Elektrostatika – pokročilé metody

Multipólový rozvoj.

Monopól. Dipól, potenciál, intenzita, nábojová hustota, síla na dipól ve vnějším poli. Vzdálené pole nábojů, monopól, dipól, kvadrupól. Nábojové momenty, tenzorové multipóly, příklady. Rozvoj do Legendreových polynomů a sférických harmonik, sférické multipóly. Axiálně symetrická situace, rozvoj potenciálu podle osy.

Rozklad do systému funkcí.

Báze v prostoru funkcí. Prostor řešení Laplaceovy úlohy, vlastní funkce operátoru, systémy vlastních funkcí, ortonormalita a úplnost, komplexní funkce. Příklad v 1D - Fourierova transformace na intervalu a reálné ose.

Metoda separace proměnných.

Separace proměnných, multiplikaticní separabilní ansatz, separační konstanty. Separace v kartézských souřadnicích. Laplaceova úloha v kvádru, nenulový potenciál na jedné stěně, výběr funkcí, koeficienty v rozvoji jako Fourierova transformace potenciálu na okraji. Separace ve sférických souřadnicích, separace radiální a úhlových souřadnic, radiální závislost, separace úhlových proměnných, zobecněná Legendreova rovnice, kulové funkce. Relace ortogonality a úplnosti kulových funkcí.

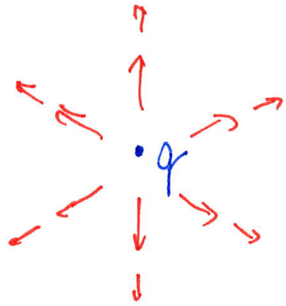
Rozklad do vlastních funkcí.

Báze vlastních funkcí, funkce operátoru, integrální jádro Laplaceova operátoru, Greenovy funkce a δ-funkce. Dirichletova Greenova funkce v uzemněném kvádru.

Multipólový rozvoj

Monopól

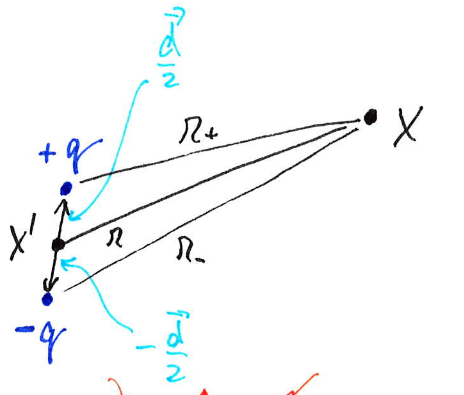
$\phi_{mon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ $\quad \vec{E}_{mon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}$ $\quad \rho_{mon} = q\,\delta$



síla na monopól ve vnějším poli

$\vec{F}_{na\,mon} = q\vec{E}$

Dipól



pole dvou blízkých opačných nábojů

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec d}{2}\cdot\left(\vec\nabla'\frac{1}{r} + \vec\nabla'\frac{1}{r}\right)$$

Taylorův rozvoj
absolutní člen se ruší

$X_+ = X' + \frac{\vec d}{2}$ $\quad X_- = X' - \frac{\vec d}{2}$

$r(X|X')$

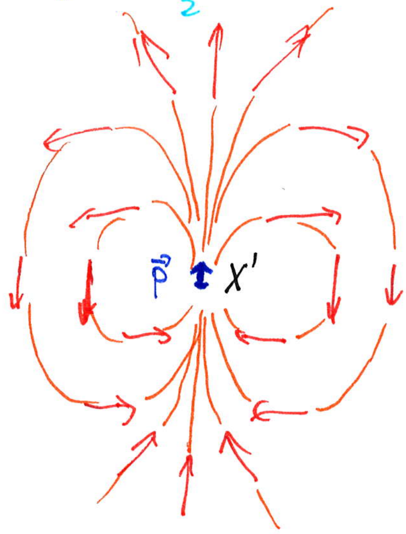
– od náboje
– od členu $-\frac{\vec d}{2}$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\vec d\cdot\frac{\vec e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec p\cdot\vec e}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec p\cdot\vec\nabla\frac{1}{r}$$

kde $\vec p = q\vec d$ v limitě $d\to 0$

$r(X|X') = \sqrt{\Delta x^a \Delta x^b g_{ab}}$ $\qquad \Delta x^a = x^a - x'^a \equiv r^a$

$\vec\nabla' r = -\vec e$ $\qquad \vec\nabla'\vec r = -\mathbf{g}$ $\qquad \nabla'_a r_b = -g_{ab}$



intenzita

$$\vec E = -\vec\nabla\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec\nabla\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec\nabla\vec\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\vec p$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\vec p\cdot\vec e\,\vec e - \vec p\right) - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec p\,\delta_{X'}$$

viz distribuční derivování výrazu $\frac{1}{r}$

nábojová hustota

$$\varrho_{dip}(X) = \varepsilon_0\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla^2\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\vec p = \frac{1}{4\pi}\vec p\cdot\vec\nabla\underbrace{\left(\Delta\frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\delta_{X'}(X)} = -\vec p\cdot\vec\nabla\delta_{X'}(X)$$

lze získat i z definice dipólu jako dvou blízkých nábojů

$$\varrho_{dip}(X) = \varrho_{mon\,X_+}(X) - \varrho_{mon\,X_-}(X) = q\left(\delta(X|X_+) - \delta(X|X_-)\right) = q\vec d\cdot\vec\nabla'\delta(X|X') = -\vec p\cdot\vec\nabla\delta(X|X')$$

díky $\vec\nabla'\delta(X|X') = -\vec\nabla\delta(X|X') \Leftarrow \delta(X|X') = \delta(X-X')$

síla na dipól ve vnějším poli

$$\vec F_{dip} = q\vec E(X_+) - q\vec E(X_-) = \underbrace{q\vec d}_{\vec p}\cdot\vec\nabla\vec E(X) \qquad X_\pm = X \pm \frac{\vec d}{2}$$

$$= (\vec\nabla\vec E)\cdot\vec p + \vec p\cdot(\vec\nabla\vec E) - (\vec\nabla\vec E)\cdot\vec p =$$

$$= \vec\nabla(\vec E\cdot\vec p) - \vec p\times\underbrace{(\vec\nabla\times\vec E)}_{0} = \vec\nabla(\vec E\cdot\vec p)$$

distribučně

$$\vec F_{dip} = \int\vec E\,\varrho_{dip}\,dV = -\int\vec E\,\vec p\cdot\vec\nabla\delta_X\,dV \underset{\uparrow}{=} \int\vec p\cdot(\vec\nabla\vec E)\,\delta_X\,dV = \vec p\cdot\vec\nabla\vec E$$

