

Proseminář teoretické fyziky

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

RNDr. Otakar Svítek, Ph.D.

NTMF029 LS: 0/2 Z – jaro 2025

Zápočtový problém č. 2

Řešení úkolu bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

Termín odevzdání 2. zápočtového problému je 19. května 2025.

Pozdější odevzdání řešení s sebou ponese pozdější udělení zápočtu. Odevzdání během zkouškového období je možné pouze tak, aby se kontrola a možné opravy stihly do 30. června 2025.

Uvažujeme komplexní pole ψ , tj. skalární pole nabývající hodnoty v komplexních číslech. Toto pole bude možné interpretovat jako nabitě pole náboje $+e$. S tímto polem máme přirozeně asociované komplexně sdružené pole $\bar{\psi}$ náboje $-e$, které též nazýváme antipolem.

Ač jsou pole ψ a antipole $\bar{\psi}$ navzájem komplexně sdružená, lze je často chápat jako relativně nezávislá skalární pole. Důvodem je, že pole ψ ve skutečnosti obsahuje dvě nezávislé reálné komponenty – svojí reálnou a imaginární část. Uvažování polí ψ a $\bar{\psi}$ nezávisle umožňuje vlastně přístup k oběma reálným složkám.

Na těchto polích můžeme definovat tzv. kalibrační kovariantní derivaci zahrnující interakci nabitých polí s elektromagnetickým polem popsáním vektorovým 4-potenciálem A_μ . Na pole náboje $+e$ působí derivace $\mathcal{D}_\mu$ předpisem

$$\mathcal{D}\psi = \nabla\psi - ieA_\mu\psi$$

a na antipole s nábojem $-e$ působí derivace $\bar{\mathcal{D}}_\mu$ jako

$$\bar{\mathcal{D}}\bar{\psi} = \nabla\bar{\psi} + ieA_\mu\bar{\psi}.$$

Často se derivace $\mathcal{D}$ a $\bar{\mathcal{D}}$ shodně nazývají $\mathcal{D}$ a implicitně se předpokládá, že v členu se 4-potenciálem je vždy použit správný náboj podle pole, na které derivace působí.

Dynamika nabitých polí ψ a $\bar{\psi}$ a jejich interakce s elektromagnetickým polem je zachycena akcí

$$S_{\text{NP}}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = - \int_{\Omega} \left[\eta^{\mu\nu} \mathcal{D}_\mu\psi \bar{\mathcal{D}}_\nu\bar{\psi} + m^2 \psi \bar{\psi} \right] d^4\Omega.$$

Zde $\eta_{\mu\nu}$ je Minkowského metrika a uvažujeme volbu jednotek $c = 1$.

- (i) Variací akce podle pole ψ a antipole $\bar{\psi}$ nalezněte pohybové rovnice pro obě pole.

Při variování podle komplexního pole vyjádřete změnu akce δS jako lineární kombinaci malých změn $\delta\psi$ a $\delta\bar{\psi}$,

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[(\dots) \delta\psi + (\dots) \delta\bar{\psi} \right] d^4\Omega.$$

Koeficienty u $\delta\psi$ a $\delta\bar{\psi}$ pak považujte za variace $\frac{\delta S}{\delta\psi}$ a $\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}}$.

Oddiskutujte, že obě výsledné pohybové rovnice jsou navzájem konzistentní.

- (ii) Variací akce vektorového 4-potenciálu A_μ nalezněte elektrický 4-tok nesený společně poli ψ a $\bar{\psi}$,

$$J_{\text{NP}}^\mu = \frac{\delta S_{\text{NP}}}{\delta A_\mu}.$$

- (iii) Ověřte, že akce je invariantní vůči kalibrační transformaci

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \exp(i e \alpha) \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \tilde{\bar{\psi}} = \exp(-i e \alpha) \bar{\psi}, \quad A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \alpha$$

- (iv) Rozštěpením prostoročasu na čas a prostor nalezněte Lagrangián $L_{\text{NP}}(\psi, \dot{\psi}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}, \phi, \vec{A})$.

