# Proseminář teoretické fyziky

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

NTMF029 LS: 0/2 Z – jaro 2024

# Zápočtový problém č. 2

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

Termín odevzdání 2. zápočtového problému je 20. května 2024.
Pozdější odevzdání řešení s sebou ponese pozdější udělení zápočtu. Odevzdání během zkouškového období je možné pouze tak, aby se kontrola a možné opravy stihly do 30. června 2024.

Uvažujme komplexní pole $\psi$, tj. skalární pole nabývající hodnoty v komplexních číslech. Toto pole bude možné interpretovat jako nabité pole náboje $+e$. S tímto polem máme přirozeně asociované komplexně sdružené pole $\bar{\psi}$ náboje $-e$, které též nazýváme antipolem.

Ač jsou pole $\psi$ a antipole $\bar{\psi}$ navzájem komplexně sdružená, lze je často chápat jako relativně nezávislá skalární pole. Důvodem je, že pole $\psi$ ve skutečnosti obsahuje dvě nezávislé reálné komponenty – svojí reálnou a imaginární část. Uvažování polí $\psi$ a $\bar{\psi}$ nezávisle umožňuje vlastně přístup k oběma reálným složkám.

Na těchto polích můžeme definovat tzv. kalibrační kovariantní derivaci zahrnující interakci nabitých polí s elektromagnetickým polem popsaným vektorovým 4-potenciálem $A_\mu$. Na pole náboje $+e$ působí derivace $\mathcal{D}_\mu$ předpisem

$$\mathcal{D}\psi = \nabla\psi - ieA_\mu\psi$$

a na antipole s nábojem $-e$ působí derivace $\bar{\mathcal{D}}_\mu$ jako

$$\bar{\mathcal{D}}\bar{\psi} = \nabla\bar{\psi} + ieA_\mu\bar{\psi}\ .$$

Často se derivace $\mathcal{D}$ a $\bar{\mathcal{D}}$ shodně nazývají $\mathcal{D}$ a implicitně se předpokládá, že v členu se 4-potenciálem je vždy použit správný náboj podle pole, na které derivace působí.

Dynamika nabitých polí $\psi$ a $\bar{\psi}$ a jejich interakce s elektromagnetickým polem je zachycena akcí

$$S_{\text{NP}}\big[\psi,\bar{\psi},A_\mu\big] = -\int_\Omega \Big[\,\eta^{\mu\nu}\,\mathcal{D}_\mu\psi\,\bar{\mathcal{D}}_\nu\bar{\psi} + m^2\,\psi\,\bar{\psi}\,\Big]\,d^4\Omega\ .$$

Zde $\eta_{\mu\nu}$ je Minkowského metrika a uvažujeme volbu jednotek $c=1$.

(i) Variací akce podle pole $\psi$ a antipole $\bar{\psi}$ nalezněte pohybové rovnici pro obě pole.

Při variování podle komplexního pole vyjádřete změnu akce $\delta S$ jako lineární kombinaci malých změn $\delta\psi$ a $\delta\bar{\psi}$,

$$\delta S = \int_\Omega \Big[(\,\dots\,)\,\delta\psi + (\,\dots\,)\,\delta\bar{\psi}\Big]\,d^4\Omega\ .$$

Koeficienty u $\delta\psi$ a $\delta\bar{\psi}$ pak považujte za variace $\frac{\delta S}{\delta\psi}$ a $\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}}$.

Oddiskutujte, že obě výsledné pohybové rovnice jsou navzájem konzistentní.

(ii) Variací akce vektorového 4-potenciálu $A_\mu$ nalezněte elektrický 4-tok nesený společně poli $\psi$ a $\bar{\psi}$,

$$J^\mu_{\mathrm{NP}} = \frac{\delta S_{\mathrm{NP}}}{\delta A_\mu} \; .$$

(iii) Ověřte, že akce je invariantní vůči kalibrační transformaci

$$\psi \to \tilde{\psi} = \exp\bigl(ie\alpha\bigr)\psi \; , \qquad \bar{\psi} \to \tilde{\bar{\psi}} = \exp\bigl(-ie\alpha\bigr)\bar{\psi} \; , \qquad A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \alpha$$

(iv) Rozštěpením prostoročasu na čas a prostor nalezněte Lagrangián $L_{\mathrm{NP}}(\psi, \dot{\psi}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}, \varphi, \vec{A})$.

