Elektrostatika

Formulace elektrostatiky.

Zdrojová a potenciálová rovnice, elektrostatická síla, siločáry a trubice toku, Gaussův zákon. Potenciál, integrální definice, nezávislost na cestě integrování, diferenciální vztah, jednoznačnost potenciálu, Poincarého lema. Poissonova rovnice, Laplaceova rovnice, harmonické funkce. Coulombův zákon, sféricky symetrické zdroje.

Singulární zdroje.

Regulární a singulární zdroje: plošné, lineární a bodovové rozložení náboje. Podmínky navázání pro plošný zdroj. Objemová hustota singulárních zdrojů. Distribuční odvození podmínek navázání v přítomnosti plošného náboje.

Vodiče.

Ideální vodič, indukovaný náboj a pole, podmínky pro potenciál a intenzitu. Vkládání vodiče do pole. Pole u uzemněné vodivé sféry. Pole nabitého elipsoidu, nábojová hustota na elipsoidu. Limita tenkého disku, nábojová hustota na disku. Síla na vodič, rozklad na vlastní a vnější pole.

Laplaceův operátor.

Laplaceův operátor, prostor funkcí na oblasti, okrajové podmínky. Symetrie a positivita Lapalceova operátoru. Harmoniky, věta o střední hodnotě, věta o minimu a maximu, jednoznačnost Poissonovy úlohy, metoda obrazů.

Greenovy funkce.

Greenova funkce Laplaceova operátoru, řešení Poissonovy úlohy. Greenova funkce v celém prostoru. Dirichletova Greenova funkce na oblasti. Poissonova a Laplaceova úloha se zadaným potenciálem na hranici. Greenova reciprocita.

Kapacity.

Systém nabitých vodičů, linearita vztahu potenciálů a nábojů, matice kapacity a její vlastnosti. Matice kapacity pomocí Greenovy funkce. Speciální situace: jeden vodič, obecný kondenzátor, dva vodiče. Vodiče v dutině, matice kapacity pro napětí, stínění.

Rovnice elektrostatiky

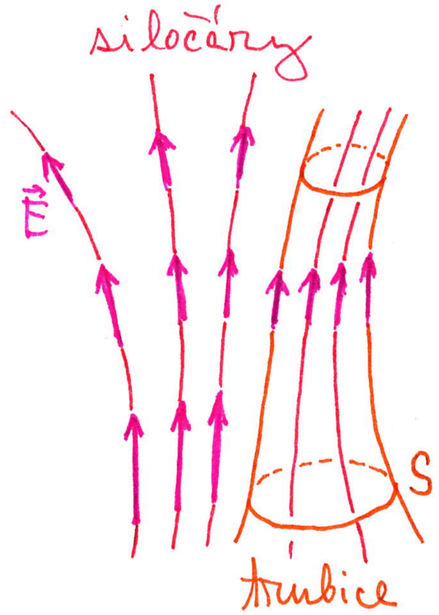
Předpoklady
- žádné časové změny (poznámka o relativitě)
- pouze rozložení náboje

Rovnice

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Síla na náboj

$$\vec{f} = q\vec{E}$$



Siločáry a trubice toku $\vec{E}$

siločáry = orbity vekt. pole $\vec{E}$

trubice toku = trubice sledující siločáry

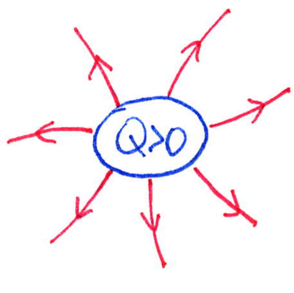
tok $\vec{E}$ $\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ ~ počet siločar skrze S

Gaussův zákon

$$\int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

siločáry vzniklé ve V = náboj

↓ siločáry vznikají na náboji



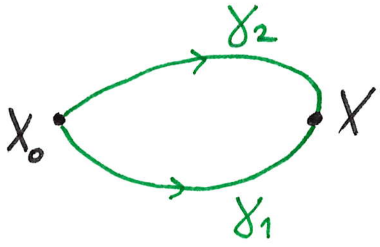
možnost nalézt pole v symetrických situacích → cvičení

Potenciál

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \iff$ cirkulace $\vec{E}$ po uzavřené smyčce $=0$

Stokes: $\int_\lambda \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = 0$

kde S je plocha napnutá na smyčku λ [pokud lze napnout]



$\lambda = \gamma_1 - \gamma_2 \qquad 0 = \int_\lambda \vec{E}\cdot d\vec{s}$

$\Downarrow$

$$\int_{\gamma_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$\Downarrow$

veličina $\int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s}$ nezávisí na cestě γ ale jen na koncových bodech

$\Downarrow$

lze zavést

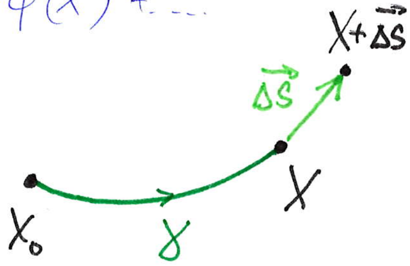
$$\phi(X) - \phi(X_0) = -\int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$\phi(X_0)$ ← zvolená hodnota; γ ← libovolné

inverzní vztah

zkoumejme $\phi(X+\Delta\vec{s}) = \phi(X) + \Delta\vec{s}\cdot\vec{\nabla}\phi(X) + \dots$

$$\phi(X+\Delta\vec{s}) - \phi(X_0) = -\int_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{s} - \vec{E}(X)\cdot\Delta\vec{s}$$



$\Downarrow$

$$\vec{E}(X) = -\vec{\nabla}\phi(X)$$

srovnej s Newtonovým vzorcem

jednoznačnost

ϕ je daný až na konstantu (volba $\phi(X_0)$)

Poincareho lemma

$\vec{E}$ je potenciálové $\iff \vec{\nabla}\times\vec{E}=0$

$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$

"$\Rightarrow$" vždy $(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi=0)$ — viz ▽ výše

"$\Leftarrow$" na topologicky jednoduchých prostorech → cvičení

Rovnice pro potenciál

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

$\Downarrow$

$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$ Poissonova rovnice

$\Delta = \nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ Laplaceův operátor

$\Delta\phi = 0$ harmonické funkce (harmoniky)

Coulombův zákon

sféricky symetrický zdroj $\varrho(r)$

bez zdroje nad poloměrem r_0 $\varrho(r) = 0 \quad r > r_0$

celkový náboj Q $\int \varrho \, dV = Q$

sféricky symetrické pole $\vec{E}$

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$$

Gaussův zákon pro kouli $r > r_0$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}Q = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int \varrho \, dV}_{\text{koule o poloměru } r} = \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{povrch koule o poloměru } r} = E(r)\int dS = 4\pi r^2 E(r)$$

$\Downarrow$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \qquad r > r_0$$

pole okolo sféricky symetrického zdroje

lehce ověříme, že pro $r > r_0$

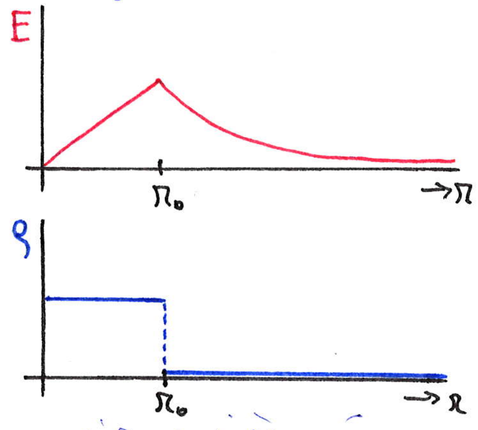
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Singulární zdroje

Sféricky symetrické situace (pokračování)

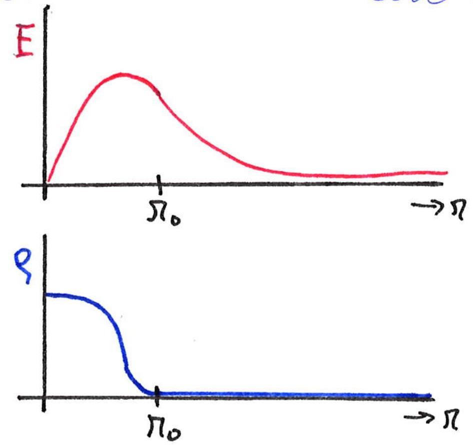
jak vypadá pole uvnitř zdroje?

homogenně nabitá koule



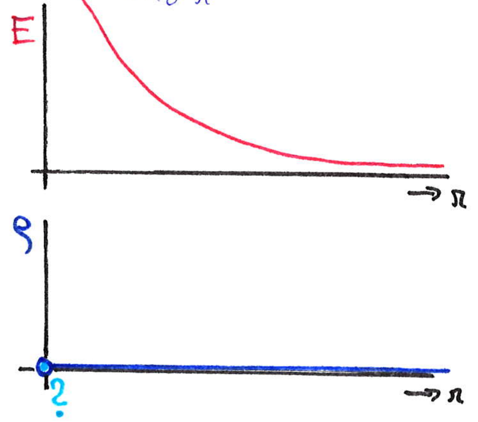
viz cvičení

obecně nabitá koule



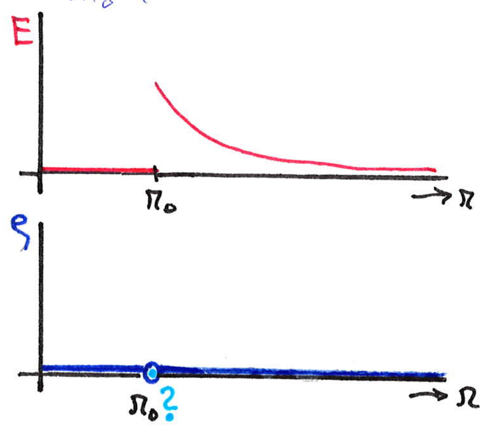
kde je náboj lokalizován pro pole:

