Akční principy pro pole

Variace podle pole.

Variace jako zobecnění derivace.

Skalární pole.

Akce pro skalární pole. Výpočet variace. “Per-partes” a Gaussova věta. Klein-Gordonova rovnice, zdrojový člen.

Elektromagnetické pole.

Akce elektromagnetického pole. Variace podle 4-potenciálu. Maxwellovy rovnice, zdrojový člen.

Variace podle pole

Funkcionály a jejich derivace

$S: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zobrazení z nějakého funkcionálního prostoru $\mathcal{F}$ do čísel

variace – zobecnění pojmu derivace
určuje, jak se funkcionál mění v prvním řádu změny

$$S[\phi+\delta\phi] = S[\phi]+\delta S+\ldots = S[\phi] + \int \frac{\delta S}{\delta \phi}\delta\phi + \ldots$$

Příklady v různých dimenzích

1D $\quad f(x+dx) = f(x) + \frac{df}{dx}dx + \ldots$

ND $\quad f(x^k+dx^k) = f(x^k) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$

∞D $\quad F[\psi+\delta\psi] = F[\psi] + \int_p \frac{\delta F}{\delta\psi(p)}\delta\psi(p)\,dp$ ← spojitá suma

$\psi(p) \equiv \psi^p \qquad \delta\psi(p) \equiv \delta\psi^p$

$4\infty^4$D $\quad F[A_\mu+\delta A_\mu] = F[A_\mu] + \int \frac{\delta F}{\delta A_\mu(x)}\delta A_\mu(x)\,d\Omega$

$A_\mu(x^\nu) \qquad \delta A_\mu(x^\nu)$

$\frac{\delta F}{\delta\psi(x)} \quad \frac{\delta F}{\delta A_\mu(x)}$ variace podle ψ resp. A_μ

Poznámky

- v naší definici variace držíme objemový element $dp, d\Omega$ vně variace – lze ho i zahrnout do variace, např.
  $\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta\psi(p)}\delta\psi(p) \qquad \frac{\delta F}{\delta\psi}$ je integrovatelná hustota
- ve výrazu pro variaci musí být změna $\delta\psi$, resp. δA_ν lineárně bez jakýchkoli derivací
  derivace se musí eliminovat pomocí zobecnění per-partes s užitím Gaussovy věty

$$\int (\ldots)\cdot\nabla\delta\psi\,d\Omega = \underbrace{\int \nabla\cdot[(\ )\delta\psi]\,d\Omega}_{=0} - \int [\nabla\cdot(\ )]\,\delta\psi\,d\Omega$$

Skalární pole z akce

$$S_{SP}[\psi] = -\frac{1}{2\varkappa c}\int \left(\nabla_\mu\psi \nabla_\nu\psi\, g^{\mu\nu} + m_{SP}^2 \psi^2\right) d^4\Omega$$

hledáme extrém akce při fixovaných poč. a konc. podmínkách

$\psi \to \psi + \delta\psi$ rozvoj S do řádu $\delta\psi$

$$\delta S[\psi] = S[\psi+\delta\psi] - S[\psi]$$

$$= -\frac{1}{\varkappa c}\int_\Omega \left(\nabla_\mu\psi\, \nabla_\nu\delta\psi\, g^{\mu\nu} + m_{SP}^2\psi\,\delta\psi\right) d^4\Omega \qquad + \delta S_{ostatní}$$

