nu}{d\alpha}\eta_{\mu\nu} + \dots\right)$$

$$\frac{\frac{dx^\mu}{d\alpha}}{\frac{d\tau}{d\alpha}} = u^\mu \to \quad = c\frac{d\tau}{d\alpha} - \frac1c u_\mu\frac{d\delta x^\mu}{d\alpha} + \dots$$

$$\Psi(x^\kappa) \to \Psi(x^\kappa + \delta x^\kappa) = \Psi(x^\kappa) + \delta x^\mu \nabla_\mu \Psi(x^\kappa) + \dots$$

$$A_\nu(x^\kappa) \to A_\nu(x^\kappa + \delta x^\kappa) = A_\nu(x^\kappa) + \delta x^\mu \nabla_\mu A_\nu(x^\kappa) + \dots$$

$$S \to -\int\Big[\left(\bar m_0 c + \frac ec\Psi + \frac ec\delta x^\mu\nabla_\mu\Psi\right)\left(c\frac{d\tau}{d\alpha} - \frac1c u_\mu\frac{d\delta x^\mu}{d\alpha}\right) - q\left(A_\nu + \delta x^\mu\nabla_\mu A_\nu\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha} + \frac{d\delta x^\nu}{d\alpha}\right)\Big]d\alpha$$

$$= -\int\left(\bar m_0 c^2 + e\Psi - qA_\mu u^\mu\right)d\tau \qquad \leftarrow S_0$$

$$+\int\Big[\left(\bar m_0 + \frac{e}{c^2}\Psi\right)u_\mu\frac{d\delta x^\mu}{d\alpha} - e\nabla_\mu\Psi\frac{d\tau}{d\alpha} + qA_\mu\frac{d\delta x^\mu}{d\alpha} + q(\nabla_\mu A_\nu)\frac{dx^\nu}{d\alpha}\delta x^\mu\Big]d\alpha$$

$$= S_0 + \int\frac{d}{d\alpha}\Big[\left(\bar m_0 + \frac{e}{c^2}\Psi\right)u_\mu\delta x^\mu + qA_\mu\delta x^\mu\Big]d\alpha \quad \leftarrow$$ Newtonův vzorec → hodnota na okraji $= 0$

$$+\int\Big[-\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\bar m_0 + \frac{e}{c^2}\Psi\right)u_\mu\right) - e\nabla_\mu\Psi\frac{d\tau}{d\alpha} - q\frac{dx^\nu}{d\alpha}\nabla_\nu A_\mu + q\frac{dx^\nu}{d\alpha}\nabla_\mu A_\nu\Big]\delta x^\mu d\alpha$$

$$= S_0 + \int\Big[-\frac{d}{d\tau}\left(\left(\bar m_0 + \frac{e}{c^2}\Psi\right)u_\mu\right) - e\nabla_\mu\Psi + qF_{\mu\nu}u^\nu\Big]\delta x^\mu d\tau$$

$$\forall \delta x^\mu \quad \delta S = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\left(\bar m_0 + \frac{e}{c^2}\Psi\right)u_\mu\right) = -e\nabla_\mu\Psi + qF_{\mu\nu}u^\nu$$

Pohybová rovnice

$$\frac{d}{d\tau}\left(\left(\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi\right) u_\mu\right) = -e\nabla_\mu \psi + q F_{\mu\nu} u^\nu$$

rovnice pro 4-hybnost

celková klidová hmotnost

$$m_0 = \bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi$$

4-hybnost

$$p^\mu = m_0 u^\mu$$

pohybová rovnice

$$\frac{d}{d\tau} p_\mu = -e\nabla_\mu \psi + q F_{\mu\nu} u^\nu \equiv F_\mu$$

4-síla

skalární pole $\quad -e\nabla_\mu \psi$

EM pole $\quad q F_{\mu\nu} u^\nu$

tvorba klidové hmotnosti

$$\frac{d}{d\tau} m_0 = \frac{1}{c^2} W_0$$

$$\frac{1}{c^2} W_0 = -\frac{1}{c^2} u^\mu F_\mu = \frac{e}{c^2} u^\mu \nabla_\mu \psi - \frac{q}{c^2} \underbrace{u^\mu u^\nu F_{\mu\nu}}_{0} = \frac{e}{c^2}\frac{d}{d\tau}\psi$$

$$\frac{d}{d\tau} m_0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c^2}\psi\right) \Rightarrow m_0 = \bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi \quad \leftarrow \text{konzistentní}$$

skalární pole mění klidovou hmotnost m_0

EM pole zachovává klidovou hmotnost m_0

rovnice pro zrychlení

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{e}{c^2}\psi u_\mu\right) = \frac{e}{c^2}\frac{d\psi}{d\tau} u_\mu + \frac{e}{c^2}\psi a_\mu = \frac{e}{c^2}(\nabla_\nu \psi) u^\nu u_\mu + \frac{e}{c^2}\psi a_\mu$$