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \quad r > 0$



bodový náboj v počátku

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r \quad r > r_0 \qquad \vec{E} = 0 \quad r < r_0$



plošný náboj na sféře $r = r_0$

Regulární zdroj (3D)

objemová hustota ϱ spojitě rozložená v prostoru

$\vec{E}$ spojité nesingulární

celkový náboj v objemu V

$$Q = \int_V \varrho \, dV$$

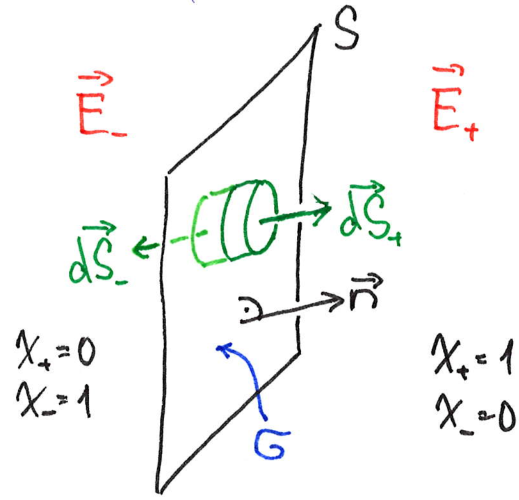
Plošný zdroj (2D)

plošná hustota σ rozložená na ploše S

$\vec{E}$ nespojité na S

celkový náboj na S

$$Q = \int_S \sigma \, dS$$



podmínky navázání

$$\vec{E} = \vec{E}_- \chi_- + \vec{E}_+ \chi_+$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \Rightarrow$ výtok = náboj

$$\vec{E}_- \cdot d\vec{S}_- + \vec{E}_+ \cdot d\vec{S}_+ = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \, dS \qquad d\vec{S}_+ = - d\vec{S}_- = \vec{n} \, dS$$

$\Downarrow$

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$$

nespojitost normálové složky $\vec{E}$ velikosti $\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ + Stokes $\Rightarrow$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0$$

spojitost tečných složek $\vec{E}$

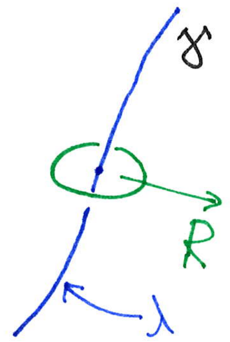
odvodíme níže pomocí distribucí

Lineární zdroj (1D)

lineární hustota λ rozložená na křivce γ

$\vec{E}$ singulární na λ

$$\vec{E} \sim \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}\vec{e}_R$$



viz cvičení pro nabitou úsečku
a nabitou přímku

celkový náboj na γ

$$Q = \int_\gamma \lambda \, ds$$

Bodový zdroj (0D)

bodové náboje q_k v bodech X_k

$\vec{E}$ singulární v X_k

$$\vec{E}(X) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r(X|X_k)^2}\vec{e}_r(X|X_k)$$

celkový náboj

$$Q = \sum_{q_k} q_k$$

Objemová hustota singulárních zdrojů

3D regulární zdroj

ϱ_{3D} nesingulární funkce

2D plošný zdroj na S

$\varrho_{2D} = \sigma\,\delta_S$ resp. $\varrho_{2D}(X) = \sigma(X)\,\delta_S(X)$

definované na S

$$\int \psi\,\varrho_{2D}\,dV = \int \psi\,\sigma\,\delta_S\,dV = \int_S \psi\,\sigma\,dS$$

1D lineární zdroj na γ

$\varrho_{1D} = \lambda\,\delta_\gamma$ resp. $\varrho_{1D}(X) = \lambda(X)\,\delta_\gamma(X)$

definované na γ

$$\int \psi\,\varrho_{1D}\,dV = \int \psi\,\lambda\,\delta_\gamma\,dV = \int_\gamma \psi\,\lambda\,ds$$

0D bodové zdroje v X_k

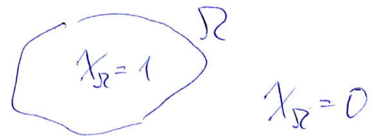
$\varrho_{0D} = \sum_k q_k\,\delta_{X_k}$ resp. $\varrho_{0D}(X) = \sum_k q_k\,\delta_{X_k}(X)$

$$\int \psi\,\varrho_{0D}\,dV = \sum_k \int \psi\,q_k\,\delta_{X_k}\,dV = \sum_k \psi(X_k)\,q_k$$

Podmínky navázání na ploše

distribuční derivace charakt. fce

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$



$$\vec\nabla \chi_\Omega = ?$$

distribuční derivace – zhlazení testovací funkce

$$\int (\vec\nabla \chi_\Omega)\cdot\vec\varphi \, dV \overset{def}{=} -\int \chi_\Omega (\vec\nabla\cdot\vec\varphi)\, dV = -\int_\Omega \vec\nabla\cdot\vec\varphi \, dV \overset{G.V.}{=} \int_{\partial\Omega} \vec\varphi\cdot\vec n \, dS$$

↑ vnitřní norm

$$= \int \vec\varphi\cdot\vec n \, \delta_{\partial\Omega}\, dV$$

$$\Downarrow$$

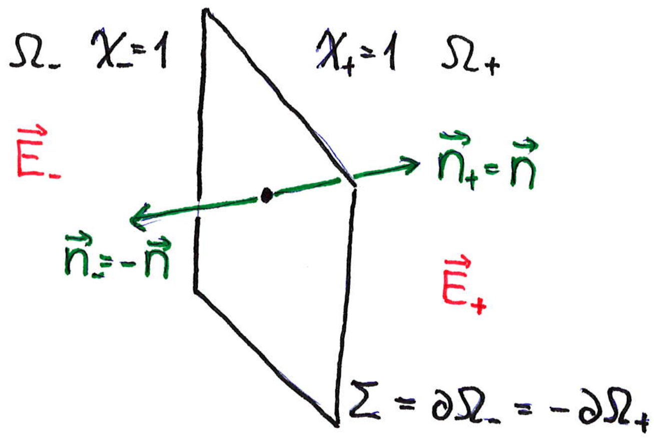
$$\vec\nabla \chi_\Omega = \vec n \, \delta_{\partial\Omega}$$ $\vec n$ normála do oblasti (směr růstu χ_Ω)

derivace pole nespojitého na ploše

$$\vec E = \chi_- \vec E_- + \chi_+ \vec E_+$$

prototyp nespojitého pole na ploše Σ

$\vec E_\pm$ hladké



distribuční derivace:

$$\vec\nabla\times\vec E = \chi_- \vec\nabla\times\vec E_- + \chi_+ \vec\nabla\times\vec E_+ + (\vec\nabla\chi_-)\times\vec E_- + (\vec\nabla\chi_+)\times\vec E_+$$

$$= \chi_- \vec\nabla\times\vec E_- + \chi_+ \vec\nabla\times\vec E_+ + \delta_\Sigma \, \vec n \times (\vec E_+ - \vec E_-)\big|_\Sigma$$

$$\vec\nabla\times\vec E = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec\nabla\times\vec E_\pm = 0 \ \text{v}\ \Omega_\pm \qquad \vec n\times(\vec E_+ - \vec E_-)\big|_\Sigma = 0$$

$$\vec\nabla\cdot\vec E = \chi_- \vec\nabla\cdot\vec E_- + \chi_+ \vec\nabla\cdot\vec E_+ + (\vec\nabla\chi_-)\cdot\vec E_- + (\vec\nabla\chi_+)\cdot\vec E_+$$

$$= \underbrace{\chi_- \vec\nabla\cdot\vec E_- + \chi_+ \vec\nabla\cdot\vec E_+}_{\text{3D lokalizace}} + \underbrace{\delta_\Sigma \, \vec n\cdot(\vec E_+ - \vec E_-)\big|_\Sigma}_{\text{2D lokalizace na } \Sigma}$$

$$\underset{\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{3D}+\rho_{2D})}{\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \quad\Rightarrow\quad \chi_-\vec\nabla\cdot\vec E_- + \chi_+\vec\nabla\cdot\vec E_+ = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_{3D} \qquad \underset{\rho_{2D} = \sigma\,\delta_\Sigma}{\vec n\cdot(\vec E_+ - \vec E_-)\big|_\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma}$$