Zde je výhodné zavést prostorovou kovariantní derivaci $\vec{\mathcal{D}}\psi$ a kovariantní časovou derivaci $\mathcal{D}_0\psi$,

$$\vec{\mathcal{D}}\psi = \vec{\nabla}\psi - ie\,\vec{A}\,\psi \; , \qquad \mathcal{D}_0\psi = \dot{\psi} + ie\,\varphi\,\psi \; ,$$
$$\bar{\vec{\mathcal{D}}}\bar{\psi} = \vec{\nabla}\bar{\psi} + ie\,\vec{A}\,\bar{\psi} \; , \qquad \bar{\mathcal{D}}_0\bar{\psi} = \dot{\bar{\psi}} - ie\,\varphi\,\bar{\psi} \; .$$

Pole $\varphi$ a $\vec{A}$ jsou standardní skalární a vektorový potenciál elektromagnetického pole.

(v) Určete nábojovou hustotu $\rho_{\mathrm{NP}}$ a tok náboje $\vec{j}_{\mathrm{NP}}$ asociované s nabitými poli

$$\rho_{\mathrm{NP}} = -\frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\varphi} \; , \qquad \vec{j}_{\mathrm{NP}} = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta \vec{A}} \; .$$

(vi) Nalezněte hybnosti polí

$$\pi = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\dot{\psi}} \; , \qquad \bar{\pi} = \frac{\delta L_{\mathrm{NP}}}{\delta\dot{\bar{\psi}}} \; .$$

(vii) Napište Hamiltonián

$$H_{\mathrm{NP}}(\psi, \pi, \bar{\psi}, \bar{\pi}) = \int_\Omega \Bigl[\dot{\psi}\pi + \dot{\bar{\psi}}\bar{\pi}\Bigr]\, d^4\Omega - L_{\mathrm{NP}}(\psi, \dot{\psi}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}) \; .$$

nabitých polí.

**K rozmyšlení navíc (nepovinné):**

Pokud budeme uvažovat, že elektromagnetické pole vystupující v akci pro nabitá pole je také dynamické, s akcí $S_{\mathrm{EM}}$ uvedenou na přednášce, jaký bude příspěvek polí $\psi$ a $\bar{\psi}$ do Gaussovy vazby $G$ vzniklé při budování hamiltonovského formalismu celého systému polí $\psi$, $\bar{\psi}$ a $A_\mu$? Neboli, jaká bude Gaussova vazba v systému s akcí $S = S_{\mathrm{EM}}(A) + S_{\mathrm{NB}}(\psi, \bar{\psi}, A)$? Gaussova vazba zde vznikne zcela stejným způsobem jak bylo diskutováno na přednášce, tj. jako sekundární vazba zajišťující konstantnost primární vazby $\kappa = 0$.

**Poznámky na okraj:**

Uvedený příklad je nejjednodušší případ interakce tzv. *kalibračního pole* (zde elektromagnetické pole $A$) s poli hmoty (pole $\psi$ a $\bar{\psi}$).

Kalibrační pole lze místo vektorového 4-potenciálu $A$ popsat též přímo *kalibrační kovariantní derivací* $\mathcal{D}$ na polním prostoru. Z matematického hlediska se jedná o derivaci na *fibrovaném prostoru.* Intenzita kalibračního pole $F_{\mu\nu}$ má pak interpretaci *křivosti* této derivace.

Kalibrační teorie jsou vždy invariantní vůči grupě kalibračních transformací. V našem případě se jedná o transformace zachovávající skalární součin $\psi\,\bar{\psi}$. Čili kalibrační transformace tvoří v každém prostoročasovém bodě grupu $U(1)$.

Standardní model – současná teorie elementárních částic – je vystaven právě na základě teorie kalibračních polí. Kalibrační i hmotová pole jsou v tomto případě již složitější než jednoduché elektromagnetické a skalární pole. Nicméně např. s interakčními členy vstupujícími do akce skrze zobecněnou kovariantní derivaci $\mathcal{D}$ se v obecné teorii budeme setkávat.