Proseminář z teoretické fyziky - NOFY070

Zápočtový problém

Termín odevzdání: **17.4.2023**
Odevzdávejte pomocí SISu
(nouzově emailem na adresu `ota@matfyz.cz` nebo na přednášce)

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako správné nebo jako neúplné.
Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

a) Nalezněte Greenovu funkci $G(x,y)$ operátoru $\frac{d^2}{dx^2} + 2i\beta\frac{d}{dx} + (\omega^2 - \beta^2)$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ vyhovující Dirichletovým okrajovým podmínkám[1]. Tedy nalezněte řešení rovnice (i je imag. jednotka a $\beta,\omega \in \mathbb{R}$)

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,y)+2i\beta\frac{d}{dx}G(x,y)+(\omega^2-\beta^2)G(x,y) = \delta(x-y)\ , \quad x,y \in \langle 0,1\rangle$$

splňující

$$G(0,y) = G(1,y) = 0.$$

b) Proveďte limitu Greenovy funkce pro $\omega \to 0$ a získejte novou Greenovu funkci

$$G_0(x,y) = \lim_{\omega\to 0} G(x,y)$$

Ověřte, že splňuje Dirichletovy okr. podmínky.

c) Nalezněte řešení rovnice

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + 2i\beta\frac{d}{dx}f(x) - \beta^2 f(x) = x^2$$

splňující Dirichletovy okr. podmínky na $\langle 0,1\rangle$, které je dané vztahem

$$f(x) = \int_0^1 G_0(x,y)y^2dy,$$

d) Pravou stranu a reálnou i imaginární část výsledku vykreslete nebo načrtněte (např. pro $\beta = 7$ apod.).

[1] Jde o samozdružený operátor, protože $(\frac{d}{dx})^\dagger = -\frac{d}{dx}$ (porovnejte s pravidlem pro derivování distribucí založeným na regularních distribucích působících prostřednictvím integrálu, tedy vlastně skalárního součinu funkcí).