Plošný zdroj - distribuční odvození

singulární hustotu lokalizovanou na ploše a podmínky navázání lze odvodit přímým distribučním výpočtem

$$\vec{E} = \chi_- \vec{E}_- + \chi_+ \vec{E}_+$$

zvolíme souřadnice tak, aby

$$S \Leftrightarrow \xi^3 = \xi^3_0 \equiv 0$$

$$\chi_+ = \Theta(\xi^3) \qquad \chi_- = \Theta(-\xi^3)$$

rovnice $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \left(\Theta(\xi^3) \vec{E}_+ + \Theta(-\xi^3) \vec{E}_- \right) =$$

$$= \Theta(\xi^3) \vec{\nabla} \times \vec{E}_+ + \Theta(-\xi^3) \vec{\nabla} \times \vec{E}_- + \delta(\xi^3) \vec{\nabla} \xi^3 \times \vec{E}_+ - \delta(\xi^3) \vec{\nabla} \xi^3 \times \vec{E}_-$$

$$= \chi_+ \vec{\nabla} \times \vec{E}_+ + \chi_- \vec{\nabla} \times \vec{E}_- + \frac{1}{h_3} \delta(\xi^3)\, \vec{e}_3 \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

$$= \chi_+ \vec{\nabla} \times \vec{E}_+ + \chi_- \vec{\nabla} \times \vec{E}_- + \delta_S\, \vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

$$= 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_+ = 0 \quad \text{v } V_+ \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_- = 0 \quad \text{v } V_-$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0 \quad \text{na } S$$

rovnice $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\Theta(\xi^3) \vec{E}_+ + \Theta(-\xi^3) \vec{E}_- \right) =$$

$$= \Theta(\xi^3) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_+ + \Theta(-\xi^3) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_- + \frac{1}{h_3} \delta(\xi^3)\, \vec{e}_3 \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

$$= \underbrace{\chi_+ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_+ + \chi_- \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_-}_{\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_{3D}} + \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)\, \delta_S}_{\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_{2D}}$$

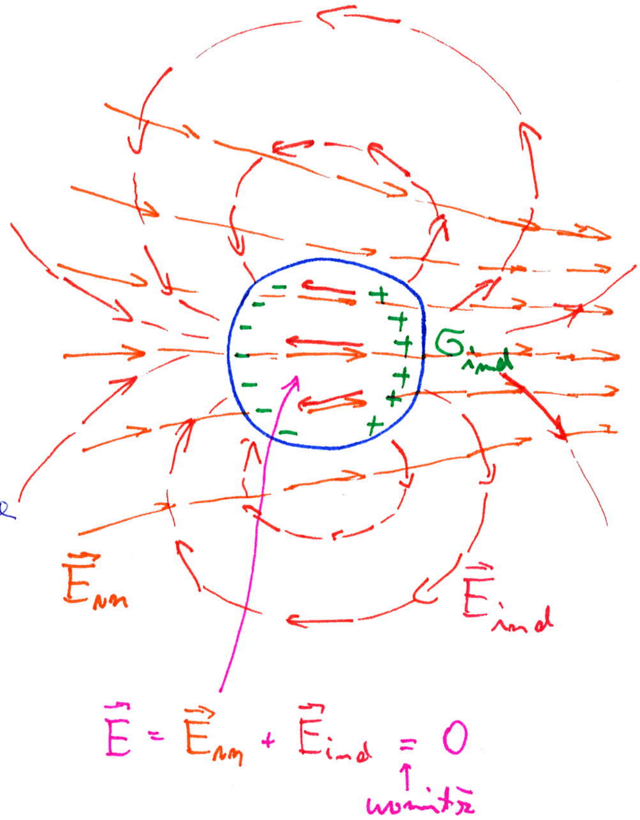
$$\Downarrow$$

$$\sigma = \vec{n} \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-)$$

Vodiče

ideální vodič – obsahuje volné pohyblivé náboje – ty se pod vlivem $\vec{E}$ přemisťují až na okraj vodiče a vytvářejí indukované pole

vytváří se rovnovážné situace kdy uvnitř vodiče není $\vec{E}$



$$\vec{E} = \vec{E}_{vn} + \vec{E}_{ind}$$

$$\vec{E}\Big|_{uvnitř} = 0 \qquad \phi\Big|_{uvnitř} = konst$$

indukovaná hustota náboje a podmínky navázání

Gaussův zákon pro váleček okolo povrchu

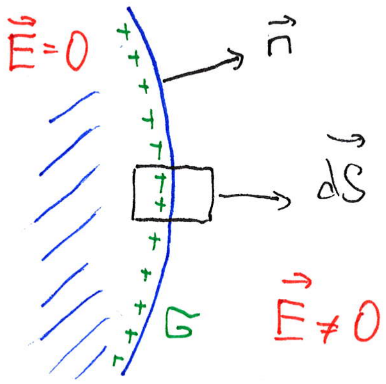
$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \sigma \, dS$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{n} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$\vec{n}$ vnější normála vodiče

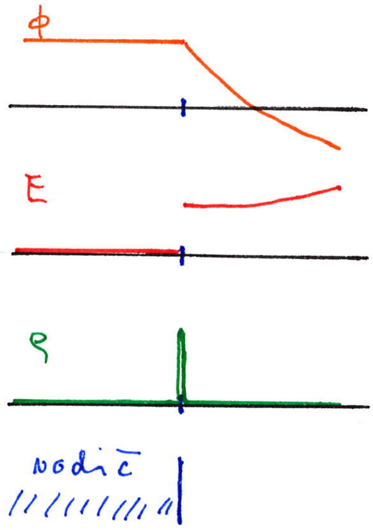


uzemněný vodič

vodič spojený s oblastí nulového potenciálu

→ vynutí si podmínku

$$\phi\Big|_{vodič} = 0$$



Vložení vodiče do pole

obecně vložení jak uzemněného, tak izolovaného vodiče změní pole nejen uvnitř vodiče, ale i vně vodiče

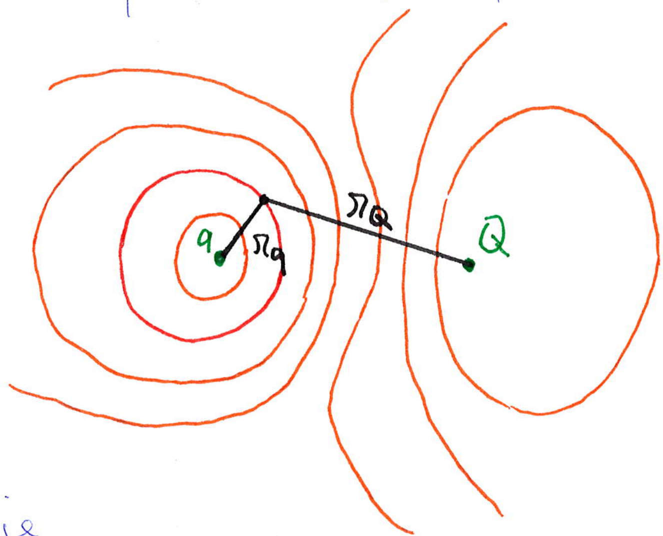
vodič "vynutí" splnění podmínek na hranici

vnější pole se nezmění, pokud vložíme vodič na ekvipotenciálu o odpovídajícím potenciálem

Př: pole 2 nábojů

existuje sférická ekvipotenciála $\phi = 0$

Apolóniova kružnice



$$\frac{r_q}{r_Q} = \frac{q}{Q} = konst$$

$\Downarrow$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_q} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_Q} = 0$$

dostáváme pole náboje u uzemněné vodivé sféry

Př Pole elipsoidu

oblé elipsoidální souřadnice

$$x = a \operatorname{ch}\eta \sin\psi \cos\varphi \qquad h_\eta = a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}$$
$$y = a \operatorname{ch}\eta \sin\psi \sin\varphi \qquad h_\psi = a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}$$
$$z = a \operatorname{sh}\eta \cos\psi . \qquad h_\varphi = a \cdot \operatorname{ch}\eta \sin\psi$$

hledejme potenciál závislý pouze na η

$$\phi = \phi(\eta)$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_\eta h_\psi h_\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\psi h_\varphi}{h_\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\psi}\cancelto{0}{\frac{\partial\phi}{\partial\psi}}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h_\eta h_\psi}{h_\varphi}\cancelto{0}{\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{a^2(\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi)\operatorname{ch}\eta}\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{ch}\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)$$

$$\Delta\phi = 0 \iff \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\operatorname{ch}\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) = 0 \iff \operatorname{ch}\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta} = K$$

$$\phi = K\int\frac{1}{\operatorname{ch}\eta}d\eta = K\int\frac{\operatorname{ch}\eta}{1+\operatorname{sh}^2\eta}d\eta \underset{\xi=\operatorname{sh}\eta}{=} K\int\frac{1}{1+\xi^2}d\xi = K\arctan\operatorname{sh}\eta + L$$

$$\phi|_\infty = K\arctan(\infty) + L = 0 \Rightarrow L = -K\frac{\pi}{2}$$

$\Downarrow$

$$\phi = K\left(\arctan\operatorname{sh}\eta - \frac{\pi}{2}\right) \iff \tan\left(\phi/K + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sh}\eta$$