$\Downarrow$

$$\left(\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi\right) a_\mu = -e\left(\delta^\nu_\mu + \frac{1}{c^2} u^\nu u_\mu\right)\nabla_\nu \psi + q F_{\mu\nu} u^\nu$$

$\Downarrow$

$$m_0 a_\mu = -e P_{\perp\mu}^{\ \nu} \nabla_\nu \psi + q F_{\mu\nu} u^\nu$$

kde $P_{\perp\mu}^{\ \nu} = \delta^\nu_\mu + \frac{1}{c^2} u^\nu u_\mu$ je projektor na kolmé směry k u^μ

$$P^\nu_\mu u_\nu = 0$$

obě strany rovnice jsou kolmé na u_μ

Lagrangeův formalismus vůči inerciální soustavě

Třírozměrný přepis akce

zvolená inerciální soustava

čas soustavy jako parametr světočáry

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad w^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{d\tau}{dt} u^\mu = \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

akce

$$S = -\int \left[\bar{m}_0 c^2 + e\psi - q A_\mu u^\mu \right] d\tau = -\int \left[(\bar{m}_0 c^2 + e\psi) \frac{d\tau}{dt} - q A_\mu w^\mu \right] dt$$

$$= \int \left[-(\bar{m}_0 c^2 + e\psi)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{v} \right] dt$$

$$= \int L(x^i, v^i)\, dt$$

Lagrangián

$$L(x^i, v^i; t) = -(\bar{m}_0 c^2 + e\psi(t, x^i))\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi(t, x^i) + q v^j A_j(t, x^i)$$

- nemá tvar $T - V$ a to ani bez polních členů
- kinetická část částice není kvadratická v rychlosti

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{1}{c^2}(\bar{m}_0 c^2 + e\psi)\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q A_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -e\nabla_i \psi \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\nabla_i \phi + q v^j \nabla_i A_j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{(\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi) v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + q v^j \nabla_j A_i + q\frac{\partial A_i}{\partial t}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{(\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi) v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}_{\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m v_i = p_i} = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\nabla_i \psi \underbrace{- q\left(\nabla_i \phi + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{q E_i} + q\underbrace{(\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) v^j}_{B_{ij} v^j = (\vec{v}\times\vec{B})_i}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\vec{\nabla}\psi + q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Bilance energie

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dE}{dt} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d}{dt}\frac{\bar{m}_0 c^2 + e\psi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\frac{d\psi}{dt} + \frac{\bar{m}_0 c^2+e\psi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{c^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + \frac{d}{dt}\frac{\left(\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\psi\right)\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v^2}{c^2}\frac{d}{dt}\frac{\bar{m}_0 c^2 + e\psi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\psi}\right) - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\cancel{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\psi} + q\,\vec{v}\cdot\vec{E} - \frac{v^2}{c^2}\frac{dE}{dt}$$

$\Downarrow$

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, e\,\frac{\partial\psi}{\partial t} + q\,\vec{v}\cdot\vec{E}$$

Hamiltonovský formalismus

Lagrangián

$$L = -(\bar{m}_0 c^2 + e\Psi)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$= -mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) - q\phi + q\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$m = \frac{\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\Psi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ relativistické hmotnost

Kanonické hybnost

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{(\bar{m}_0 + \frac{e}{c^2}\Psi)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} + q\vec{A} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

$$m\vec{v} = \vec{P} - q\vec{A} \qquad m^2 = \frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 + \frac{1}{c^2}\frac{m_0^2 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 + \frac{1}{c^2}(mv)^2 = m_0^2 + \frac{1}{c^2}(\vec{P}-q\vec{A})^2$$

Hamiltonián

$$H = \vec{v}\cdot\vec{P} - L = \frac{(\vec{P}-q\vec{A})\cdot\vec{P}}{m} + mc^2\left(1 - \frac{(\vec{P}-q\vec{A})^2}{m^2c^2}\right) + q\phi - \frac{(\vec{P}-q\vec{A})\cdot q\vec{A}}{m}$$

$$= mc^2 + q\phi = \sqrt{(\bar{m}_0c^2 + e\Psi)^2 + c^2(\vec{P}-q\vec{A})^2} + q\phi$$

Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \frac{1}{2mc^2}2c^2(\vec{P}-q\vec{A}) = \frac{\vec{P}-q\vec{A}}{m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{mc^2}\left(m_0c^2 e\vec{\nabla}\Psi - c^2 q(\vec{\nabla}\vec{A})\cdot(\vec{P}-q\vec{A})\right) + q\vec{\nabla}\phi =$$

$$= \frac{m_0}{m}e\vec{\nabla}\Psi - q(\vec{\nabla}\vec{A})\cdot\frac{\vec{P}-q\vec{A}}{m} + q\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{v} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} = \frac{\vec{P}-q\vec{A}}{m} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}+q\vec{A}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{A} = -\frac{m_0}{m}e\vec{\nabla}\Psi - q\vec{\nabla}\phi + q(\vec{\nabla}\vec{A})\cdot\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,e\vec{\nabla}\Psi - q\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi\right) + q\overleftrightarrow{B}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,e\,\vec{\nabla}\Psi + q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$