

# Proseminář teoretické fyziky

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

NTMF029 LS: 0/2 Z – jaro 2020

## Zápočtový problém č. 1

Vzhledem k pozastavení výuky v letním semestru dojde zřejmě k úpravě podmínek pro získání zápočtu. Větší důraz bude dán na domácí úkoly. Jejich počet však bude též záviset na množství přednesené látky. V tento okamžik předpokládám dva domácí úkoly související s křivočarými souřadnicemi, co bude dál se uvidí.

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

Termín odevzdání 1. zápočtového problému je 2. dubna 2020. Řešení pošlete elektronickou formou (pdf z  $\LaTeX$ u, scan či foto) na adresu:

Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz

Příští domácí úkol bude zveřejněn 23. března 2020. Zadání zápočtových problémů je možné nalézt na adrese:

<http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF029/>

- (i) Určete Lamého koeficienty pro bi-polární souřadnice v rovině. Bi-polární souřadnice  $\alpha$ ,  $\psi$  jsou dány následujícími vztahy ke kartézským souřadnicím  $\xi$ ,  $v$ :

$$\xi = \ell \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \psi}, \quad v = \ell \frac{\sin \psi}{\cosh \alpha - \cos \psi},$$

kde  $\ell$  je konstanta o rozměru délky.

- (ii) Nakreslete souřadnicové čáry těchto souřadnic.  
(iii) Nalezněte inverzní transformace, konkrétně vztahy pro  $\tanh \alpha$  a  $\tan \psi$ .  
(iv) Napište v těchto souřadnicích skalární Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

- (v) Nalezněte její obecné řešení závislé pouze na souřadnici  $\alpha$ , tj.  $\phi = \phi(\alpha)$ .  
(vi) Pokud je Laplaceova rovnice napsaná v souřadnicích  $\alpha$ ,  $\psi$  splněna pro všechny konečné hodnoty souřadnic  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $\psi \in (-\pi, \pi)$  a řešení je periodické v souřadnici  $\psi$  (tj.,  $\phi(\alpha, -\pi) = \phi(\alpha, \pi)$ ), zaručuje to, že je Laplaceova rovnice splněna i v kartézských souřadnicích  $\xi$ ,  $v$ ? Kde mohou potenciálně nastat problémy?  
(vii) Jak je tomu s řešením nalezeným v (v)? Přepište ho v kartézských souřadnicích  $\xi$ ,  $v$ . Splňuje Laplaceovu rovnici pro všechna  $\xi$ ,  $v \in \mathbb{R}$ ? Zkuste výsledek interpretovat.  
(viii) Rotací bi-polárních souřadnic okolo osy  $\xi$  dostaneme souřadnice bi-sférické:

$$x = \ell \frac{\sin \psi \cos \varphi}{\cosh \alpha - \cos \psi}, \quad y = \ell \frac{\sin \psi \sin \varphi}{\cosh \alpha - \cos \psi}, \quad z = \ell \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \psi}.$$

Obdobně rotací okolo osy  $v$  dostaneme souřadnice toroidální:

$$x = \ell \frac{\sinh \alpha \cos \varphi}{\cosh \alpha - \cos \psi}, \quad y = \ell \frac{\sinh \alpha \sin \varphi}{\cosh \alpha - \cos \psi}, \quad z = \ell \frac{\sin \psi}{\cosh \alpha - \cos \psi}.$$

Nalezněte tvar metriky v těchto souřadnicích a určete Lamého koeficienty.

- (ix) Rozmyslete si podobu souřadnicových ploch, případně je vykreslete pomocí vhodného software. [Počítačově generovaný obrázek není podmínkou. Stačí popis či náčrt ploch. Nicméně generovaný obrázek jistě pomůže k lepší vizualizaci.]