per partes + $\vec p$ = konst $\qquad$ dál už jako výše

Vzdálené pole systému nábojů

předpokládáme lokalizované rozložení náboje

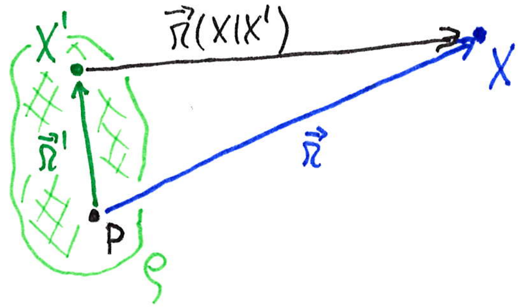
$\varrho(P+\vec{r}\,')$ nenulové jen pro malé $\vec{r}\,'$

zajímá nás pole daleko od nábojů

$\phi(P+\vec{r})$ pro velká r

budeme zkoumat rozvoj

$\frac{r'}{r} \ll 1$



potenciál nábojového rozložení

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r(X|X')}\,\varrho(X')\,dV'$$

rozvoj členu $\frac{1}{r(X|X')}$ v argumentu $X' = P+\vec{r}\,'$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{r}(X|P) + r'^a\Big(\nabla'_a\frac{1}{r}\Big)(X|P) + \frac{1}{2}r'^a r'^b\Big(\nabla'_a\nabla'_b\frac{1}{r}\Big)(X|P) + \dots$$

výpočet:

$$\nabla'_a r = -\frac{r_a}{r} = -e_a \qquad \nabla'_a r_b = -g_{ab} \qquad \Leftarrow \quad r^a(X|X') = x^a - x'^a \qquad r(X|X') = |X-X'| = |\vec{r}(X|X')|$$

$\Downarrow$

$l=0 \qquad \frac{1}{r}$

$$\vec{\nabla}'\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{\nabla}'r = \frac{1}{r^3}\vec{r}$$

$l=1 \qquad \nabla'_a\frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}r_a = \frac{1}{r^2}e_a$

$$\vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\frac{1}{r} = \vec{\nabla}'\frac{\vec{r}}{r^3} = -3\frac{1}{r^4}(\vec{\nabla}'r)\vec{r} + \frac{1}{r^3}\vec{\nabla}'\vec{r} = \frac{3}{r^5}\vec{r}\vec{r} - \frac{1}{r^3}\overleftrightarrow{g}$$

$l=2 \qquad \nabla'_a\nabla'_b\frac{1}{r} = \frac{3}{r^5}\Big(r_a r_b - \frac{1}{3}r^2 g_{ab}\Big) = \frac{3}{r^3}\Big(e_a e_b - \frac{1}{3}g_{ab}\Big)$

pozorování:

$e_a e_b - \frac{1}{3}g_{ab}$ symetrické bezestopé $\qquad g^{ab}\big(e_a e_b - \frac{1}{3}g_{ab}\big) = 0$

bezestopová část $\qquad$ bez indexů budeme značit $\langle T\rangle$

$$T_{ab} = T_{\langle ab\rangle} + \frac{1}{3}T\,g_{ab}$$

T stopa $T \qquad g_{ab}$ - triviální (jednotkový) tenzor

bezestopá část $T \qquad g^{ab}T_{\langle ab\rangle} = 0$

$$e_a e_b - \frac{1}{3}g_{ab} = e_{\langle a}e_{b\rangle}$$

$$\vec{\nabla}'\vec{\nabla}'\frac{1}{r} = \frac{3}{r^3}\langle\vec{e}\;\vec{e}\rangle \qquad \text{obecně} \quad \underbrace{\vec{\nabla}'\dots\vec{\nabla}'}_{l}\frac{1}{r} = \frac{(2l-1)!!}{r^{l+1}}\langle\underbrace{\vec{e}\dots\vec{e}}_{l}\rangle$$

projektor na bezestopou část symetr. tenz.

$$T_{\langle ab\rangle} = T_{kl}\,P^{kl}_{ab} \qquad P^{kl}_{ab} = \delta^{(k}_{(a}\delta^{l)}_{b)} - \frac{1}{3}g^{kl}g_{ab}$$

$\Downarrow$

$$r'^a r'^b\, e_{\langle a}e_{b\rangle} = r'^a r'^b P^{kl}_{ab}\, e_k e_l = r'^{\langle a}r'^{b\rangle}\, e_a e_b$$

rozvoj

$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}e^a r'_a + \frac{3}{2}\frac{1}{r^3}e^a e^b\, r'_{\langle a}r'_{b\rangle} + \dots$$

Tenzorové multipóly

dosazení rozvoje $\frac{1}{\pi(X|X')}$ do potenciálu

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\pi}\underbrace{\int\varrho(X')dV'}_{\substack{Q\\ \text{monopól}}} + \frac{1}{\pi^2}e^a\underbrace{\int\pi'_a\varrho(X')dV'}_{\substack{p_a\\ \text{dipól}}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^3}e^a e^b\underbrace{3\int\pi'_a\pi'_b\varrho(X')dV'}_{\substack{K_{ab}\\ \text{kvadrupól}}}+\dots\right]$$

l-tý moment rozložení náboje

$$Q_{(l)\,a_1\dots a_l} = \int \pi'_{a_1}\dots\pi'_{a_l}\,\varrho(X')dV'$$

l-tý multipól $= 2^l$-pól

$$M_{(l)\,a_1\dots a_l} = (2l-1)!!\;Q_{(l)\langle a_1\dots a_l\rangle}$$

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{1}{\pi^{l+1}}e^{a_1}\dots e^{a_l}M_{(l)\,a_1\dots a_l}$$

Závislost multipólů na volbě počátku

obecně multipóly závisí na volbě P

nejnižší nenulový moment nezávisí na volbě počátku

nechť $Q_{(l)}=0 \quad l=0,1,\dots,k-1 \quad Q_{(k)}\neq 0$

posun počátku

$$\tilde{P} = P+\vec{d} \qquad X = P+\vec{\pi} = \tilde{P}+\tilde{\vec{\pi}} \qquad \tilde{\vec{\pi}} = \vec{\pi}-\vec{d}$$

moment vůči $\tilde{P}$

$$\tilde{Q}_{(k)}^{a_1\dots a_k} = \int\tilde{\pi}^{a_1}\dots\tilde{\pi}^{a_k}\varrho(X)\,dV = \int(\pi^{a_1}-d^{a_1})\dots(\pi^{a_k}-d^{a_k})\,\varrho\,dV$$

$$= \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^m d^{(a_1}\dots d^{a_m}\underbrace{\int\pi^{a_{m+1}}\dots\pi^{a_k)}\varrho\,dV}_{Q_{(k-m)}=0 \text{ pro } m>0}$$

$$= Q_{(k)}^{a_1\dots a_k}$$

$\Downarrow$

nejnižší nenulový multipól nezávisí na volbě počátku

– charakterizuje dominantní chování vzdáleného pole

Monopól . $l=0$

$$Q \equiv M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}$$

Dipól $l=1$

$$p^a = M^a_{(1)} = Q^a_{(1)} = \int r^a \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} e^a p_a$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} (3 e^a e^b p_b - p^a)$$ (mimo samotný dipól)