Lobačevského transformace

$$\operatorname{sh}\eta = \tan\alpha \qquad \operatorname{ch}\eta = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{th}\eta = \sin\alpha \qquad \operatorname{th}\frac{\eta}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\vec{e}_\eta = -\frac{K}{a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}\,\operatorname{ch}\eta}\vec{e}_\eta$$

náboj viděný z nekonečna

$$\frac{1}{\varepsilon_0}Q = \int_{\eta=\text{konst}}\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int\frac{K}{h_\eta\operatorname{ch}\eta}h_\psi \underbrace{h_\varphi}_{a\operatorname{ch}\eta\sin\psi} d\psi\, d\varphi = -aK\underbrace{\int\sin\psi\, d\psi\, d\varphi}_{4\pi} = -4\pi a K$$

$\Downarrow$

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left(\arctan\operatorname{sh}\eta - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \operatorname{ch}\eta = \frac{r_+ + r_-}{2a} \qquad \sin\psi = \frac{r_+ - r_-}{2a}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta - \sin^2\psi}\,\operatorname{ch}\eta}\vec{e}_\eta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\sqrt{r_- r_+}\,(r_- + r_+)}\vec{e}_\eta$$

vodivý elipsoid na $\eta = \eta_0 = \text{konst} \Rightarrow$

$$\sigma = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta_0 - \sin^2\psi}\,\operatorname{ch}\eta_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{2Q}{\sqrt{r_- r_+}\,(r_- + r_+)}\Big|_{\eta=\eta_0}$$

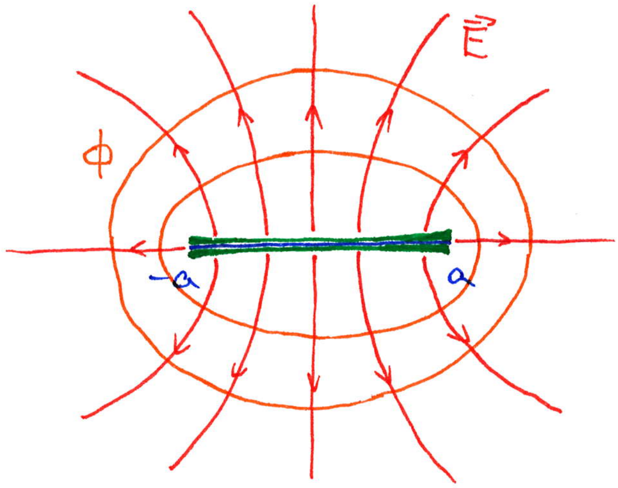
Limita tenkého disku

$\eta_0 \to 0$ elipsoid $\to$ disk $z=0$ $R \leq a$

nábojová hustota - příspěvek z obou stran disku

$$\sigma_{disk} = \frac{2}{4\pi}\frac{Q}{a^2}\frac{1}{\cos\psi} = \frac{2}{4\pi}\frac{Q}{a\sqrt{r_- r_+}}$$

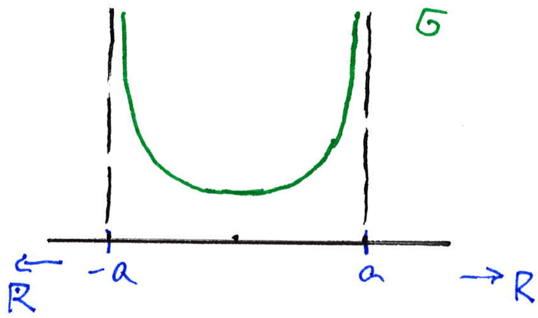
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{Q}{a\sqrt{a^2-R^2}} \quad \Leftarrow \quad r_\pm = a \pm R$$



$$\phi_{disk} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\frac{\pi}{2}$$

kapacita (viz dále)

$$C_{disk} = \frac{Q}{\phi_{disk}} = 8\varepsilon_0 a$$



Síla na vodič

náboj rozmístěný na povrchu vodiče

$\vec{E}$ je zde nespojitá

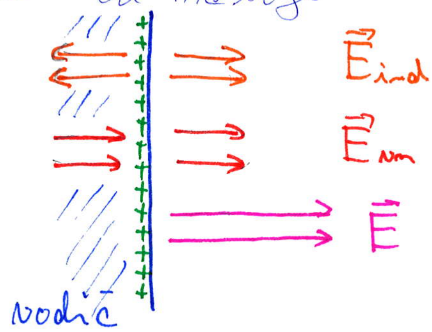
jaké působí na náboj síla?

rozklad na vnější pole a pole indukované

$$\vec{E} = \vec{E}_{vn} + \vec{E}_{ind}$$

indukované lokální vrstvou náboje

dostatečně blízko hranici vodiče lze aproximovat rovinou a pole homogenním polem od náboje



$$\vec{E}_{ind} = -\chi_- E_{ind}\,\vec{n} + \chi_+ E_{ind}\,\vec{n}$$

$$\vec{E}_{vn} = \chi_- E_{vn}\,\vec{n} + \chi_+ E_{vn}\,\vec{n}$$

$$\vec{E} = 0 + \chi_+ \vec{E}$$

$\Downarrow$

$$\vec{E}_{ind} = \frac{1}{2}\left(-\chi_- \vec{E} + \chi_+ \vec{E}\right)$$

$$\vec{E}_{vn} = \frac{1}{2}\vec{E}$$

síla pouze od vnějšího pole

$$\Delta\vec{f} = \Delta q\,\vec{E}_{vn} = \Delta S\,\sigma\,\frac{1}{2}E\,\vec{n} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,\vec{n}\,\Delta S$$

$$\frac{\Delta\vec{f}}{\Delta S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,\vec{n}$$

E velikost pole těsně vně vodiče

$\vec{n}$ vnější normála vodiče

Laplaceův operátor

Laplaceův operátor Δ

$L = -\Delta : \quad f \to g = -\Delta f$

lze chápat též jako "funkcionální matici" $L(X|X')$

$$g(X) = \int L(X|X')\, f(X')\, dV'$$

↑ tzv. integrální jádro operátoru

lze chápat distribučně $L(X|X') = -\Delta\delta(X|X')$

lze zobecnit některé vlastnosti konečných matic

- nutno se omezit na vhodné prostory přípustných funkcí
- potřebujeme linearitu a jednoznačnost

⇓

nutno specifikovat okrajové podmínky

standardní volby: pro funkce na omezené oblasti V

Dirichletovy podmínky – $\phi|_{\partial V} = 0$

Neumanovy podmínky – $\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0$

Robinsonovy podmínky – $\left(\phi + \alpha \frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\Big|_{\partial V} = 0$ $\quad \alpha$ fce na ∂V, $\alpha \geq 0$

pro neomezenou oblast

Dirichletovy podmínky – dostatečně rychlé klesání do nekonečna

všechny podmínky jsou lineární

f, g splňuje $\Rightarrow$ $f+g$ splňuje

Skalární součin na funkcích v oblasti V

$$(f, g) = \int_V f(X)\, g(X)\, dV$$

Symetrie Laplaceova operátoru

$$(\Delta\phi, \psi) = (\phi, \Delta\psi)$$

důkaz

$$(\Delta\phi,\psi) - (\phi,\Delta\psi) = \int_V \left((\vec\nabla^2\phi)\psi - \phi(\vec\nabla^2\psi)\right) dV = \text{Greenova věta}$$

$$= \int_{\partial V} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\psi - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS = 0$$

$= 0$ pro Dirichletovy podm.

$= 0$ pro Neumannovy podm.

$$= \int_{\partial V} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\underbrace{\left(\psi + \alpha\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) - \left(\phi + \alpha\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\frac{\partial\psi}{\partial n}}_{\text{stejné} \to \text{vyruší se}}\right) dS = 0 \quad \text{pro Robinsonovy pd.}$$

k symetrii jsou potřeba okrajové podmínky!

Positivita Laplaceova operátoru

$(\phi, -\Delta\phi) \geq 0$ tj $-\Delta$ je positivně definitní

důkaz:

$$(\phi,-\Delta\phi) = -\int_V \phi\,\vec\nabla\cdot\vec\nabla\phi\, dV = -\int_V \vec\nabla\cdot(\phi\vec\nabla\phi)\, dV + \int_V (\vec\nabla\phi)\cdot(\vec\nabla\phi)\, dV$$

$$= -\int_{\partial V} \phi\frac{\partial\phi}{\partial n} dS + \int_V \underbrace{(\vec\nabla\phi)\cdot(\vec\nabla\phi)}_{\geq 0 \;\Leftarrow\; \text{positivita sk. souč.}} dV$$

$= 0$ Neumann

$= 0$ Dirichlet

$$= -\int_{\partial V} \underbrace{\left(\phi + \alpha\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)}_{=0 \text{ Robinson}}\frac{\partial\phi}{\partial n} dS + \underbrace{\int_{\partial V} \alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2 dS}_{\geq 0 \text{ Robinson}} + \int_V \underbrace{(\vec\nabla\phi)\cdot(\vec\nabla\phi)}_{\geq 0} dV$$

Pozn.:
Pro Neumannovy podmínky existují "nulové" módy $\phi = \text{konst}$ pro které $(\phi, -\Delta\phi) = 0$
Nutno diskutovat zvlášť!