Zde je výhodné zavést prostorovou kovariantní derivaci $\vec{\mathcal{D}}\psi$ a kovariantní časovou derivaci $\mathcal{D}_0\psi$,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}\psi &= \vec{\nabla}\psi - i e \vec{A}\psi, & \mathcal{D}_0\psi &= \dot{\psi} + i e \phi \psi, \\ \vec{\mathcal{D}}\bar{\psi} &= \vec{\nabla}\bar{\psi} + i e \vec{A}\bar{\psi}, & \mathcal{D}_0\bar{\psi} &= \dot{\bar{\psi}} - i e \phi \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Pole ϕ a $\vec{A}$ jsou standardní skalární a vektorový potenciál elektromagnetického pole.

- (v) Určete nábojovou hustotu ρ_{NP} a tok náboje $\vec{j}_{\text{NP}}$ asociované s nabitými poli

$$\rho_{\text{NP}} = -\frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \phi}, \quad \vec{j}_{\text{NP}} = \frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \vec{A}}.$$

- (vi) Nalezněte hybnosti polí

$$\pi = \frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \dot{\psi}}, \quad \bar{\pi} = \frac{\delta L_{\text{NP}}}{\delta \dot{\bar{\psi}}}.$$

- (vii) Napište Hamiltonián

$$H_{\text{NP}}(\psi, \pi, \bar{\psi}, \bar{\pi}) = \int_{\Omega} \left[\dot{\psi} \pi + \dot{\bar{\psi}} \bar{\pi} \right] d^4\Omega - L_{\text{NP}}(\psi, \dot{\psi}, \bar{\psi}, \dot{\bar{\psi}}).$$

nabitých polí.

K rozmyšlení navíc (nepovinné):

Pokud budeme uvažovat, že elektromagnetické pole vystupující v akci pro nabitá pole je také dynamické, s akcí S_{EM} uvedenou na přednášce, jaký bude příspěvek polí ψ a $\bar{\psi}$ do Gaussovy vazby G vzniklé při budování hamiltonovského formalismu celého systému polí ψ , $\bar{\psi}$ a A_μ ? Neboli, jaká bude Gaussova vazba v systému s akcí $S = S_{\text{EM}}(A) + S_{\text{NB}}(\psi, \bar{\psi}, A)$? Gaussova vazba zde vznikne zcela stejným způsobem jak bylo diskutováno na přednášce, tj. jako sekundární vazba zajišťující konstantnost primární vazby $\kappa = 0$.

Poznámky na okraj:

Uvedený příklad je nejjednodušší případ interakce tzv. *kalibračního pole* (zde elektromagnetické pole A) s poli hmoty (pole ψ a $\bar{\psi}$).

Kalibrační pole lze místo vektorového 4-potenciálu A popsat též přímo *kalibrační kovariantní derivací* $\mathcal{D}$ na polním prostoru. Z matematického hlediska se jedná o derivaci na *fibrovaném prostoru*. Intenzita kalibračního pole $F_{\mu\nu}$ má pak interpretaci *křivosti* této derivace.

Kalibrační teorie jsou vždy invariantní vůči grupě kalibračních transformací. V našem případě se jedná o transformace zachovávající skalární součin $\psi \bar{\psi}$. Čili kalibrační transformace tvoří v každém prostoročasovém bodě grupu $U(1)$.

Standardní model – současná teorie elementárních částic – je vystaven právě na základě teorie kalibračních polí. Kalibrační i hmotová pole jsou v tomto případě již složitější než jednoduché elektromagnetické a skalární pole. Nicméně např. s interakčními členy vstupujícími do akce skrze zobecněnou kovariantní derivaci $\mathcal{D}$ se v obecné teorii budeme setkávat.