Kvadrupól $l=2$

$$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3\, Q^{\langle ab \rangle}_{(2)} = \int (3 r^a r^b - r^2 g^{ab}) \varrho \, dV$$

$$Q^{ab}_{(2)} = \int r^a r^b \varrho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} e^a e^b K_{ab} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} r^a r^b K_{ab}$$

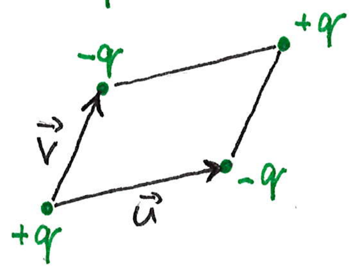
$$E^a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{5}{r^6} \frac{r^a}{r} \frac{1}{2} r^b r^c K_{bc} - \frac{1}{r^5} r^b K^a{}_b \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^4} \left[\frac{5}{2} e^a e^b e^c K_{bc} - K^a{}_b e^b \right]$$

Příklady

1) $Q = M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \varrho \, dV = q - q = 0$

$\vec{p} = \vec{M}_{(1)} = \vec{Q}_{(1)} = \int \vec{r} \varrho \, dV = q \frac{\vec{u}}{2} - q\left(-\frac{\vec{u}}{2}\right) = q\vec{u}$



2) $Q = q + q - q - q = 0$

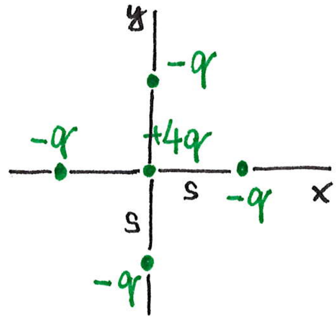
$\vec{p} = q\left(-\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2}\right) + q\left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2}\right) - q\left(\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2}\right) - q\left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2}\right) = 0$

$Q^{ab} = \frac{q}{4}\left[(-u-v)^a(-u-v)^b + (u+v)^a(u+v)^b - (u-v)^a(u-v)^b - (-u+v)^a(-u+v)^b\right]$

$= q\left[u^a v^b + v^a u^b\right] = 2q\, u^{(a} v^{b)}$

$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3Q^{\langle ab\rangle}_{(2)} = 6q\, u^{\langle a} v^{b\rangle} = 6q\left(u^{(a}v^{b)} - \frac{1}{3} g^{ab} u^m v_m\right)$

$\overleftrightarrow{K} = 6q \langle \vec{u}\vec{v}\rangle = 6q\left(\frac{1}{2}(\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}) - \frac{1}{3}\overleftrightarrow{g}\, \vec{u}\cdot\vec{v}\right)$



3) $Q = 4q - q - q - q - q = 0$

$\vec{p} = -q s\vec{e}_x - q(-s\vec{e}_x) - q s\vec{e}_y - q(-s\vec{e}_y) = 0$

$\overleftrightarrow{Q}_{(2)} = -q s^2\left[\vec{e}_x\vec{e}_x + (-\vec{e}_x)(-\vec{e}_x) + \vec{e}_y\vec{e}_y + (-\vec{e}_y)(-\vec{e}_y)\right]$

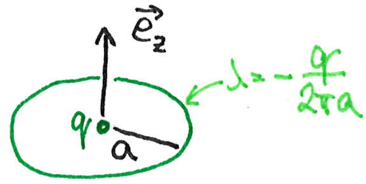
$= -2qs^2(\vec{e}_x\vec{e}_x + \vec{e}_y\vec{e}_y) = 2qs^2(\vec{e}_z\vec{e}_z - \overleftrightarrow{g})$

$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3Q^{\langle ab\rangle}_{(2)} = 6qs^2\, e_z^{\langle a} e_z^{b\rangle} = 2qs^2\left(2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b\right)$

výpočet vzhledem k $\tilde{P} = P - s\vec{e}_x$

$Q^{ab}_{(2)} = qs^2\left(4\vec{e}_x\vec{e}_x - (2\vec{e}_x)(2\vec{e}_x) - (\vec{e}_x + \vec{e}_y)(\vec{e}_x + \vec{e}_y) - (\vec{e}_x - \vec{e}_y)(\vec{e}_x - \vec{e}_y)\right)$

$= -2qs^2(\vec{e}_x\vec{e}_x + \vec{e}_y\vec{e}_y)$ ← stejné jako vůči P



4) $Q = q + \int \lambda \, ds = q - q = 0$

$\vec{p} = \int \vec{r} \lambda \, ds = 0$

$Q^{ab}_{(2)} = \int r^a r^b \lambda \, ds = \frac{2\pi a}{3} \lambda a^2 g_\perp^{ab}$ ⇐ $\int e^a e^b d\varphi = \frac{2\pi}{3} g^{ab}$ ⇐ symetrie stopa

$= -\frac{1}{3} q a^2 (e_x^a e_x^b + e_y^a e_y^b) = \frac{1}{3} q a^2 (e_z^a e_z^b - g^{ab})$

$K^{ab} = M^{ab}_{(2)} = 3Q^{\langle ab\rangle}_{(2)} = q a^2\, e_z^{\langle a} e_z^{b\rangle} = \frac{1}{3} q a^2 \left(2 e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b\right)$

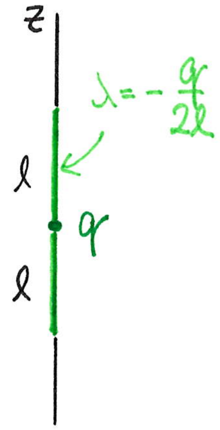
5) $Q = q + \int \lambda \, ds = q - q = 0$

$\vec{p} = \int \vec{r} \lambda \, ds = 0$

$\overleftrightarrow{Q}_{(2)} = \lambda \vec{e}_z \vec{e}_z \int_{-\ell}^{\ell} z^2 \, dz = -\frac{q}{2\ell} \frac{2}{3} \ell^3 \vec{e}_z \vec{e}_z = -\frac{1}{3} q \ell^2 \vec{e}_z \vec{e}_z$

$K^{ab} = \mathcal{M}^{ab}_{(2)} = 3 Q^{\langle ab \rangle}_{(2)} = -q \ell^2 e_z^{\langle a} e_z^{b \rangle}$

$= -\frac{1}{3} q \ell^2 \left(2 e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b \right)$

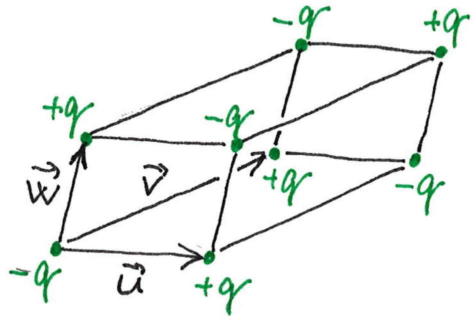


6) $Q = 0$

$$\vec{p} = \vec{\mathcal{M}}_{(1)} = \vec{Q}_{(1)} = \frac{1}{2} q \Big[(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) - (-\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}) - (\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}) + (-\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}) - (\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}) + (-\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}) - (-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) + (\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}) \Big] = 0$$