Věta o střední hodnotě řešení Laplaceovy úlohy

ϕ řešení Laplac. úlohy $\qquad \Delta\phi = 0$ na V

$\Downarrow$ $\quad \phi_\varnothing = \phi(P)$

kde $\phi_\varnothing$ je střední hodnota ϕ na kouli o středu P

$$\phi_\varnothing = \frac{1}{4\pi r^2}\int \phi \, dS$$

povrch koule K o středu P a poloměru r

důkaz:

$\phi_\varnothing$ jako funkce poloměru koule

$$\frac{d}{dr}\phi_\varnothing = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial K} \phi \, dS\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{4\pi}\int \phi \, d\Omega\right] = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial\phi}{\partial r}\, d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial K} \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS$$

$dS = r^2 d\Omega$; prostorový úhel ; prostorový úhel ; závislost na r pouze ve ϕ, $\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial n}$; $d\Omega = \frac{1}{r^2} dS$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\int_K \nabla^2\phi \, dV = 0$$

ϕ řeší $\Delta\phi = 0$

$\Downarrow$

$\phi_\varnothing = $ konst (nezávislé na poloměru)

pro $r \to 0 \quad \phi_\varnothing \to \phi(P)$

$\Downarrow$

$\phi_\varnothing = \phi(P)$

Př: 1D

$$\Delta\phi = \frac{d^2}{dx^2}\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi = ax + b$$ lineární závislost

$$\phi_\varnothing = \frac{1}{2}\left[(a(x_0+r)+b) + (a(x_0-r)+b)\right] = ax_0 + b$$ koule o středu x_0

Př:
lze použít pro hledání řešení Laplaceovy úlohy
tzv. metoda relaxace
zvolí se vhodný počáteční odhad řešení na mřížce
a pak se průměruje přes sousedy a postupně konverguje
k řešení $\qquad$ viz např. Jackson

Věta o extrému řešení Laplaceovy úlohy

$\Delta\phi = 0$ v oblasti V

$\Downarrow$ ϕ nabývá minima a maxima na hranici ∂V

důkaz:

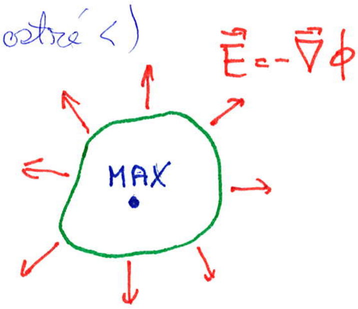
nechť ϕ má maximum v P uvnitř V

$\Rightarrow$ v blízkém okolí $\phi(X) \leq \phi(P)$ (alespoň někde ostré $<$)

$\Rightarrow$ $\phi_\varnothing < \phi(P)$ spor

též $\vec{n}\cdot\nabla\phi > 0$ v tomto okolí

$\Rightarrow$ $0 < \int_{\partial V} \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla^2\phi\, dV = 0$ spor



Jednoznačnost Laplaceovy a Poissonovy úlohy s fixními hodnotami na okraji

$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$ $\quad\varrho$ zadaná fce ve V

$\phi|_{\partial V} = \Phi$ $\quad\Phi$ zadaná fce na hranici ∂V

$\Downarrow$

ϕ je dáno jednoznačně

důkaz

ϕ_1, ϕ_2 dvě řešení se stejnými hodnotami na okraji

$\Downarrow$ $\psi = \phi_2 - \phi_1$ splňuje

$-\Delta\psi = 0$ ve V

$\psi|_{\partial V} = 0$

$\Downarrow$ ψ má minimum a maximum na hranici ∂V

ale $\psi = 0$ na ∂V $\Rightarrow$ $\psi = 0$ všude ve V

$\Downarrow$ $\phi_1 = \phi_2$ jednoznačnost

Řešení Poissonovy úlohy v $\mathbb{E}^3$

coulombické pole pro jednotkový náboj

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|X-X'|}$$

$$-\Delta\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{r(X|X')} = \delta(X|X')$$

Řešení pro zadaný náboj v $\mathbb{E}^3$ $\qquad -\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$

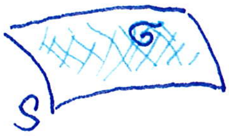
coulombické pole = superpozice příspěvků od jednotkových nábojů

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r(X|X')}\,\underbrace{\varrho(X')\,dV'}_{dq'}$$

pro singulární rozložení náboje

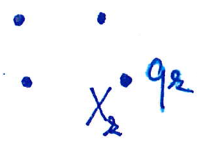
$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r(X|X')}\,\varrho_{3D}(X')\,dV' \qquad \varrho_{3D} \text{ regulární}$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{1}{r(X|X')}\,\sigma(X')\,dS' \qquad \varrho_{2D} = \sigma\,\delta_S$$



$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\gamma \frac{1}{r(X|X')}\,\lambda(X')\,ds' \qquad \varrho_{1D} = \lambda\,\delta_\gamma$$

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{r(X|X_k)} \qquad \varrho_{0D} = \sum_k q_k\,\delta_{X_k}$$



Metoda fiktivních nábojů (obrazů)

řešíme úlohu

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_{\text{uvnitř}\,V} \qquad \text{v oblasti } V$$

$$\phi|_{\partial V} = \Phi \qquad \text{podmínky na hranici } \partial V \qquad (*)$$

triviální pozorování:

pokud nalezneme jakoukoli konfiguraci zdrojů v celém prostoru $\mathbb{E}^3$ které vytvoří uvnitř V pole splňující $(*)$, jedná se o řešení naší úlohy

pozorování:

pole získané pomocí $\mathbb{E}^3$ Greenovy fce (Coulombické pole) od nábojů uvnitř V typicky nesplňuje podmínky na hranici

$$\phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{uvnitř}}}(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r(X|X')}\varrho_{\text{uvnitř}}(X')\,dV' \qquad (\text{viz Greenovy fce v } \mathbb{E}^3)$$

$$\phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{uvnitř}}}\Big|_{\partial V} \neq \Phi$$

přidáme vhodné zdroje $\varrho_{\text{vně}}$ vně oblasti V tak, aby coulombické pole všech zdrojů splňovalo podmínky na ∂V

$$\phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{vně}}}(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r(X|X')}\varrho_{\text{vně}}(X')\,dV'$$

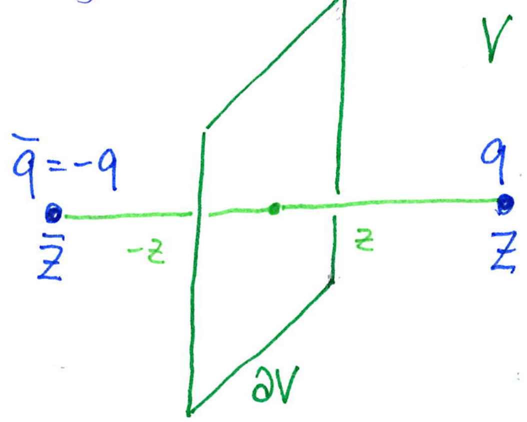
$$\phi(X) = \phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{uvnitř}}}(X) + \phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{vně}}}(X)$$

$$\phi|_{\partial V} = \Big(\phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{uvnitř}}} + \phi_{\substack{\text{zdroj}\\\text{vně}}}\Big)\Big|_{\partial V} = \Phi \qquad \text{na hranici } \partial V$$

pro $\Phi = 0$ jsou zdroje vně jisté "obrazy" zdrojů uvnitř "zrcadlící se" přes hranici ∂V

Př: úloha v poloprostoru s okrajovou podmínkou $\Phi = 0$

ke každému náboji ve V musíme přidat jeho zrcadlový obraz s opačným nábojem



$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\underbrace{\frac{q}{r(X|z)}}_{\text{uvnitř}} - \underbrace{\frac{q}{r(X|\bar{z})}}_{\text{vně}}\Big]$$

Greenovy funkce

Greenova funkce Laplaceova operátoru

Laplace je positivně definitní symetrická (funkcionální) matice existuje symetrická inverze G

$$-\Delta G(x|x') = \delta(x|x') \qquad \text{ve } V$$

tj. $L \cdot G = \delta$ $\qquad \int_V L(x|x'')\, G(x''|x')\, dV'' = \delta(x|x')$

Greenova funkce musí splňovat okrajové podmínky

$G(x|x') = 0 \qquad x \in \partial V \quad x' \in V \qquad$ (Dirichlet)

$G(x|x') = 0 \qquad x \in V \quad x' \in \partial V$

Greenova fce je symetrická

$$G(x|x') = G(x'|x)$$

Pozn.:

Greenova fce je hladká mimo "diagonály" $x = x'$

$G(x|x')$ pro $x, x' \in \partial V$ má distribuční charakter

pro Neumannovy podmínky nutno řešit "nulové módy"

Řešení Poissonovy úlohy

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \text{ve } V$$

$$\phi|_{\partial V} = 0$$

má řešení dané "superpozicí bodových nábojů"

$$\phi(x) = \int_V G(x|x')\, \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\, dV'$$

důkaz:

$$-\Delta\phi(x) = \int_V (-\Delta G)(x|x')\, \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\, dV' = \int_V \delta(x|x')\, \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\, dV'$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x)$$

$$\phi(x)\Big|_{x\in\partial V} = \int_V G(x|x')\, \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\, dV'\Big|_{x\in\partial V} = 0$$

