Proseminář teoretické fyziky

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

NTMF029 LS: 0/2 Z – jaro 2020

Zápočtový problém č. 2

Druhý zápočtový úkol na téma křivočarých souřadnic. Další domácí úkol bude na téma klasické teorie pole a bude navazovat na přednášku, jejíž záznam bude k dispozici na webu proseminăře.
Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

Termín odevzdání 2. zápočtového problému je 9. dubna 2020. Řešení posílejte elektronickou formou (pdf z LaTeXu, scan či foto) na adresu:

`Pavel.Krtous@utf.mff.cuni.cz`

Příští domácí úkol bude zveřejněn začátkem dubna. Záznamy nových přednášek a zadání zápočtových problémů je možné nalézt na adrese:

`http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF029/`

1 Minkowského prostor

Mějme dvoudimenzionální Minkowského prostor s *inerciálními souřadnicemi* $\{t,\, x\}$ v nichž má metrika $\boldsymbol{\eta}$ standardní tvar

$$\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{d}t\,\mathbf{d}t + \mathbf{d}x\,\mathbf{d}x\ .$$

Zde standardně za souřadnicovou bázi v prostoru kovektorů (1-forem) bereme gradienty souřadnic $\{\mathbf{d}t,\, \mathbf{d}x\}$ a duální bázi v prostoru vektorů tvoří souřadnicové vektory $\{\boldsymbol{\partial}_t,\, \boldsymbol{\partial}_x\}$. Komponenty $\{a^t,\, a^x\}$ vektoru $\boldsymbol{a}$ se ke komponentám $\{a_t,\, a_x\}$ odpovídajícího kovektoru $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\eta}$ tak mají standardními vztahy pro inerciální soustavy: $a_t = -a^t$, $a_x = a^x$.

V Minkovského prostoru je však také výhodné zavést tzv. *nulové souřadnice* $\{u,\, v\}$ vztahy

$$u = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(t - x\big)\ , \quad v = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(t + x\big)\ .$$

(i) Nalezněte vyjádření souřadnicové báze kovektorů $\{\mathbf{d}u,\, \mathbf{d}v\}$ pomocí $\{\mathbf{d}t,\, \mathbf{d}x\}$ a obdobně báze vektorů $\{\boldsymbol{\partial}_u,\, \boldsymbol{\partial}_v\}$ pomocí $\{\boldsymbol{\partial}_t,\, \boldsymbol{\partial}_x\}$.

(ii) Vyjádřete metriku $\boldsymbol{\eta}$ v souřadnicích $\{u,\, v\}$. Jaký je kvadrát velikosti vektorů $\boldsymbol{\partial}_u$ a $\boldsymbol{\partial}_v$ spočtený pomocí metriky $\boldsymbol{\eta}$? Jaký je jejich skalární součin?

(iii) Napište vztahy mezi souřadnicemi $\{a^u,\, a^v\}$ a $\{a_u,\, a_v\}$.

(iv) Báze vektorů a kovektorů vzhledem k souřadnicím $\{u,\, v\}$ se nazývají *nulové báze* a často se označují

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{\partial}_u\ , \quad & \boldsymbol{l} &= \boldsymbol{\partial}_v\ ,\\ \boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{d}u\ , \quad & \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{d}v\ . \end{aligned}$$

Jaký je vztah mezi kovektory $\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\eta},\, \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\eta}\}$ a duální kovektorovou bází $\{\boldsymbol{\kappa},\, \boldsymbol{\lambda}\}$? Neboli, jaký je vztah $k_\alpha,\ l_\alpha$ a $\kappa_\alpha,\, \lambda_\alpha$?

(v) Vyjádřete skalární d'Alembertův operátor $\Box$, definovaný

$$\Box\,\phi = \eta^{ab}\nabla_a\nabla_b\,\phi\ ,$$

jak v souřadnicích $\{t,\, x\}$, tak v souřadnicích $\{u,\, v\}$.

(vi) Nalezněte obecné řešení vlnové rovnice

$$\Box\,\phi = 0$$

v souřadnicích $\{u,\, v\}$.

2 Euklidovský prostor

Nulové souřadnice v Minkowském prostoru jsou velice užitečné. Nabízí se proto otázka, zda obdobné souřadnice nelze definovat i v euklidovském prostoru. Vzhledem k tomu, že však euklidovská metrika je pozitivně definitní, okamžitě nahlédneme, že nelze zavést bázi vektorů, jejichž délky jsou nulové. Alespoň, pokud se omezíme na vektory *reálné*.