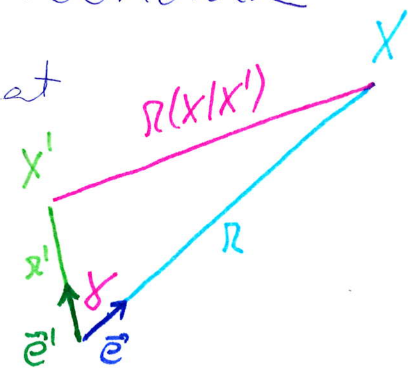
$$Q^{ab}_{(2)} = \frac{q}{4} \Big[(u+v+w)^a (u+v+w)^b - (-u-v-w)^a (-u-v-w)^b - (u+v-w)^a (u+v-w)^b + (-u-v+w)^a (-u-v-w)^b - (u-v+w)^a (u-v+w)^b + (-u+v-w)^a (-u+v-w)^b - (-u+v+w)^a (-u+v+w)^b + (u-v-w)^a (u-v-w)^b \Big] = 0$$

$K^{ab} = \mathcal{M}^{ab}_{(2)} = 3 Q^{\langle ab \rangle}_{(2)} = 0$



Rozklad faktoru $1/r$ do sférických harmonik

coulombovský faktor $1/r$ můžeme napsat



$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

vytvářející funkce Legendreových pol.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2t\varsigma + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\varsigma)$$

kde $P_l(\varsigma)$ jsou Legendreovy polynomy

- polynom stupně l s mocninami $l, l-2, l-4, \dots$
- $P_l(\varsigma) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\varsigma^l}(\varsigma^2 - 1)^l$

více viz tabulka

dostáváme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \qquad \cos\gamma = \vec{e}\cdot\vec{e}'$$

existuje rozklad do sférických harmonik

$$P_l(\vec{e}\cdot\vec{e}') = \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e})\, Y_l^m(\vec{e}')^*$$

kde $Y_l^m(\vec{e})$ jsou kulové funkce (sférické harmoniky)

- komplexní funkce na jednotkové sféře
- $Y_l^m(\vec{e}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$

kde $P_l^m(\varsigma)$ jsou přidružené Legendreovy "polynomy"

- $P_l^m(\varsigma) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\varsigma^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\varsigma^{l+m}}(\varsigma^2-1)^l$

více viz tabulka

dostáváme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{r'^l}{r^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e})\, Y_l^m(\vec{e}')^*$$

Legendreovy polynomy

Polynomy $\mathsf{P}_l(\zeta)$ stupně $l \in \mathbb{N}_0$ definované na intervalu $\zeta \in \langle -1, 1 \rangle$.
Explicitní vyjádření:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \leqslant l}} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2l-n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!} \zeta^{l-2n}$$

Rodriguesova formule:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l$$

Legendreova rovnice:

$$(1-\zeta^2) \frac{d^2 \mathsf{P}_l}{d\zeta^2}(\zeta) - 2\zeta \frac{d\mathsf{P}_l}{d\zeta}(\zeta) + l(l+1)\mathsf{P}_l(\zeta) = 0$$

Legendreovy polynomy jako vlastní funkce operátoru:

$$-\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}\right]\mathsf{P}_l(\zeta) = l(l+1)\,\mathsf{P}_l(\zeta)$$

Rekurentní vztah:

$$\mathsf{P}_l(\zeta) = \frac{2l-1}{l}\,\zeta\,\mathsf{P}_{l-1}(\zeta) - \frac{l-1}{l}\,\mathsf{P}_{l-2}(\zeta) \qquad \mathsf{P}_0(\zeta) = 1 \quad \mathsf{P}_1(\zeta) = \zeta$$

Generující funkce:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta t + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathsf{P}_l(\zeta)\, t^l$$

Krajní hodnoty:

$$\mathsf{P}_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l(\zeta)\mathsf{P}_{l'}(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \qquad \int_0^{\pi} \mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_{l'}(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

Relace úplnosti:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \mathsf{P}_l(\zeta)\mathsf{P}_l(\zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \qquad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \mathsf{P}_l(\cos\vartheta)\mathsf{P}_l(\cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta}\delta(\vartheta - \vartheta')$$

Separace úhlů:

$$\int \mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}_1)\,\mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}_2)\,d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\mathsf{P}_l(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1)$$

Legendreovy polynomy pro $l \leqslant 4$:

$$\mathsf{P}_0(\zeta) = 1$$
$$\mathsf{P}_1(\zeta) = \zeta$$
$$\mathsf{P}_2(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}$$
$$\mathsf{P}_3(\zeta) = \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta$$
$$\mathsf{P}_4(\zeta) = \frac{35}{8}\zeta^4 - \frac{15}{4}\zeta^2 + \frac{3}{8}$$

Přidružené Legendreovy polynomy

Obecná Legendreova rovnice pro přidružené Legendreovy funkce:

$$\frac{d}{d\zeta}\left((1-\zeta^2)\frac{d\mathsf{P}_l^m}{d\zeta}(\zeta)\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2}\right)\mathsf{P}_l^m(\zeta) = 0$$

Přidružené Legendreovy "polynomy" – celočíselné parametry $l = 0, 1, \ldots,\ m = -l, \ldots, l$:

$$\mathsf{P}_l^m(\zeta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\zeta^{l+m}}(\zeta^2 - 1)^l$$

Vztah k Legandreovým polynomům:

$$\mathsf{P}_l^m(\zeta) = (-1)^m (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\zeta^m}\mathsf{P}_l(\zeta) \quad m \geqslant 0 \qquad \mathsf{P}_l^0(\zeta) = \mathsf{P}_l(\zeta)$$

Vztah pro opačné m:

$$\mathsf{P}_l^{-m}(\zeta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,\mathsf{P}_l^m$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(\zeta)\mathsf{P}_{l'}^m(\zeta)\,d\zeta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'} \qquad \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_l^m(\zeta)\mathsf{P}_l^{m'}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{1}{m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{mm'}$$

Kulové funkce (sférické harmoniky)

Parametrizace jednotkového vektoru $\vec{e}$ pomocí sférických úhlů:

$$\vec{e} = \cos\vartheta\,\vec{e}_z + \sin\vartheta\,\left(\cos\vartheta\,\vec{e}_x + \sin\vartheta\,\vec{e}_y\right)$$

Integrační element na jednotkové sféře:

$$d\Omega \equiv d\vec{e} = \sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi = d\zeta d\varphi \qquad \zeta = \cos\vartheta$$