Greenova funkce v $\mathbb{E}^3$

pro celý prostor $\mathbb{E}^3$ Greenovu funkci známe

$$G(X|X') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|X-X'|}$$

$$G(X|X') = G(X'|X)$$

$G(X|X') \to 0$ pro $X \to \infty$ "dostatečně rychle"

Dirichletova Greenova funkce v oblasti s hranicí

oblast V a nulové okrajové podmínky

$$-\Delta G_V(X|X') = \delta(X|X') \quad \text{ve } V$$

$$G_V(X|X') = 0 \quad \text{pro } X \in \partial V \quad X' \in V$$

řešení Poissonovy úlohy

$$\phi(X) = \int_V G_V(X|X') \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(X')\, dV'$$

vztah ke Greenově funkci $G(X|X') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(X|X')}$ v E^3

$$G_V(X|X') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(X|X')} + H(X|X')$$

aplikace $-\Delta$ =>

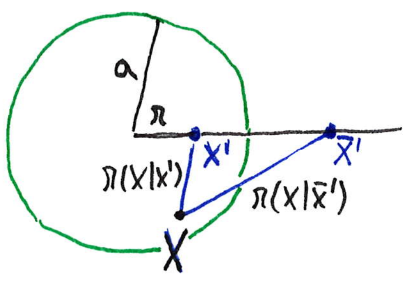
$$\Delta H(X|X') = 0 \quad \text{pro } X, X' \in V$$

H je řešení Laplaceovy úlohy takové, aby G_V splňovalo okrajové podmínky na ∂V

H je pole vnějších "obrazů" zdrojů zrcadlících se přes hranici ∂V

Př: viz cvičení

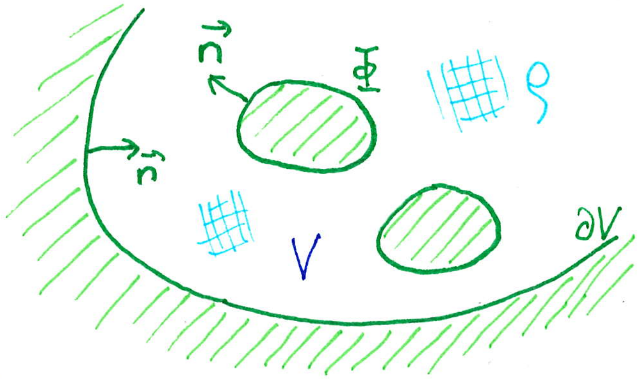
- poloprostor - viz dříve $\quad G_V(X|X') = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(X|X')} - \frac{1}{r(X|\bar{X}')}\right]$
- válec
- "racionální" klín
- vrstva
- koule - viz dříve $\quad G_V(X|X') = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(X|X')} - \frac{a/r}{r(X|\bar{X}')}\right]$
- kulová vrstva



Poissonova úloha se zadanou hodnotou na hranici

$$-\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \text{ve } V$$

$$\phi\big|_{\partial V} = \Phi \qquad \text{na hranici } \partial V$$



řešení je dáno

$$\phi(x) = \int_V G_V(x|x')\,\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\,dV' + \int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial n'}G_V(x|x')\,\Phi(x')\,dS$$

$\vec{n}$ vnitřní normála

důkaz:

nechť $x \in V$ Greenova věta pro $\phi(x')$ a $\psi(x') = G_V(x|x')$

$$\int_V \Big[G_V(x|x')\,\underbrace{\Delta\phi(x')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')} - \underbrace{\Delta' G_V(x|x')}_{-\delta(x|x')}\,\phi(x') \Big]\,dV' =$$

$$= \int_{\partial V} \Big(-\underbrace{G_V(x|x')}_{=0}\frac{\partial\phi}{\partial n'}(x') + \frac{\partial}{\partial n'}G_V(x|x')\,\underbrace{\phi(x')}_{\Phi(x')} \Big)\,dS'$$

$\Downarrow$

$$-\int_V G_V(x|x')\,\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\,dV' + \int_V \delta(x|x')\,\phi(x')\,dV = \int_{\partial V}\frac{\partial}{\partial n'}G_V(x|x')\,\Phi(x')\,dS'$$

$\Downarrow$

$$\phi(x) = \int_V G_V(x|x')\,\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x')\,dV' + \int_{\partial V}\frac{\partial}{\partial n'}G_V(x|x')\,\Phi(x')\,dS'$$

Laplaceova úloha se zadanou hodnotou na hranici

pro $\varrho = 0$ dostáváme Laplaceovu úlohu

$$\Delta\bar{\phi} = 0 \qquad \text{ve } V$$

$$\bar{\phi}\big|_{\partial V} = \Phi \qquad \text{na hranici } \partial V$$

$\Downarrow$

$$\bar{\phi}(x) = \int_{\partial V}\frac{\partial}{\partial n'}G_V(x|x')\,\Phi(x')\,dS'$$

pro $x \to \partial V$ dostáváme distribuční limitu

$$\frac{\partial}{\partial n'}G_V(x|x') = \delta(x|x') \qquad \text{na hranici } \partial V$$

Greenova reciprocita

mějme dvě rozložení náboje a příslušné potenciály

$\varrho_1 \ \phi_1$ a $\varrho_2 \ \phi_2$

pak platí

$$\int \varrho_1 \phi_2 \, dV = \int \varrho_2 \phi_1 \, dV$$

důkaz

přímý důsledek symetrie Greenovy funkce

$G(X|X') = G(X'|X)$

ověření

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{X_1} \int_{X_2} \varrho_1(X_1) \, G(X_1|X_2) \, \varrho_2(X_2) \, dV_1 \, dV_2 =$$

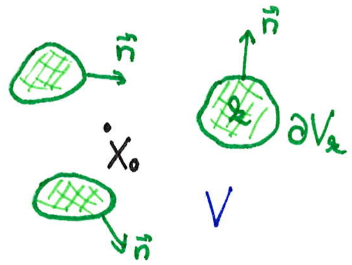
$$= \int_{X_1} \varrho_1(X_1) \, \phi_2(X_1) \, dV_1 = \int_{X_2} \phi_1(X_2) \, \varrho_2(X_1) \, dV_2$$

aplikace na bodové náboje

ϕ pole nábojů q_k v bodech X_k

ϕ' pole nábojů $q'_{k'}$ v bodech $X'_{k'}$

$$\sum_k q_k \phi'(X_k) = \sum_{k'} q'_{k'} \phi(X'_{k'})$$



aplikace na nabité vodiče

rozložení 1:

$\varrho = \varepsilon_0 \delta_{X_0} + \sum_k \sigma^0_k \delta_{\partial V_k}$ kde $\sigma^0_k = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\partial V_k} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial n} G_V(X|X_0)\Big|_{X \in \partial V}$

ϕ = pole od ϱ takové, že $\phi|_{\partial V_k} = 0$ tj. $\phi(X) = \int_V G_V(X|X') \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(X') \, dV' = G_V(X|X_0)$

rozložení 2:

$\bar{\varrho} = \sum_k \bar{\sigma}_k \delta_{\partial V_k}$ kde $\bar{\sigma}_k = -\varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}\Big|_{\partial V_k}$

$\bar{\phi}$ = pole bez zdroje mezi vodiči splňující $\bar{\phi}|_{\partial V_k} = \Phi_k$ = konst

Greenova reciprocita $\int \bar{\varrho} \phi \, dV = \int \varrho \bar{\phi} \, dV \Rightarrow$

$$\sum_k \int_{\partial V_k} \bar{\sigma}_k \underbrace{\phi}_{0} \, dS = \int \delta_{X_0} \bar{\phi} \, dV + \sum_k \int_{\partial V_k} \sigma^0_k \underbrace{\bar{\phi}}_{\Phi_k} \, dS = \bar{\phi}(X_0) - \sum_k \Phi_k \int_{\partial V_k} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} G_V(X_0|\bar{X}) \, d\bar{S}$$

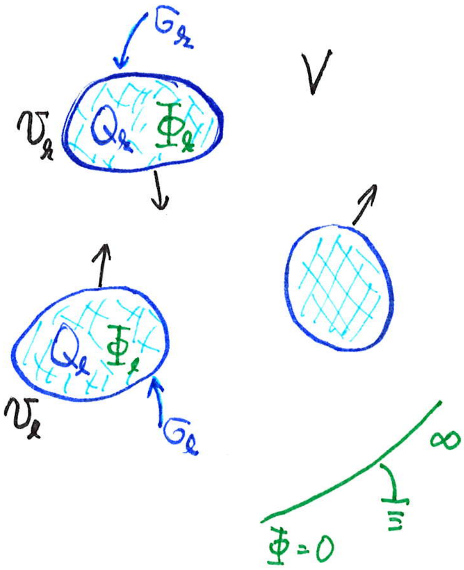
$\Downarrow$

$$\bar{\phi}(X) = \sum_k \Phi_k \int_{\partial V_k} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} G_V(X|\bar{X}) \, d\bar{S}$$

