Zápočtová písemka z kvantové teorie II (léto 2025)

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
Fermion se spinem 1/2 je připraven ve stavu se z-složkou spinu rovnou $\frac{1}{2}\hbar$ a boson se spinem 1 ve stavu se z-složkou spinu rovnou 0. V čase $t = 0$ zapneme interakci $\hat{H} = \frac{2}{\hbar}\omega\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}$. Jaká bude redukovaná matice hustoty pro fermion v čase t? Najděte polarizační vektor $\vec{p}$ pro tuto matici hustoty a určete časy, ve kterých se jedná o matici hustoty čistého stavu.

Úloha 2(10 bodů)
Uvažujme izotropní lineární harmonický oscilátor ve 3D s frekvencí ω a hmotností m. Napište, jak na základě Wignerovy-Eckartovy věty, vypadá matice poruchy $V = \lambda xy$ ve vlastním podprostoru odpovídajícím druhému excitovanému stavu $N = 2$ s energií $E = \hbar\omega\frac{7}{2}$. V tomto podprostoru (dimenze 6) můžete vzít bázi ze stacionárních stavů $|Nlm\rangle$ adaptovanou na sférickou symetrii ($l = 0, 2$, $m = -l, ..., l$). Pro vyjádření celé matice 6×6 matice využijte toho, že

$$< 200|xy|222 >= \frac{ix_0^2}{\sqrt{3}}, \qquad\qquad < 220|xy|222 >= -\frac{ix_0^2}{\sqrt{6}}$$

Úloha 3(10 bodů)
Do kvantové čtyřtečky s jednočásticovým hamiltoniánem $\hat{H} = -\hbar\omega(\hat{P} + \hat{P}^\dagger) \otimes \hat{I}_{spin}$, kde $\omega > 0$ a $\hat{P} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 4| + |4\rangle\langle 1|$ vložíme dva elektrony (nerozlišitelné částice se spinem 1/2). Najděte energie všech stacionárních stavů a jejich stupeň degenerace. Řekněme, že tento systém připravíme v prvním excitovaném stavu s celkovým spinem 0. Jaká je pravděpodobnost, že oba elektrony se nacházejí ve stejné kvantové tečce neboli, jaká je střední hodnota dvoučásticového operátoru $\hat{D} = (|11\rangle\langle 11| + |22\rangle\langle 22| + |33\rangle\langle 33| + |44\rangle\langle 44|) \otimes \hat{I}_{spin}$?

Úloha 4(10 bodů)
Mějme dvě kvantové tečty do nichž můžeme vkládat bosony, takže boson v tečce 1 je popsán stavem $|1\rangle = a_1^\dagger|0\rangle$ a boson v tečce 2 stavem $|2\rangle = a_2^\dagger|0\rangle$. Dále definujeme dvoučásticový hamiltonián $H_0 = -A(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)$ a interakci $V = \frac{B}{2}\left(a_1^{\dagger 2} a_1^2 + a_2^{\dagger 2} a_2^2\right)$. Ukažte, že $|\psi_\pm\rangle = C[a_1^\dagger \pm a_2^\dagger]^2|0\rangle$ jsou vlastní stavy H_0 a najděte příslušné energie a normalizační konstantu C. Pro správně normalizované funkce najděte stření hodnotu interakce $\langle\psi_\pm|V|\psi_\pm\rangle$.