2D δ-funkce na jednotkové sféře:

$$\delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}') = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\delta(\vartheta - \vartheta')\delta(\varphi - \varphi') = \delta(\zeta - \zeta')\delta(\varphi - \varphi')$$

$$f(\vec{e}) = \int \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')\,f(\vec{e}')\,d\Omega' = \int \delta(\vartheta - \vartheta')\delta(\varphi - \varphi')\,f(\vartheta', \varphi')\,d\vartheta' d\varphi'$$

Kulové funkce – komplexní funkce na jednotkové sféře ($l = 0, 1, \ldots,\ m = -l, \ldots, l$):

$$\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}) \equiv \mathsf{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathsf{P}_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$$

Komplexně sdružené funkce:

$$\mathsf{Y}_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m\,\mathsf{Y}_l^{-m}(\vec{e})$$

Kulové funkce jako vlastní funkce operátorů:

$$-\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right] + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\mathsf{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) = l(l+1)\,\mathsf{Y}_l^m \qquad -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathsf{Y}_l^m = m\,\mathsf{Y}_l^m$$

Relace ortogonality a úplnosti:

$$\int \mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\mathsf{Y}_{l'}^{m'}(\vec{e})^*\,d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}')^* = \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}')$$

Rozklad Legandreova polynomu:

$$\sum_{m=-l}^{l} \mathsf{Y}_l^m(\vec{e})\,\mathsf{Y}_l^m(\vec{e}')^* = \frac{2l+1}{4\pi}\mathsf{P}_l(\vec{e}\cdot\vec{e}')$$

Multipólový rozvoj ve sférických harmonikách

dosazením rozkladu $1/r$ do potenciálu

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vec{e}) \underbrace{\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r'^l Y_l^{m*}(\vec{e}') \varrho(x') dV'}_{\text{sférický multipól } M_l^m}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\vec{e}) M_l^m$$

kde sférický multipól je

$$M_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l Y_l^m(\vec{e})^* \varrho(x) dV$$

Axiálně symetrické pole

nechť nábojové rozložení nezávisí na φ
(axiálně symetrické rozložení)

$$\varrho(X) = \varrho(r, \vartheta)$$

pro sférický multipól dostáváme

$$M_l^m = \boxed{l,m} \int r^{l+2} P_l^m(\cos\vartheta) \exp(-im\varphi)\, \varrho(r,\vartheta) \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

můžeme vytknout integrál přes φ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} m \neq 0 & \left[\frac{i}{m}\exp(-im\varphi)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ m = 0 & [1]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$M_l^m = 0 \quad \text{pro } m \neq 0$$

$$M_l^0 = \int r^l P_l(\cos\vartheta)\, \varrho(r,\vartheta) \overbrace{r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi}^{dV}$$

$$= 2\pi \int r^{l+2} P_l(\xi)\, \varrho(r,\xi)\, dr\, d\xi \qquad \xi = \cos\vartheta$$

potenciál

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) M_l^0$$

rozvoj potenciálu podél osy pro velké $z = \frac{1}{\eta}$

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} M_l^0 \qquad \text{na ose}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{d^l \phi}{d\eta^l}\bigg|_{\eta=0} \frac{1}{z^l} \overset{l \to l+1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} \frac{d^{l+1}\phi}{d\eta^{l+1}}\bigg|_{\eta=0} \frac{1}{z^{l+1}}$$

porovnáním dostaneme multipóly ze znalosti potenciálu na ose

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} M_l^0 = \frac{1}{(l+1)!} \frac{d^{l+1}\phi}{d\eta^{l+1}}\bigg|_{\eta=0} \qquad \eta = \frac{1}{z}$$

Rozklad do systému funkcí

Báze v prostoru funkcí

při práci s lineárním prostorem funkcí je často výhodné zvolit v daném prostoru bázi funkcí

$f_J(X)$ $\qquad$ J index číslující bázové funkce

úplnost báze - každá funkce lze rozložit do báze

$$\phi(X) = \sum_J c_J f_J(X) \qquad c_J \text{ komponenty fce } \phi$$

ortonormalita báze

pokud máme v prostoru funkcí skalární součin $(,)$ je výhodné volit ortogonální bázi

$$(f_J, f_{J'}) \equiv \int f_J(X) f_{J'}(X)\, dV = \delta_{JJ'}$$

typicky

Kroneckerovo δ na diskrétních indx.
δ-fce na spojitých indexech

potom komponenta c_J lze vyjádřit

$$c_J = (f_J, \phi) = \int f_J(X)\phi(X)\, dV$$

vskutku, díky ortonormalitě máme

$$(f_J, \phi) = (f_J, \sum_{J'} c_{J'} f_{J'}) = \sum_{J'} (f_J, f_{J'})\, c_{J'} = \sum_{J'} \delta_{JJ'} c_{J'} = c_J$$

relace úplnosti

úplnost báze lze charakterizovat rozkladem δ-funkce $\delta(X|X')$ (tj. rozkladem jednotkové matice ve zvolené bázi)

$$\delta(X|X') = \sum_J f_J(X)\, f_J(X')$$

vskutku, aplikací δ-funkce na ϕ dostaneme rozklad ϕ

$$\phi(X) = \int \delta(X|X')\phi(X')\, dV' = \sum_J f_J(X) \int f_J(X')\phi(X')\, dV' = \sum_J c_J f_J(X)$$

prostor řešení Laplaceovy úlohy

řešíme

$$\Delta\phi = 0 \qquad + \text{ okrajové podmínky}$$

nalezneme-li bázi řešení

$$\Delta f_j = 0$$

každé řešení bude tvaru

$$\phi = \sum_j c_j f_j$$

okrajové podmínky nesmí být příliš restriktivní

např. Dirichletovy podmínky $\Rightarrow$ $\phi = 0$ triviální

uvažujeme např. fce na oblasti s defi-ovanou normou

(tj. nedivergující na okraji)

nebo funkce splňující Dirichletovy podm. jen někde (viz příkl.)

ukázat, že jsme nalezli již úplnou bázi nemusí

být snadné - záleží na „funkcionálních technikalitách"

systémy vlastních funkcí symetrického operátoru

vlastní funkce operátoru

$$L\, f_j(X) = \lambda_j f_j(X) \qquad \text{např. } L = -\Delta$$

f_j vlastní funkce

λ_j vlastní číslo

j index číslující vlastní funkce

systémy vlastních funkcí tvoří úplnou

ortonormální (při vhodné normalizaci) bázi

$$(f_j, f_{j'}) = \delta_{jj'} \qquad \sum_j f_j(X) f_j(X') = \delta(X|X')$$

poznámka: komplexní funkce

často je výhodnější pracovat s prostory komplexních fcí

obecně lepší vlastnosti

nutno mírně modifikovat vzorce - přidání komplexního sdruž

$$(\phi, \psi) = \int \phi^*(x)\,\psi(x)\,dV \qquad (f_j, f_{j'}) \equiv \int f_j^*(x)\, f_{j'}(x)\, dV = \delta_{jj'}$$

$$c_j = (f_j, \phi) = \int f_j^*(x)\,\phi(x)\,dV$$

$$\sum_j f_j(x)\, f_j^*(X') = \delta(X|X')$$

Příklad: Laplaceův operátor v 1D

$L = -\frac{d^2}{dx^2}$ operátor

$L\phi(x) = \lambda\phi(x)$ rovnice pro vlastní funkce

bez specifikace okrajových podmínek řeší

$\sin(kx)$ $\cos(kx)$ $\exp(ikx)$ $\lambda = k^2$

$\mathrm{sh}(\kappa x)$ $\mathrm{ch}(\kappa x)$ $\exp(\pm\kappa x)$ $\lambda = -\kappa^2$

