Nabitý hmotný prach a tenzor energie-hybnosti

Nekoherentní prach.

Soubor nezávislých částic. Přepis veličin popisující částice. Pohybová rovnice pro prach, její 3+1 rozštěpení.

Pohybová rovnice jak bilance tenzoru energie-hybnosti.

Tenzor energie-hybnosti pro prach. Pohybové rovnice jako rovnice kontinuity. 4-síly jako zdroje 4-hybnosti.

Tenzor energie-hybnosti pole.

4-síly jako ztráta 4-hybnosti pole. Zákon zachování celkové 4-hybnosti. Tenzor energie-hybnosti elektromagnetického pole.

Nekoherentní prach

nezávisle se pohybující částice

rovnice pro pohyb 1 částice determinují rovnice pro pohyb prachu

kongruence částic je charakterizovaná:

u^μ 4-rychlosti částic (vekt. pole v prostoročase)

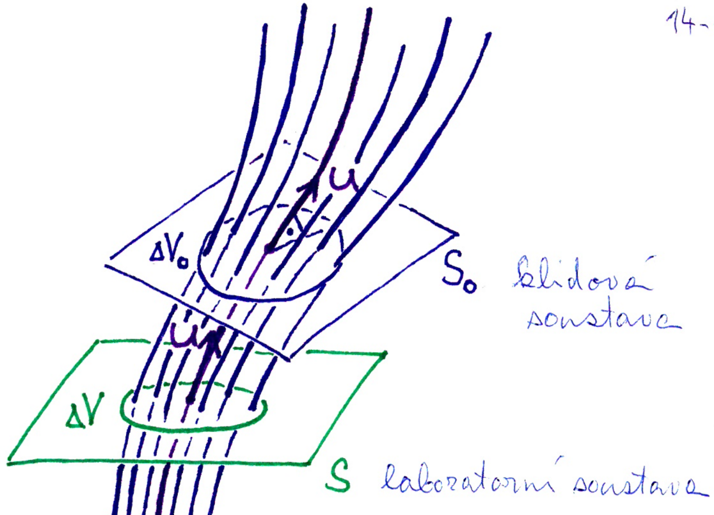
ν_0 hustota počtu částic na klidový objem $\nu_0 = \Delta N / \Delta V_0$

v_0 hustota klidového objemu na částici $v_0 = \Delta V_0 / \Delta N$ $\Rightarrow \nu_0 v_0 = 1$

zákon zachování počtu částic

$$\frac{d}{d\tau}\Delta N = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu(\nu_0 u^\mu) = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu u^\mu = -\frac{1}{\nu_0}\frac{d}{d\tau}\nu_0 = \frac{1}{v_0}\frac{d}{d\tau}v_0 \Leftrightarrow \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \vec{\nabla}\cdot(\nu\vec{v}) = 0$$

viz definice níže



$$\Delta V = \frac{1}{\gamma}\Delta V_0$$

extenzivní veličiny:

