Proseminář teoretické fyziky

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

`NTMF029` LS: 0/2 Z – jaro 2023

Zápočtový problém č. 2

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování. Termín odevzdání 2. zápočtového problému je 31. května 2023. Řešení v elektronické formě nahrajte v SISu v modulu studijní mezivýsledky nebo v případě potíží pošlete na adresu `otakar.svitek@matfyz.cuni.cz`

Uvažujme dvojkomponentové reálné pole Φ^A, tj. pole nabývající hodnot v dvojdimenzionálním reálném vektorovém prostoru. Komponenty z tohoto prostoru budeme číslovat velkými písmeny $A, B, \ldots = 1, 2$.

Na tomto prostoru mějme skalární součin zadaný pomocí metriky H_{AB}

$$\big(\Phi, \Psi\big) = H_{AB}\, \Phi^A \Psi^B \ .$$

Metrika H_{AB} je nedegenerovaná pozitivně definitní s inverzí H^{AB} a budeme ji používat pro snižování a zvyšování polních indexů.

Dále mějme tzv. komplexní strukturu kompatibilní s tímto součinem – operátor $J^A{}_B$ splňující

$$J^2 = -I \ , \qquad \big(J\cdot\Phi, J\cdot\Psi\big) = \big(\Phi, \Psi\big) \ ,$$

kde I je jednotkový operátor. V komponentách to znamená

$$J^A{}_N J^N{}_B = -I^A_B \ , \qquad H_{MN} J^M{}_A J^N{}_B = H_{AB} \quad \Rightarrow \quad J^M{}_A H_{MB} = -H_{AN} J^N{}_B \ ,$$

což jsou vztahy využitelné pro komutaci matic H_{AB} a $J^A{}_B$.

Pole Φ^K se nazývá nabité skalární pole. Jeho interakce s elektromagnetickým polem je zachycena akcí

$$S_{\text{NP}}\big[\Phi^N, A_\mu\big] = -\frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\, H_{AB}\, \mathrm{D}_\mu\Phi^A\, \mathrm{D}_\nu\Phi^B\, \eta^{\mu\nu} + M^2\, H_{AB}\, \Phi^A\, \Phi^B \,\Big]\, d^4\Omega \ ,$$

4-potenciál A_μ elektromagnetického pole se skrývá v kovariantní derivaci D definované na polním vektorovém prostoru

$$\mathrm{D}_\mu\Phi^K = \nabla_\mu\Phi^K - e\, A_\mu\, J^K{}_L \Phi^L \ .$$

Zde $\eta_{\mu\nu}$ je Minkowského metrika, ∇_μ derivace v prostoročasu a e náboj pole. Poznamenejme, že pro kovektor Σ_K s indexem dole je kovariantní derivace dána

$$\mathrm{D}_\mu\Sigma_K = \nabla_\mu\Sigma_K + e\, A_\mu\, \Sigma_L\, J^L{}_K \ .$$

Uvažujeme volbu jednotek $c = 1$.

(i) Variací akce podle Φ^N nalezněte pohybovou rovnici pro pole.

(ii) Variací akce podle A_μ nalezněte elektrický 4-tok nesený tímto polem

$$\mathcal{J}^\mu_{\mathrm{NP}} = \frac{\delta S_{\mathrm{NP}}}{\delta A_\mu} \ .$$

(iii) Ověřte, že akce je invariantní vůči kalibrační transformaci

$$\Phi \to \tilde{\Phi} = \exp\bigl(e\alpha J\bigr)\cdot\Phi \ , \qquad A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \nabla_\mu\alpha$$

Zde $\exp(e\alpha J)$ je maticová exponenciála. Při důkazu využijte komutační vlastnosti $J^A{}_B$ s H_{AB}.

(iv) Rozštěpením prostoročasu na čas a prostor nalezněte Lagrangián pole $L_{\mathrm{NP}}(\Phi^A, \dot{\Phi}^A)$. Zde je výhodné zavést prostorovou kovariantní polní derivaci $\vec{\mathrm{D}}\Phi^K$ a kovariantní časovou derivaci $\mathrm{D}_0\Phi^K$

$$\vec{\mathrm{D}}\Phi^K = \vec{\nabla}\Phi^K - e\,\vec{A}\,J^K{}_L\Phi^L \ , \qquad \mathrm{D}_0\Phi^K = \dot{\Phi}^K + e\,\phi\,J^K{}_L\Phi^L \ ,$$

kde ϕ a $\vec{A}$ jsou elektromagnetický skalární a vektorový potenciál.

(v) Určete nábojovou hustotu ρ_{NP} a tok náboje $\vec{j}_{\mathrm{NP}}$ asociované s polem

$$\rho_{\mathrm{NP}} = -\frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\phi} \ , \qquad \vec{j}_{\mathrm{NP}} = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\vec{A}} \ .$$

(vi) Nalezněte hybnost pole

$$P_K = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\dot{\Phi}^K} \ .$$

(vii) Napište Hamiltonián pole $H_{\mathrm{NP}}(\Phi^A, P_A)$.

K rozmyšlení navíc (nepovinné):

Pokud budeme uvažovat, že elektromagnetické pole vystupující v akci S_{NP} je také dynamické, s akcí S_{EM} danou na přednášce, jaký bude příspěvek pole Φ do Gaussovy vazby G vzniklé při budování hamiltonovského formalismu celého systému obou polí? Neboli, jaká bude Gaussova vazba v systému s akcí $S = S_{\mathrm{EM}}(A) + S_{\mathrm{NB}}(\Phi, A)$? Gaussova vazba zde vznikne zcela stejným způsobem jak bylo diskutováno na přednášce, tj. jako sekundární vazba zajišťující konstantnost primární vazby $\kappa = 0$.

Poznámky na okraj:

Uvedený příklad je nejjednodušší případ interakce tzv. *kalibračního pole* (zde elektromagnetické pole) s hmotovým polem (pole Φ). Pole Φ popisuje kombinaci nabitého skalárního pole a antipole.

Vedle reálného formalismu užitého v tomto případě lze zavést též jednokomponentové komplexní pole. Komplexní struktura J pak přejde na obyčejnou komplexní jednotku a reálný skalární součin daný metrikou H na skalární součin na komplexním jednodimenzionálním prostoru.

Kalibrační pole lze místo vektorového 4-potenciálu A_μ popsat též přímo *kovariantní derivací* D na polním prostoru. Z matematického hlediska se jedná o derivaci na *fibrovaném prostoru*. Intenzita kalibračního pole $F_{\mu\nu}$ má pak interpretaci *křivosti* této derivace.

Kalibrační teorie jsou vždy invariantní vůči grupě kalibračních transformací. V našem případě se jedná o transformace zachovávající skalární součin. Čili kalibrační transformace tvoří v každém prostoročasovém bodě grupu $SO(2)$; z hlediska komplexního formalismu se častěji uvádí grupa $U(1) = SO(2)$. Invariance teorie lze zabezpečit, pokud je akce zapsána v *kovariantním tvaru* – pouze pomocí geometrických veličin jako jsou skalární součin a zobecněná kovariantní derivace.

Standardní model – současná teorie elementárních částic – je vystaven právě na základě teorie kalibračních polí. Kalibrační i hmotová pole jsou v tomto případě již složitější než jednoduché elektromagnetické a skalární pole, nicméně např. s interakčními členy vstupujícími do akce skrze zobecněnou kovariantní derivaci D se v obecné teorii setkáváme i nadále.