$a + bx$ $\lambda = 0$

pozn: bez okrajových podmínek nemáme positivitu L
tj. vlastní číslo λ může být i nekladné

1) funkce na $\langle 0, a\rangle$ splňující Dirichletovy podmínky

$\phi(0) = \phi(a) = 0$

normalizovaná báze vlastních funkcí

$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{m\pi x}{a}$ $m \in \mathbb{N}$ $\lambda = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$

úplnost

$$\sum_m \frac{2}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x'}{a} = \delta(x - x')$$

ortonormalita

$$\int_0^a \frac{2}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{m'\pi x}{a}\, dx = \delta_{mm'}$$

rozklad do Fourierovy řady

$\phi(x) = \sum_m \tilde{\phi}_m \psi_m(x)$ $\tilde{\phi}_m = \int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{m\pi x}{a}\, \phi(x)\, dx$

2) funkce na $\mathbb{R}$ omezené v $\pm\infty$

normalizovaná báze (volíme komplexní místo sin, cos)

$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx)$ $k \in \mathbb{R}$ $\lambda = k^2$

úplnost

$$\int \psi_k(x)\psi_k^*(x')\, dk = \frac{1}{2\pi}\int \exp(ik(x - x'))\, dk = \delta(x - x')$$

ortonormalita

$$\int \psi_k^*(x)\psi_{k'}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int \exp(i(k' - k)x)\, dx = \delta(k - k')$$

Fourierova transformace

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \tilde{\phi}(k) \exp(ikx)\, dk$ $\tilde{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \exp(-ikx)\, \phi(x)\, dx$

Metoda separace proměnných

Separace proměnných

řešení Laplaceovy úlohy je obecně složitý problém PDE

někdy lze zredukovat na problém s menším počtem proměnných

separace proměnných – oddělení proměnných na nezávislé problémy

funguje pro základní systémy ortogonálních souřadnic

dvě skupiny proměnných

$$\xi = \{\xi^s\} \qquad \varsigma = \{\varsigma^r\}$$

multiplikativní separabilní ansatz

$$\phi(\xi,\varsigma) = A(\xi)\,B(\varsigma)$$

k prosté separaci dochází, pokud

$$f\,\Delta\phi = (K_\xi A)(\xi)\,B(\varsigma) + A(\xi)\,(L_\varsigma B)(\varsigma)$$

zde K_ξ diferenciální operátor v proměnných ξ

L_ς diferenciální operátor v proměnných ς

f nějaká vhodná funkce

$$\Downarrow$$

$$\frac{f}{\phi}\Delta\phi = \Big(\frac{1}{A}K_\xi A\Big)(\xi) + \Big(\frac{1}{B}L_\varsigma B\Big)(\varsigma) = 0$$

řešíme Laplaceovou úlohu $\Delta\phi = 0$

různé sady proměnných
nemohou se netriviálně vyrušit
musí být rovno konstantě

$$\Downarrow$$

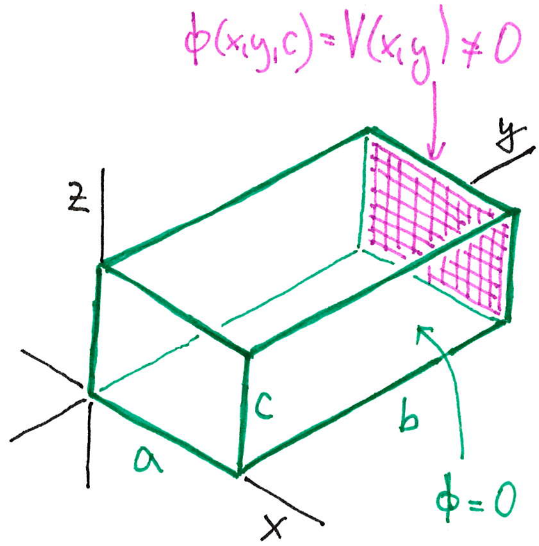
$$K_\xi A(\xi) = \kappa A(\xi) \qquad L_\varsigma B(\varsigma) = \lambda B(\varsigma)$$

κ, λ se nazývají separační konstanty

musí splňovat $\quad \kappa + \lambda = 0$

cílem je touto metodou dojít až k 1-dimenzionálnímu problému, kdy rovnice pro A či B jsou obyčejné diferenciální rovnice

někdy lze dělat separaci více proměnných najednou



Kartézské souřadnice

řešme

$$\Delta\phi = 0$$

v kvádru $a\times b\times c$ podél souř. os
s Dirichletovými podmínkami
na všech stěnách mimo $z = c$
kde je potenciál zadán funkcí

$$\phi(x,y,c) = V(x,y)$$

Laplaceův operátor v kartézských souřadnicích

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]$$

multiplikativní separabilní ansatz

$$\phi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\phi}\Delta\phi = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

pro řešení $\Delta\phi = 0$ se nám členy separují a musí se rovnat konstantám $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ splňující

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 X \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 Y \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

zřejmě $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ nemohou být všechny kladné
Dirichletovy podmínky implikují positivitu
proto v jednom směru nemůžeme fixovat Dirichletovy podmínky na obou stranách

směry x a y – Dirichletovy podmínky

$$X(0) = X(a) = 0 \quad\Rightarrow\quad X_m = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \qquad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$Y(0) = Y(b) = 0 \quad\Rightarrow\quad Y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \qquad \beta_n = \frac{n\pi}{b}$$