	obecná veličina	počet částic	klidová hmotnost	elektrický náboj	skalární náboj	relat. hmotnost *	energie *	4-hybnost	4-síla
1 částice	b	1	M_0	Q	e	$M = M_0\gamma$	$E = Mc^2$	$p^\alpha = M_0 u^\alpha = \begin{bmatrix} Mc \\ M\vec{v} \end{bmatrix}$	$F^\alpha = \gamma \begin{bmatrix} W/c \\ \vec{f} \end{bmatrix}$
shluk částic	$\Delta b = b\Delta N = \beta_0 \Delta V_0$	ΔN	ΔM_0	ΔQ	Δe	ΔM	ΔE	$\Delta p^\alpha = \Delta M_0 u^\alpha = \begin{bmatrix} \Delta Mc \\ \Delta M\vec{v} \end{bmatrix}$	$\Delta F^\alpha = \gamma \begin{bmatrix} \Delta W/c \\ \Delta\vec{f} \end{bmatrix}$
hustota na částici	$b = \frac{\Delta b}{\Delta N} = \beta_0 v_0$	1	m_0	q	e	m	$\mathcal{E}$	$p^\alpha = m_0 u^\alpha = \begin{bmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{bmatrix}$	$\mathcal{F}^\alpha = \gamma \begin{bmatrix} w/c \\ \vec{f} \end{bmatrix}$
hustota na klid. objem	$\beta_0 = \frac{\Delta b}{\Delta V_0} = b\nu_0$	ν_0	μ_{00}	ϱ_0	η_0	μ_0	ϵ_0	$\pi_0^\alpha = \mu_{00} u^\alpha = \begin{bmatrix} \mu_0 c \\ \mu_0\vec{v} \end{bmatrix}$	$\Phi^\alpha = \begin{bmatrix} w/c \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix}$
* hustota na labor. objem	$\beta = \frac{\Delta b}{\Delta V} = \beta_0\gamma$	ν	μ_0	ϱ	η	μ	ϵ	$\pi^\alpha = \mu_0 u^\alpha = \begin{bmatrix} \mu c \\ \mu\vec{v} \end{bmatrix}$	
tok	$B^\mu = \beta_0 u^\mu$ $\begin{bmatrix} \beta c \\ \beta\vec{v} \end{bmatrix} \leftarrow \vec{B}$	$N^\mu = \nu_0 u^\mu$ $\begin{bmatrix} \nu c \\ \nu\vec{v} \end{bmatrix} \leftarrow \vec{N}$	$\Pi_0^\mu = \mu_{00} u^\mu$ $\begin{bmatrix} \epsilon_0/c \\ \vec{\Pi}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 c \\ \mu_0\vec{v} \end{bmatrix}$	$j^\mu = \varrho_0 u^\mu$ $\begin{bmatrix} \varrho c \\ \varrho\vec{v} \end{bmatrix} \leftarrow \vec{j}$	$\eta_0 u^\mu$ $\begin{bmatrix} \eta c \\ \eta\vec{v} \end{bmatrix}$	$\Pi^\mu = \mu_0 u^\mu$ $\begin{bmatrix} \epsilon/c \\ \vec{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu c \\ \mu\vec{v} \end{bmatrix}$	$\epsilon_0 u^\mu$ $\begin{bmatrix} \epsilon c \\ \epsilon\vec{v} \end{bmatrix}$	$T^{\mu\alpha} = \pi_0^\alpha u^\mu = \mu_{00} u^\mu u^\alpha$ $\begin{bmatrix} \epsilon & \vec{\Pi} c \\ \frac{\epsilon}{c}\vec{v} & \vec{\Pi}\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu c^2 & \mu c\vec{v} \\ \mu c\vec{v} & \mu\vec{v}\vec{v} \end{bmatrix}$	

[* závisí na volbě inerciální soustavy]

význam μ_{00}, μ_0, μ

1) μ_0 = hustota relat. hmotnosti na klidový objem

$$\mu_0 = \frac{\Delta M}{\Delta V_0} = \frac{\Delta M_0}{\Delta V_0}\gamma = \mu_{00}\gamma$$

2) μ_0 = hustota klidové hmotnosti na laboratorní objem

$$\mu_0 = \frac{\Delta M_0}{\Delta V} = \frac{\Delta M_0}{\Delta V_0}\gamma = \mu_{00}\gamma$$

$\Downarrow$

stejná veličina!

$$\mu = \mu_0\gamma = \mu_{00}\gamma^2$$

μ_{00} – klidová hmotnost na klidový objem

μ_0 – klid. hmotn. na labor. objem = relativ. hmotn. na klidový objem

μ – relativistická hmotnost na laboratorní objem

Pohybové rovnice pro prach

pohyb. rov. jedné částice

$$\frac{d}{d\tau}(M_0 u_\mu) = Q F_{\mu\nu} u^\nu + F_\mu \qquad F_\mu - \text{"jiné" 4-síly}$$

pohyb. rov. shluku ΔN částic (shluk kolem centrální částice s 4-rych. u^μ)

$$\frac{d}{d\tau}(\Delta M_0 u_\mu) = \Delta Q F_{\mu\nu} u^\nu + \Delta F_\mu$$

hustota na jednu částici (vydělit ΔN s využitím $\frac{d}{d\tau}\Delta N = 0$)