Positivní definitnost euklidovské metriky ale lze obejít úkrokem do komplexního oboru. Na reálném dvoudimenzionálním euklidovském prostoru s kartézskými souřadnicem $\{x,\, y\}$ a metrikou

$$\boldsymbol{q} = \mathbf{d}x\,\mathbf{d}x + \mathbf{d}y\,\mathbf{d}y$$

můžeme zavést *komplexní souřadnice* $\{\zeta,\, \bar{\zeta}\}$ vztahy

$$\zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(x + iy\big)\ , \quad \bar{\zeta} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(x - iy\big)\ .$$

Místo dvou reálných nezávislých souřadnic $\{x,\, y\}$ tak máme dvě komplexní souřadnice $\{\zeta,\, \bar{\zeta}\}$, které jsou však k sobě komplexně sdružené. Navzdory této vazbě je často výhodné považovat funkce ζ a $\bar{\zeta}$ za nezávislé a objekty z reálného euklidovského prostoru vyjadřovat pomocí nich: např. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta + \bar{\zeta})$, $y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\zeta} - \zeta)$.

Obdobně Minkowskému případu zavedeme v prostoru kovektorů bázi $\{\boldsymbol{\mu},\, \bar{\boldsymbol{\mu}}\}$,

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{d}\zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathbf{d}x + i\mathbf{d}y\big)\ , \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{d}\bar{\zeta} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathbf{d}x - i\mathbf{d}y\big)$$

a v prostoru vektorů duální bázi $\{\boldsymbol{m},\, \bar{\boldsymbol{m}}\}$,

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\partial}_{\zeta}\ , \quad \bar{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\partial}_{\bar{\zeta}}\ .$$

Zdůrazněme, že se jedná o komplexní vektory a kovektory.

(i) Pomocí podmínek duality vyjádřete vektory $\boldsymbol{m}$ a $\bar{\boldsymbol{m}}$ v bázi $\{\boldsymbol{\partial}_x,\, \boldsymbol{\partial}_y\}$.

(ii) Vyjádřete metriku $\boldsymbol{q}$ v souřadnicích $\{\zeta,\, \bar{\zeta}\}$. Jaký je kvadrát velikosti komplexních vektorů $\boldsymbol{m}$ a $\bar{\boldsymbol{m}}$ spočtený pomocí metriky $\boldsymbol{q}$? Jaký je skalární součin $\boldsymbol{m}$ a $\bar{\boldsymbol{m}}$?

(iii) Napište vztahy mezi komponentami $\{a^m,\, a^{\bar{m}}\}$ vektoru $\boldsymbol{a} = a^m\boldsymbol{m} + a^{\bar{m}}\bar{\boldsymbol{m}}$ a komponentami $\{a_\mu,\, a_{\bar{\mu}}\}$ asociovaného kovektoru $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q} = a_\mu\boldsymbol{\mu} + a_{\bar{\mu}}\bar{\boldsymbol{\mu}}$. Jakou podmínku splňují komponenty a^m a $a^{\bar{m}}$ pokud je vektor $\boldsymbol{a}$ reálný?

(iv) Jaký je vztah mezi kovektory $\{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{q},\, \bar{\boldsymbol{m}}\cdot\boldsymbol{q}\}$ a $\{\boldsymbol{\mu},\, \bar{\boldsymbol{\mu}}\}$?

(v) Vyjádřete skalární Laplaceův operátor $\triangle$ definovaný

$$\triangle\,\phi = q^{ab}\nabla_a\nabla_b\,\phi = \phi_{,xx} + \phi_{,yy}$$

v souřadnicích $\{\zeta,\, \bar{\zeta}\}$.

(vi) Ověřte, že hladké komplexní řešení Laplaceovy rovnice

$$\triangle\,\phi = 0$$

lze napsat

$$\phi = f(\zeta) + g(\bar{\zeta})\ ,$$

kde $f(\zeta)$ je *holomorfní funkce* v komplexní proměnné ζ (tj. diferencovatelná v ζ a nezávislá na proměnné $\bar{\zeta}$) a $g(\bar{\zeta})$ funkce *anti-holomorfní* v ζ (tj. diferencovatelná v $\bar{\zeta}$ a nezávislá na ζ). Reálné řešení ϕ je pak dáno pouze jednou holomorfní funkcí f, kde g je eliminováno podmínkou $g = \bar{f}$.