$\Downarrow$

$$\gamma^2_{m,n} = -\alpha_m^2 - \beta_n^2 = -\frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} < 0$$

směr z

$Z(0)=0 \qquad Z(c)$ neurčené

$Z_{m,n}$ odpovídá vlastnímu číslu $\gamma_{m,n}^2 = -\alpha_m^2 - \beta_n^2$

$\Downarrow$

$$Z_{m,n} = \mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}}\, z\right)$$

separované řešení (nenormované)

$$\varphi_{m,n} \propto \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}}\, z\right)$$

rozklad obecného řešení

$$\phi = \sum_{m,n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \underbrace{\frac{c_{m,n}}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2}\, c\right)}}_{\text{vhodně zvolená konstanta}} \sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\alpha_m^2+\beta_n^2}\, z\right)$$

podmínky na $z=c$

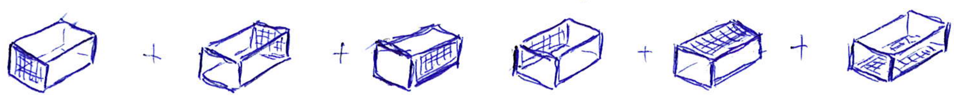
$$V(x,y) = \sum_{m,n} c_{m,n} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

z ortonormality fcí $\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ resp. $\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \Rightarrow$

$$c_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_0^a\!\!\int_0^b V(x,y)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\,dy\,dx$$

nenulový potenciál na všech stěnách

– superpozice předchozí úlohy s potenciálem zadaným na jednotlivých stěnách

$\phi =$ 

Sférické souřadnice

$\Delta\phi = 0$

regularita v úhlových směrech

libovolné chování pro $r\to 0$ a $r\to\infty$

Laplaceův operátor

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right]}_{\Delta_{S^2}\phi\ -\ \text{Laplace na sféře } S_2}$$

separace radiální a úhlových souřadnic

$$\phi = R(r)\,Y(\vartheta,\varphi)$$

$\Downarrow$

$$\frac{r^2}{\phi}\Delta\phi = \underbrace{\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{\substack{\text{závisí pouze na } r\\ c}} + \underbrace{\frac{1}{Y}\Delta_{S_2}Y}_{\substack{\text{závisí na } \vartheta,\varphi\\ -c}} = 0$$

← Laplaceova úloha

← separační konstanty

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = cR \qquad -\Delta_{S_2}Y = cY$$

radiální rovnice $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = cR$

řeší obyčejná mocnina r^l

r^l a $r^{-(l+1)}$ dává stejné vlastní číslo $c = l(l+1)$

tj. řešení pro $c = l(l+1)$

$$R = r^l \qquad R = r^{-(l+1)}$$

různá regularita v $r=0$ a $r\to\infty$

úhlová rovnice $-\Delta_{S_2}Y = cY$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}Y\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y + l(l+1)Y = 0$$

separace proměnných ϑ a φ

$$Y(\vartheta,\varphi) = P(\vartheta)\,\mathcal{E}(\varphi)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\sin^2\vartheta}{Y}[\ldots] = \underbrace{\frac{1}{P}\left(\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}P\right) + l(l+1)\sin^2\vartheta\, P\right)}_{\substack{\text{závisí pouze na } \vartheta\\ m^2}} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{d^2}{d\varphi^2}\mathcal{E}}_{\substack{\text{závisí pouze na } \varphi\\ -m^2}} = 0$$

$\Downarrow$
$$\sin\vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{d}{d\vartheta} P\right) + l(l+1)\sin^2\vartheta\, P = m^2 P$$
$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\mathcal{E} = -m^2\mathcal{E}$$

rovnice ve směru φ

periodicita pro $\varphi = 0, 2\pi$

$\Downarrow$
$$\mathcal{E} = \exp(im\varphi) \qquad m \in \mathbb{Z}$$

rovnice ve směru ϑ
$$\xi = \cos\vartheta \qquad \frac{d}{d\vartheta} = \frac{d\xi}{d\vartheta}\frac{d}{d\xi} = -\sin\vartheta \frac{d}{d\xi} \qquad \sin^2\vartheta = 1-\xi^2$$
$\Downarrow$
$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)P$$

zobecněná Legendreova rovnice

řešení: přidružené Legendreovy funkce $P_l^m(\xi)$

regularita pro $\vartheta = 0, \pi$ a $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$l = 0, 1, 2, \ldots \qquad l \geq |m|$

regulární řešení – přidružené Legendreovy "polynomy"

$P_l^m(\cos\vartheta) \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \qquad m = -l, \ldots, l$

řešení v úhlovém sektoru ϑ, φ resp. $\vec{e}$

kulové funkce, též sférické harmoniky
$$Y_l^m(\vec{e}) \equiv Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$$

jsou to vlastní funkce operátorů $-\Delta_{S_2}$ a $-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$
$$-\Delta_{S_2} Y_l^m = l(l+1)\, Y_l^m$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} Y_l^m = m^2\, Y_l^m$$

tvoří ortonormální bázi funkcí na S_2

funkce na S_2

funkce úhlů ϑ, φ

funkce směrového vektoru $\vec{e}$

$$\vec{e} = \sin\vartheta \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\varphi\, \vec{e}_y + \cos\vartheta\, \vec{e}_z$$

skalární součin

$$(f, g) = \int_{S_2} f(\vec{e})^* g(\vec{e})\, d\Omega = \int_{\substack{\vartheta \in (0,\pi) \\ \varphi \in (0, 2\pi)}} f(\vartheta,\varphi)^* g(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

ortonormalita kulových fcí

$$\int Y_l^m(\vec{e})^* Y_{l'}^{m'}(\vec{e})\, d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

relace úplnosti

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\vec{e})\, Y_l^m(\vec{e}\,')^* = \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}\,')$$

zde $\delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}\,')$ je δ-fce na S_2, tj.

$$\int \delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}\,')\, f(\vec{e}\,')\, d\Omega' = f(\vec{e})$$

$$\delta^{(2)}(\vec{e}|\vec{e}\,') = \frac{1}{\sin\vartheta}\, \delta(\vartheta-\vartheta')\, \delta(\varphi-\varphi')$$

Řešení Laplaceovy úlohy v 3D $\qquad l = 0, 1, \dots$ $\quad m = -l, \dots, l$

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$ člen multipólového rozvoje

regulární (klesající) v $r = \infty$

neregulární v $r = 0$ – zde očekáváme zdroje tj. zde nebude platit $\Delta\phi = 0$

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = r^l\, Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$ člen tzv. vnitřního multipólového rozvoje

regulární v $r = 0$

neregulární (rostoucí) v $r = \infty$

vhodné pro popis pole kolem $r = 0$ od vzdálených zdrojů

Cylindrické souřadnice

$\Delta\phi = 0$

regularita v úhlovém směru φ

omezenost podél osy z

libovolné chování pro $R\to 0$ $R\to\infty$

Laplaceův operátor

$$\Delta\phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

separace souřadnice z a polárních souřadnic R,φ

$$\phi = \Psi(R,\varphi)\,\mathcal{Z}(z)$$

Laplaceova úloha

$$\Downarrow\quad \frac{1}{\phi}\Delta\phi = \underbrace{\frac{1}{\Psi}\left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\Psi}{dR}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}\right)}_{\text{závisí pouze na } R,\varphi \,\to\, -k^2} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{Z}}\frac{d^2\mathcal{Z}}{dz^2}}_{\text{závisí na } z \,\to\, k^2} \overset{!}{=} 0$$

separační konst

$$\Downarrow\quad \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\Psi}{dR}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} = -k^2\Psi$$

$$\frac{d^2\mathcal{Z}}{dz^2} = k^2\mathcal{Z}$$

separace R a φ

$$\Psi = \mathcal{R}(R)\,\mathcal{E}(\varphi)$$

$$\Downarrow\quad \frac{R^2}{\Psi}[\dots] = \underbrace{\frac{1}{\mathcal{R}}\left(R\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\mathcal{R}}{dR}\right) + k^2R^2\mathcal{R}\right)}_{\substack{\text{závisí pouze na } R \\ m^2}} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{E}}\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2}}_{\substack{\text{závisí pouze na } \varphi \\ -m^2}} \overset{!}{=} 0$$

separační konst.