Kapacity

Systém nabitých vodičů

předepsané náboje na vodičích



vodič V_k :

potenciál Φ_k $\qquad \phi|_{\partial V_k} = \Phi_k$

celkový náboj Q_k $\qquad Q_k = \int_{\partial V_k} \sigma_k \, dS$

hustota náboje σ_k $\qquad \sigma_k = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_{\partial V_k}$

mezi vodiči

žádný náboj $\qquad \Delta\phi = 0$

v nekonečnu

$\phi \to 0$

vztah Q_k a Φ_k je lineární

1) situace $\Phi_l = 0 \quad l \neq k_0$

škálování Φ_{k_0} → škálování ϕ → škálování σ_l → škálování Q_l

2) obecná situace - superpozice případu výše

⇓

$$Q_k = \sum_l C_{kl} \Phi_l$$

C_{kk} kapacitance

C_{kl} elektrostatické indukce } matice kapacity

platí

$[C_{kl}]$ nedegenerovaná matice ⇐ viz násl. strana

C_{kl} symetrické ⇐ vyjádření pomocí Greenovy fce

$[C_{kl}]$ positivně definitní ⇐ positivita energie (později)

$C_{kk} > 0 \quad C_{kl} < 0 \quad k \neq l$ ⇐ Gaussova věta - viz níže

inverze

$$\Phi_k = \sum_l C^{-1}_{kl} Q_l$$

zadání Q_k určuje Φ_k tj. i řešení $\phi(x)$

Nedegenerovanost matice kapacity

předpokládejme dvě rozložení potenciálů $\overset{(1)}{\Phi}_k$ a $\overset{(2)}{\Phi}_k$ dávající stejné celkové náboje Q_k na vodičích (degenerovanost C_{kl})

$$Q_k = \sum_l C_{kl} \overset{(1)}{\Phi}_l \qquad Q_k = \sum_l C_{kl} \overset{(2)}{\Phi}_l$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \sum_l C_{kl} \Psi_l \qquad \text{kde} \quad \Psi_l = \overset{(1)}{\Phi}_l - \overset{(2)}{\Phi}_l$$

hodnoty Ψ_k jsou okrajové podmínky pro homogenní řešení ψ

$$\Delta \psi = 0 \qquad \psi|_{\partial V_k} = \Psi_k \qquad \psi = \overset{(1)}{\phi} - \overset{(2)}{\phi}$$

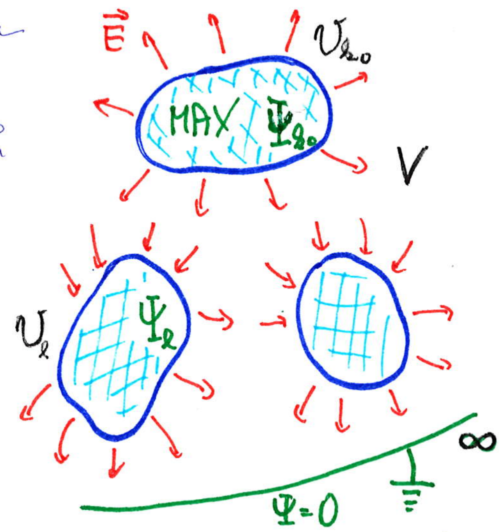
příslušné náboje na vodičích V_k jsou nulové

předpokládáme též $\overset{(1)}{\phi}, \overset{(2)}{\phi}|_\infty = 0 \Rightarrow \psi|_\infty = 0$

uvažujme ψ na oblasti V (vyjmuté vodiče V_k)

minimum a maximum ψ musí být na hranici ∂V

tj. buď v nekonečnu či na ∂V_k



1) minimum i maximum v nekonečnu

$\Rightarrow \psi = 0 \quad \Rightarrow \overset{(1)}{\Phi}_k = \overset{(2)}{\Phi}_k$

nejedná se o různá rozložení potenciálů

2) minimum či maximum je na ∂V_{k_0}

uvažujme např. maximum

Ψ_{k_0} maximum $\Rightarrow$

$\vec{E}|_{\partial V_{k_0}}$ míří všude ven z vodiče $\Rightarrow$

$\sigma|_{\partial V_{k_0}} > 0 \Rightarrow$

$Q_{k_0} > 0$

což je spor s tím, že Q_{k_0} odpovídající ψ má být nulové

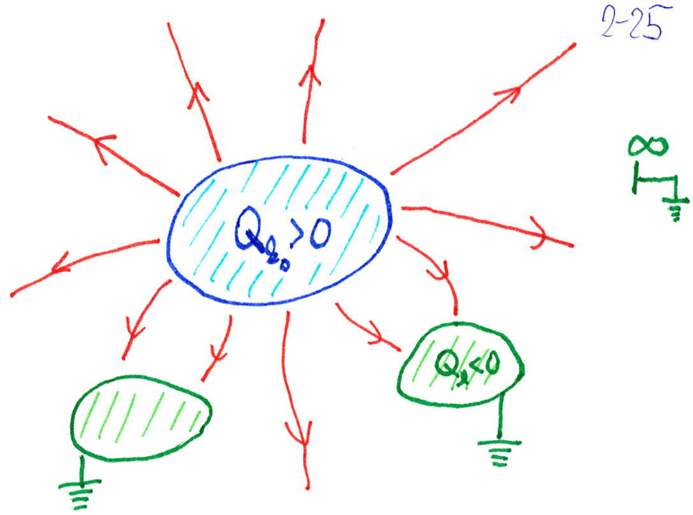
Znaménka C_{kk} a C_{kl}

$$Q_k = \sum_l C_{kl} \Phi_l$$

situace $\Phi_l = 0 \quad l \neq k_0 \Rightarrow$

$$Q_{k_0} = C_{k_0 k_0} \Phi_{k_0}$$

$$Q_l = C_{l k_0} \Phi_{k_0}$$



- siločáry odcházejí z V_{k_0} a vedou do V_l $l \neq k_0$ nebo nekonečna
- Gaussův zákon $\Rightarrow$ odcházející siločáry $= Q_{k_0} > 0$, Φ_{k_0} maximální

$\Rightarrow C_{k_0 k_0} > 0$

- siločáry nevedou z V_m na V_n nebo do nekonečna $m \neq n$ $m, n \neq k_0$

protože V_l $l \neq k_0$ a nekonečno mají stejný potenciál $\phi = 0$

- na V_l $l \neq k_0$ pouze končí siločáry z V_{k_0}

$\Rightarrow C_{l k_0} < 0$

Matice kapacity pomocí Greenovy funkce

veškerý náboj je na povrchu vodičů $\Rightarrow$

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \int_{\partial V_k} \frac{1}{r(X|X')} \sigma_k(X')\, dS'$$

nevýhodné, protože neznáme rozložení σ_k, pouze celkové Q_k

vyjádření pomocí potenciálu na hranici

$$\phi(X) = \sum_l \left[\int_{\partial V_l} \frac{\partial}{\partial n'} G_V(X|X')\, dS' \right] \Phi_l \qquad X \in V$$

G_V Dirichletova Greenova fce pro oblast V mezi vodiči

Φ_l konstantní potenciál na vodiči $\Rightarrow$ lze vytknout z integrálu

indukovaná hustota náboje na ∂V_k

$$\sigma_k = - \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\partial V_k}$$

celkový náboj na V_k

$$Q_k = \int_{\partial V_k} \sigma_k\, dS = - \varepsilon_0 \sum_l \left[\int_{\partial V_k} \int_{\partial V_l} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n'} G_V(X|X')\, dS'\, dS \;\; \Phi_l \right]$$

$\Downarrow$

$$C_{kl} = - \varepsilon_0 \int_{\partial V_k} \int_{\partial V_l} \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n'} G_V(X|X')\, dS'\, dS$$

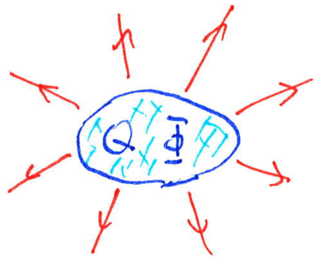
$\Downarrow$

$C_{kl} = C_{lk}$ symetrické

Speciální situace

1) jeden vodič
(kapacita vůči nekonečnu)

$$Q = C\,\Phi$$
└ kapacita vodiče



2) obecný kondenzátor
dva vodiče o nábojích $+Q$ a $-Q$
napětí = rozdíl potenciálů

$$V = \Phi_+ - \Phi_-$$

kapacita kondenzátoru C

$$Q = C V$$

souvislost s maticí kapacity

$$\Phi_+ = C^{-1}_{++} Q - C^{-1}_{+-} Q$$

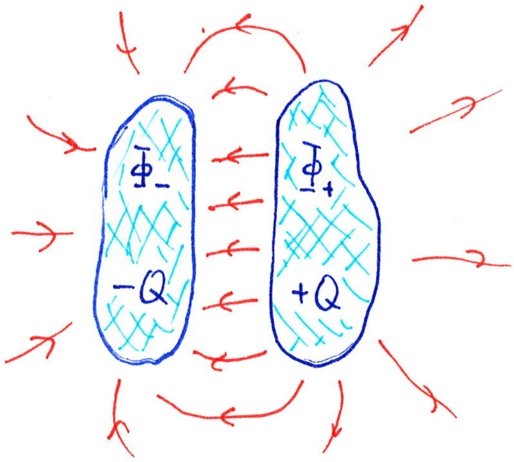
$$\Phi_- = C^{-1}_{-+} Q - C^{-1}_{--} Q$$

$$\Downarrow \quad V = \left(C^{-1}_{++} + C^{-1}_{--} - 2C^{-1}_{+-}\right) Q$$

$$\Downarrow \quad C^{-1} = C^{-1}_{++} + C^{-1}_{--} - 2C^{-1}_{+-} =$$

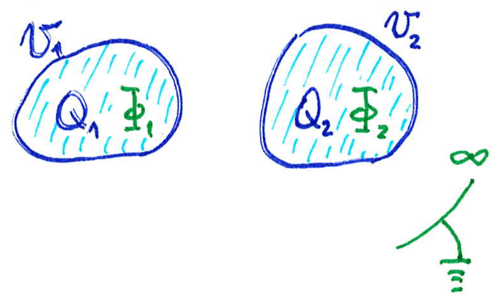
$$= \frac{C_{--}}{\Delta} + \frac{C_{++}}{\Delta} + 2\,\frac{C_{+-}}{\Delta} \qquad \text{kde } \Delta = C_{--}C_{++} - C_{+-}^2$$

$$\Downarrow \quad C = \frac{C_{++}C_{--} - C_{+-}^2}{C_{++} + C_{--} + 2C_{+-}}$$



