

Proseminář z teoretické fyziky - NOFY070

Zápočtový problém

Termín odevzdání: **21.4.2025**

Odevzdávejte pomocí SISu (modul Studijní mezivýsledky)
(nouzově emailem na adresu ota@matfyz.cz nebo na přednášce)

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako správné nebo jako neúplné.
Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

- a) Nalezněte Greenovu funkci $G(x, y)$ operátoru $\frac{d^2}{dx^2} + 2i\beta \frac{d}{dx} + (\omega^2 - \beta^2)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vyhovující Dirichletovým okrajovým podmínkám¹. Tedy nalezněte řešení rovnice (i je imag. jednotka a $\beta, \omega \in \mathbb{R}$)

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, y) + 2i\beta \frac{d}{dx}G(x, y) + (\omega^2 - \beta^2)G(x, y) = \delta(x - y), \quad x, y \in \langle 0, 1 \rangle$$

splňující

$$G(0, y) = G(1, y) = 0.$$

- b) Proveďte limitu Greenovy funkce pro $\omega \rightarrow 0$ a získejte novou Greenovu funkci

$$G_0(x, y) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(x, y)$$

Ověřte, že splňuje Dirichletovy okr. podmínky.

- c) Nalezněte řešení rovnice

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) + 2i\beta \frac{d}{dx}f(x) - \beta^2 f(x) = x^2$$

splňující Dirichletovy okr. podmínky na $\langle 0, 1 \rangle$, které je dané vztahem

$$f(x) = \int_0^1 G_0(x, y)y^2 dy,$$

- d) Pravou stranu a reálnou i imaginární část výsledku vykreslete nebo načrtněte (např. pro $\beta = 7$ apod.).

¹Jde o samozdružený operátor, protože $(\frac{d}{dx})^\dagger = -\frac{d}{dx}$ (porovnejte s pravidlem pro derivování distribucí založeným na regularních distribucích působících prostřednictvím integrálu, tedy vlastně skalárního součinu funkcí).