$$\Downarrow\quad -\frac{d^2\mathcal{E}}{d\varphi^2} = m^2\mathcal{E}$$

$$R\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\mathcal{R}}{dR}\right) + (k^2R^2 - m^2)\mathcal{R} = 0 \qquad \text{Besselova rovnice}$$

separované funkce

$\mathcal{Z} \to \exp(\pm kz)$

$\mathcal{E} \to \exp(im\varphi)$

$\mathcal{R} \to$ Besselovy funkce

translační symetrie podél osy z

omezíme se pouze na speciální případ, kdy nic nezávisí na souřadnici z

odpovídá volbě $k = 0$ $\quad Z = 1$

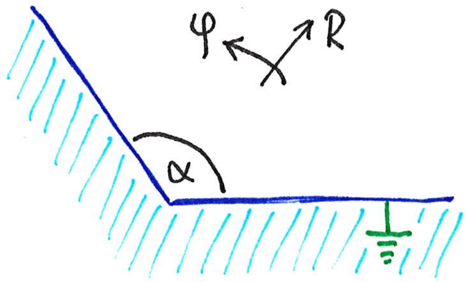
radiální rovnice

$$R\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\mathcal{R}}{dR}\right) = m^2\mathcal{R}$$

řešení

$$\mathcal{R} = \begin{cases} R^{\pm m} & m \neq 0 \\ 1,\ \ln R & m = 0 \end{cases}$$

úloha uvnitř uzemněného vodivého klínu



$$\phi(R,\varphi) = \mathcal{R}(R)\,\mathcal{E}(\varphi)$$

okrajové podmínky

$$\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}(\alpha) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{E}(\varphi) = \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) \qquad m = \frac{n\pi}{\alpha} \qquad n \in \mathbb{N}$$

regularita pro $R=0$

$$\mathcal{R} = R^{m} = R^{\frac{n\pi}{\alpha}} \qquad (R^{-m} \text{ diverguje v } R=0)$$

obecné řešení

$$\phi = \sum_n c_n R^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

dominantní chování

blízko osy je dominantní člen $n=1$

$$\phi \approx c_1 R^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\varphi\right)$$

$$\vec{E} \approx -\frac{\pi}{\alpha}c_1 R^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left(\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}\,\vec{e}_R + \cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= -\frac{\pi}{\alpha}c_1 R^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\left(\sin\left(\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\varphi\right)\vec{e}_x + \cos\left(\left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\varphi\right)\vec{e}_y\right)$$

ostrý úhel $\alpha < \pi$ $\quad R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \approx 0$ pro $R \to 0$

tupý úhel $\alpha > \pi$ $\quad R^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \to \infty$ pro $R \to 0$

$\Rightarrow$ silné pole u "špičatého" útvaru

obecné chování

c_n závisí na rozložení zdrojů daleko od osy (viz příkl.)

Rozklad do vlastních funkcí

Báze vlastních funkcí

mějme bázi vlastních funkcí Laplaceova oper. na nějaké oblasti s Dirichletovými podmínkami

$$-\Delta \psi_J(X) = \lambda_J \psi_J(X)$$

ψ_J úplný ortonormální systém
λ_J kladné vlastní čísla

Funkce Laplaceova operátoru $F[-\Delta]$ lze definovat

$$F[-\Delta]\,\psi_J(X) = F(\lambda_J)\,\psi_J(X)$$

↑ funkce aplikovaná na vlastní číslo
↑ funkce aplikovaná na Laplaceův operátor

na obecnou funkci ϕ

$$\phi(X) = \sum_J c_J \psi_J(X) \qquad c_J = \int \psi_J^*(X')\,\phi(X')\,dV'$$

lze působení $F[-\Delta]$ zapsat

$$F[-\Delta]\,\phi(X) = \sum_J c_J F[-\Delta]\,\psi_J(X) = \sum_J c_J F(\lambda_J)\,\psi_J(X) =$$

$$= \int \sum_J \psi_J(X)\,F(\lambda_J)\,\psi_J(X')^*\,\phi(X')\,dV'$$

integrální jádro operátoru $F[-\Delta]$ tedy je

$$F[-\Delta](X|X') = \sum_J \psi_J(X)\,F(\lambda_J)\,\psi_J(X')^*$$

připomínka: integrální jádro $L(X|X')$ operátoru L splňuje

$$(L\phi)(X) = \int L(X|X')\,\phi(X')\,dV'$$

Laplaceův operátor (tj. $F(\lambda) = \lambda$ $\quad F[-\Delta] = -\Delta$)

$$-\Delta(X|X') = \sum_J \psi_J(X)\,\lambda_J\,\psi_J(X')^*$$

Greenova funkce Laplaceova operátoru tj. $\left(F(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \quad F[-\Delta] = (-\Delta)^{-1} = G \right)$

$$G(X|X') = \sum_J \psi_J(X)\,\frac{1}{\lambda_J}\,\psi_J(X')^*$$

jednotkový operátor (tj. $F(\lambda) = 1$ $\quad F[-\Delta] = \delta$)

$$\delta(X|X') = \sum_J \psi_J(X)\,\psi_J(X')^* \qquad \text{relace úplnosti}$$

Příklad: Greenova funkce v uzemněném kvádru

vlastní funkce

$$-\Delta \psi = k^2 \psi$$

separace proměnných - viz řešení $\Delta\phi = 0$ dříve

$$\psi = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

$\Downarrow$

$$-\frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2 X \qquad -\frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 Y \qquad -\frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

kde separační konstanty tentokrát splňují

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2$$

Dirichletovy okrajové podmínky $\Rightarrow$

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \qquad \alpha = \frac{\pi m}{a} \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \qquad \beta = \frac{\pi n}{b} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{l\pi}{c} z\right) \qquad \gamma = \frac{\pi l}{c} \qquad l \in \mathbb{N}$$

vlastní funkce Laplaceova operátoru

$$\psi_{m,n,l} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{abc}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{c} z\right)$$

vlastní číslo

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2$$

ortonormalita

$$\int \psi^*_{mnl}(X)\, \psi_{m'n'l'}(X)\, dV = \delta_{mm'}\, \delta_{nn'}\, \delta_{ll'}$$

úplnost

$$\sum_{m,n,l} \psi_{mnl}(X)\, \psi^*_{mnl}(X') = \delta(X|X')$$

Greenova funkce

$$G(X|X') = \sum_{m,n,l} \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}\, \psi_{mnl}(X)\, \psi^*_{mnl}(X')$$