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u_\mu) = q F_{\mu\nu} u^\nu + f_\mu$$

hustota na klidový objem (násobení ν_0, přechod k objemový hustotám)

$$\nu_0 \frac{d}{d\tau}(\mu_{00} \nu_0 u_\mu) = \varrho_0 F_{\mu\nu} u^\nu + \Phi_\mu$$

$$\Vert$$

$$\nu_0 u_\nu \nabla^\nu(\mu_{00}\nu_0 u_\mu) + \underbrace{\nabla^\nu(\nu_0 u_\nu)}_{0 \Leftarrow \text{zákon zach. částic}} \mu_{00}\nu_0 u_\mu = \nabla^\nu(\mu_{00} u_\nu u_\mu \underbrace{\nu_0\nu_0}_{1}) = \nabla^\nu T_{\text{prach}\,\nu\mu}$$

$$\Downarrow$$

pohybová rovnice pro prach

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu}_{\text{prach}} = \varrho_0 F^{\mu\nu} j_\nu + \Phi^\mu$$

tenzor energie-hybnosti nekoherentního prachu

$$T^{\mu\nu}_{\text{prach}} = u^\mu \pi_0^\nu = \mu_{00} u^\mu u^\nu = \begin{bmatrix} \mu c^2 & \mu c\vec{v} \\ \mu c\vec{v} & \mu\vec{v}\vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & c\vec{\pi} \\ \frac{1}{c}\epsilon\vec{v} & \vec{v}\vec{\pi} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow c\,(\text{hustota 4-hybnosti}) \\ \leftarrow \text{tok hustoty 4-hybnosti} \end{array}$$

- 4-tok hustoty 4-hybnosti
- symetrický

3+1 rozštěpení

$$\nabla_\nu = \left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right] \quad u^\mu = \gamma\begin{bmatrix} c \\ \vec{v}\end{bmatrix} \quad \Phi^\mu_{EM} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\varrho\vec{v}\cdot\vec{E} \\ \varrho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \end{bmatrix} \quad \Phi^\mu = \begin{bmatrix} \frac{w}{c} \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix} \quad \pi^\alpha = \begin{bmatrix} \epsilon/c \\ \vec{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu c \\ \mu\vec{v} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\epsilon) = \varrho\vec{v}\cdot\vec{E} + w \qquad \Leftarrow \text{časové složky}$$

$$\frac{\partial\vec{\pi}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\vec{\pi}) = \varrho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) + \vec{\Phi} \qquad \Leftarrow \text{prostorové složky}$$

Pohybové rovnice jako bilance 4-hybnosti

tenzor energie-hybnosti prachu

$T^{\mu\nu}_{prach}$ charakterizuje tok 4-hybnosti

$\nabla_\nu T^{\nu\mu}_{prach}$ charakterizuje "výtok" 4-hybnosti z elementární prostoročasové oblasti

pohybové rovnice = bilance 4-hybnosti

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu}_{prach} = \underbrace{\Phi^\mu_{EM} + \Phi^\mu_{jiné}}_{\text{zdroj 4-hybnosti prachu v jiné formě hmoty}}$$

4-síly =
= zdroje 4-hybnosti prachu
= ztráta 4-hybnosti jiné formy hmoty

tenzor energie-hybnosti pro EM-pole a jinou hmotu
lze nalézt $T^{\mu\nu}_{EM}$ a $T^{\mu\nu}_{jiné}$ popisující tok 4-hybnosti této hmoty
4-síla je ztráta této 4-hybnosti ⇒

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu}_{EM} = -\Phi^\mu_{EM} \qquad \nabla_\nu T^{\nu\mu}_{jiné} = -\Phi^\mu_{jiné}$$

pohybové rovnice = zákon zachování 4-hybnosti

$$\nabla_\nu \left(T^{\nu\mu}_{prach} + T^{\nu\mu}_{EM} + T^{\nu\mu}_{jiné} \right) = 0$$

tj.

$$\nabla_\nu T^{\nu\mu}_{celkový} = 0$$

tenzor energie-hybnosti EM pole (ε_0 permitivita vakua)

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \varepsilon_0 c^2 \left(F^{\mu\kappa} F^{\nu\lambda} \eta_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \eta^{\mu\nu} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} u & c\vec{g} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & \overleftrightarrow{T} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow c\,(\text{hustota 4-hybnosti}) \\ \leftarrow \text{tok hustoty 4-hybnosti} \end{array}$$

$u = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\vec{B}^2$ hustota EM energie

$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}\times\vec{B} \quad \vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} \quad \vec{S} = \vec{g}c^2$ Poyntingův vektor

$\overleftrightarrow{T} = \underbrace{-\varepsilon_0 \left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)\overleftrightarrow{\delta} \right)}_{\text{Maxwellův tenzor napětí}}$ tenzor toku hybnosti