↳ derivovaná variace

per-partes pomocí Gaussovy věty

$$= -\frac{1}{\varkappa c}\int_\Omega \left(\nabla_\nu((\nabla^\nu\psi)\delta\psi) - (\nabla_\nu\nabla^\nu\psi)\delta\psi + m_{SP}^2\psi\,\delta\psi\right) d^4\Omega + \int_\Omega \frac{\delta S_{ostat}}{\delta\psi}\delta\psi\, d^4\Omega$$

$$= -\frac{1}{\varkappa c}\int_{\partial\Omega} (\nabla^\nu\psi)\,\underbrace{\delta\psi}_{=0 \text{ na hranici } \partial\Omega}\, n_\nu\, d^3\Sigma + \frac{1}{\varkappa c}\int_\Omega \left(\nabla_\nu\nabla^\nu\psi - m_{SP}^2\psi\right)\delta\psi\, d^4\Omega + \int_\Omega \frac{\delta S_{ost}}{\delta\psi}\delta\psi\, d^4\Omega$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{\varkappa c}\left(\nabla_\nu\nabla^\nu\psi - m_{SP}^2\psi\right)\delta\psi\, d^4\Omega + \int_\Omega \frac{\delta S_{ostat}}{\delta\psi}\delta\psi\, d^4\Omega$$

$$\frac{\delta S_{SP}}{\delta\psi} = \frac{1}{\varkappa c}\left(\Box\psi - m_{SP}^2\psi\right) \qquad \Box \equiv \nabla_\nu\nabla^\nu$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \qquad \Box\psi - m_{SP}^2\psi = \varkappa\, j$$

Klein-Gordonova rovnice (s pravou stranou)

zdroj na pravé straně závisí na interakci s jinou hmotou

$$j = -c\,\frac{\delta S_{ostatní}}{\delta\psi}$$

např. interakce s nabitou prachem

$$S_{SP\text{-}prach} = -\int \frac{1}{c}\epsilon_0\,\psi\, d^4\Omega \qquad \Rightarrow \quad j = \epsilon_0$$

Elektromagnetické pole z akce

$$S_{EM}[A] = -\frac{\varepsilon_0 c}{4}\int F_{\kappa\mu}F_{\lambda\nu}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\, d^4\Omega$$

$$= \int_{t_z}^{t_k}\int \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\vec{E}^2 - \varepsilon_0 c^2\vec{B}^2\right) dV\, dt$$

hledáme extrém akce při fix. poč. a konc. podmínkách

$A \to A + \delta A$ budeme skoumat změnu S do řádu δA

$$\delta S[A] = S[A+\delta A] - S[A]$$

$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha \qquad \delta F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \delta A_\beta - \nabla_\beta \delta A_\alpha$

$$= -\frac{\varepsilon_0 c}{2}\int (\underbrace{\nabla_\mu \delta A_\nu - \nabla_\nu \delta A_\mu}_{\text{stejný příspěvek}}) F^{\mu\nu}\, d^4\Omega + \delta S_{ostatní}[A]$$

$$= -\varepsilon_0 c\int (\nabla_\mu \delta A_\nu) F^{\mu\nu}\, d^4\Omega + \int \frac{1}{c} j^\nu \delta A_\nu\, d^4\Omega$$

$$= -\varepsilon_0 c\int \nabla_\mu(\delta A_\nu F^{\mu\nu})\, d^4\Omega + \varepsilon_0 c\int\left[\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\nu\right]\delta A_\nu\, d^4\Omega$$

Gaussova věta
okrajový člen $= 0$

$$= \varepsilon_0 c\int \underbrace{\left[-\nabla_\mu F^{\nu\mu} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\nu\right]}_{\frac{\delta S_{EM}}{\delta A_\mu}}\delta A_\nu\, d^4\Omega$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j^\mu$$

kde zdroj je dán variací $S_{ostatní}$

$$j^\mu = c\,\frac{\delta S_{ostatní}}{\delta A_\mu}$$

např. interakce s nekoher. prachem

$$S_{prach-EM} = \int \frac{1}{c}\varrho_0 A_\mu u^\mu\, d^4\Omega \quad \Rightarrow \quad j^\mu = \varrho_0 u^\mu$$

$$[\varepsilon_0 E^2] = kg^{-1} m^{-3} s^2 C^2\, kg^2 m^2 s^{-4} C^{-2} = kg\, m^{-1} s^{-2} = \frac{J}{m^3}$$