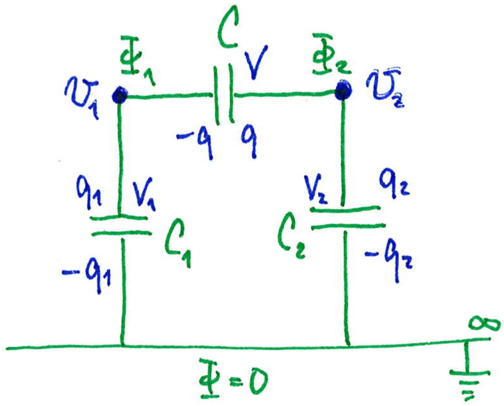
3) dva vodiče

obecný systém 2 vodičů lze popsat náhradním schématem 3 kondenzátorů



vztah potenciálů na napětí

$$V_1 = \Phi_1 \qquad V_2 = \Phi_2 \qquad V = \Phi_2 - \Phi_1$$



vztah nábojů na vodičích a na kondenzátorech

$$Q_1 = q_1 - q \qquad Q_2 = q + q_2$$

kondenzátory

$$q_1 = C_1 V \qquad q_2 = C_2 V \qquad q = CV$$

matice kapacity

$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 = q_1 - q = C_1 V_1 - C(V_2 - V_1)$$

$$Q_2 = C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 = q_2 + q = C_2 V_2 + C(V_2 - V_1)$$

$\Downarrow$

$$C_{11}\Phi_1 + C_{12}\Phi_2 = (C + C_1)\Phi_1 - C\Phi_2$$

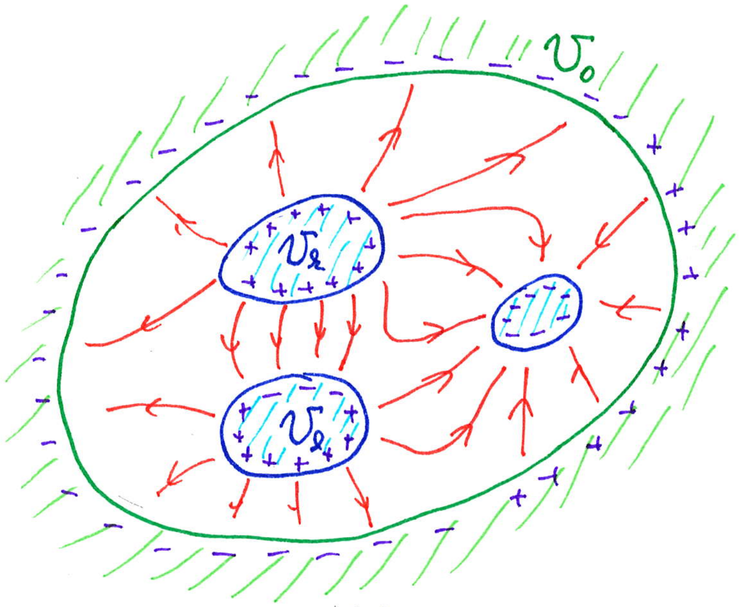
$$C_{21}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 = (C + C_2)\Phi_2 - C\Phi_1$$

$\Downarrow$

$$C_{12} = C_{21} = -C$$

$$C_{11} = C_1 + C \qquad C_{22} = C_2 + C$$

Vodiče v dutině



mějme vodiče $\mathcal{V}_k$ $k=1,2,\ldots$
vložené do vnějšího vodiče $\mathcal{V}_0$

náboj na vnějším vodiči $\mathcal{V}_0$
není nezávislý

$$0=\int_V \Delta\phi \, dV = \int_{\partial V} \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial n}}_{\sim\sigma} dS$$

$$\Downarrow$$

$$0 = Q_0 + \sum_k Q_k$$

žádná siločára nemůže uniknout z dutiny V

ϕ není daný náboji Q_k jednoznačně
(nemáme fixované $\phi=0$ v nekonečnu)

$\phi = \text{konst.}$ je konzistentní řešení pro $Q_k = Q_0 = 0$

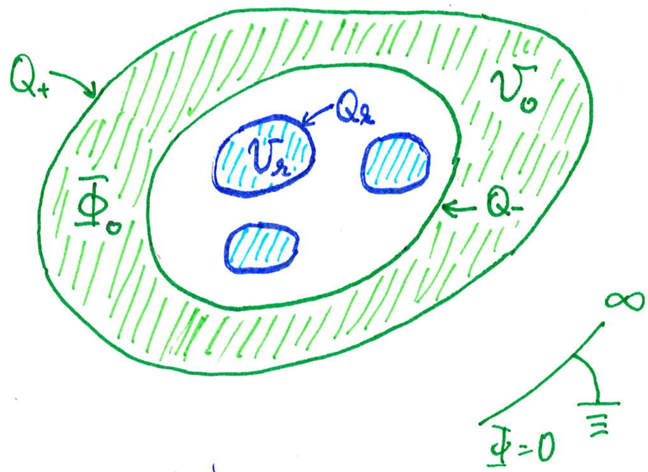
lze řešit úlohu pro napětí mezi vnitřními vodiči
a vnějším vodičem

$$V_k = \Phi_k - \Phi_0$$

konstantní řešení se stává triviální — $\Phi_k = \text{konst} \Rightarrow V_k = 0$

matice kapacity pro napětí

$$Q_k = \sum_l \check{C}_{kl} V_l \qquad k,l \neq 0$$



vnější oblast vodiče V_0

celkový náboj na V_0

$$Q_0 = Q_+ + Q_-$$

Q_- náboj na hranici dutiny

Q_+ náboj na vnější hranici V_0

$$Q_- = -\sum_{\ell} Q_\ell$$

ℓ — vodiče uvnitř

náboj viděný z vnějšku (Gaussova věta)

$$Q_+ = Q_0 + \sum_\ell Q_\ell$$

vnější kapacita vodiče V_0

$$Q_+ = C_+ \Phi_0$$

potenciály

$$\Phi_k = \Phi_0 + V_k$$

stínění

vnější pole (např. to generované Q_+) nijak neovlivní pole v dutině

⇓ konstantní potenciál stejný na všech vodičích odpovídá nulovému náboji na vodičích v dutině

$$\Phi_k = \Phi_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_k = 0$$

⇓

$$0 = \left(C_{k0} + \sum_\ell C_{k\ell}\right)\Phi_0 \quad \Rightarrow \quad C_{k0} + \sum_\ell C_{k\ell} = 0$$

celková matice kapacity v obecné situaci

$$Q_0 = C_{00}\Phi_0 + \sum_\ell C_{0\ell}\Phi_\ell = \left(C_{00} + \sum_\ell C_{0\ell}\right)\Phi_0 + \sum_\ell C_{0\ell} V_\ell$$

$$Q_k = C_{k0}\Phi_0 + \sum_\ell C_{k\ell}\Phi_\ell = \underbrace{\left(C_{k0} + \sum_\ell C_{0\ell}\right)}_{=0}\Phi_0 + \sum_\ell C_{k\ell} V_\ell$$

⇓

$$Q_+ - \sum_\ell Q_\ell = \left(C_{00} - \sum_{k\ell} C_{k\ell}\right)\Phi_0 - \sum_k \underbrace{\sum_\ell C_{k\ell} V_\ell}_{Q_k}$$

⇓

$$Q_+ = \left(C_{00} - \sum_{k\ell} C_{k\ell}\right)\Phi_0 = C_+\Phi_0$$

$$Q_k = \sum_\ell C_{k\ell} V_\ell = \sum_\ell \breve{C}_{k\ell} V_\ell$$

⇓

$$C_{00} = C_+ + \sum_{k\ell} \breve{C}_{k\ell}$$

$$C_{0k} = C_{k0} = -\sum_\ell \breve{C}_{k\ell}$$

$$C_{k\ell} = \breve{C}_{k\ell}$$

vztah plné matice kapacity a matice kapacity pro napětí uvnitř dutiny + vnější kapacity vodiče V_0