

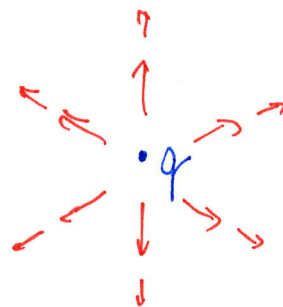
Multipólový rozvoj

Monopól

$$\phi_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \vec{E}_{\text{mon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e} \quad \rho_{\text{mon}} = q\delta$$

Síla na monopól ve vnějším poli

$$\vec{F}_{\text{na mon}} = q\vec{E}$$

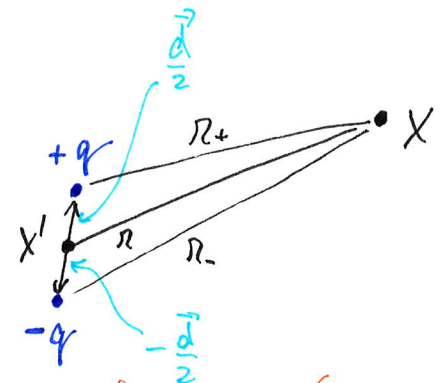


Dipól

pole dvou blízkých opačných nábojů

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla}'_1}{r} + \frac{\vec{\nabla}'_1}{r} \right)$$

Taylorův rozvoj absolutní čísel series.
 $r_+ = X' + \frac{d}{2}$ $r_- = X' - \frac{d}{2}$
 $r(X|X')$
 - od náboje
 - od členu $-\frac{d}{2}$

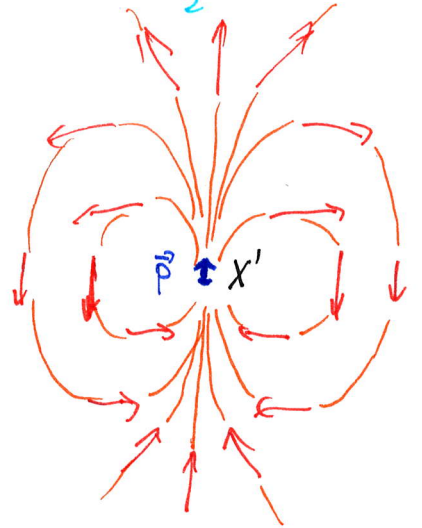


$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d \cdot \frac{\vec{e}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \frac{\vec{\nabla}'_1}{r}$$

zde $\vec{p} = qd$ v limitě $d \rightarrow 0$

$$r(X|X') = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x^2} q_{ab} \quad \Delta x^a = x^a - x'^a \equiv r^a$$

$$\vec{\nabla}'_1 r = -\vec{e} \quad \vec{\nabla}'_1 x = -\vec{q} \quad \nabla_a r_b = -q_{ab}$$



intenzita

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{p}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3\vec{p} \cdot \vec{e} \vec{e} - \vec{p}) - \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{p} \delta_{x^1}$$

niz distribuční derivován výrazu $\frac{1}{r}$

nábojové hustota

$$\rho_{dip}(x) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{p} = \frac{1}{4\pi} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\Delta \frac{1}{r} \right) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta_x(x)$$

lze říkat i z definice dipólu $-\frac{1}{4\pi} \delta(x)$ jako dvou blízkých nábojů
 $\rho_{dip}(x) = \rho_{mon X_+}(x) - \rho_{mon X_-}(x) = q(\delta(x|X_+) - \delta(x|X_-)) = q d \cdot \vec{\nabla}' \delta(x|X') = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta(x|X')$
 díky $\vec{\nabla}' \delta(x|X') = -\vec{\nabla} \delta(x|X') \Leftrightarrow \delta(x|X') = \delta(x-X')$

síla na dipól ve vnějším poli

$$\vec{F}_{dip} = q\vec{E}(X_+) - q\vec{E}(X_-) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \vec{E}(x) \quad X_{\pm} = X \pm \frac{d}{2}$$

$$= (\vec{\nabla} \vec{E}) \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E}) - (\vec{\nabla} \vec{E}) \cdot \vec{p} =$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p}) - \vec{p} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_0 = \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p})$$

distribuční

$$\vec{F}_{dip} = \int \vec{E} \rho_{dip} dV = - \int \vec{E} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta_x dV \stackrel{\uparrow}{=} \int \vec{p} \cdot (\vec{\nabla} \vec{E}) \delta_x dV = \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}$$

per partes + $\vec{p} = \text{const}$ dál už jako výše

Uzdálené pole systému nábojů

předpokládáme lokalizované rozložení náboje

$\rho(\mathbf{P}+\vec{r}')$ nenulové jen pro malé r'

zájímá nás pole daleko o nábojů

$\phi(\mathbf{P}+\vec{r})$ pro "velká" r

budeme zkoumat rozvoj

$$\frac{r'}{r} \ll 1$$

potenciál nábojového rozložení

$$\phi(X) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r(X|X')} \rho(X') dV'$$

rozvoj členu $\frac{1}{r(X|X')}$ v argumenta X'

$$= \frac{\partial^2}{\partial x'^{a_1} \dots \partial x'^{a_\ell}} \frac{1}{|x-x'|}$$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} r'^{a_1} \dots r'^{a_\ell} \nabla'_{a_1} \dots \nabla'_{a_\ell} \frac{1}{r} \Big|_{X'=P}$$

poznámky:

$$1) \nabla'_{a_1} \nabla'_{a_2} \frac{1}{r} = \nabla'_{(a_1} \nabla'_{a_2)} \frac{1}{r} \quad \text{symetrický tenzor}$$

$$2) \left(\nabla'_{a_1} \nabla'_{a_2} \frac{1}{r} \right) q^{a_1 a_2} = \underbrace{\nabla'_{a_1} \nabla'_{a_2}}_{\text{mimo } a_1, a_2} \nabla'^2 \frac{1}{r} = 0 \quad (r \neq 0)$$

$$\downarrow \nabla'_{a_1} \nabla'_{a_2} \frac{1}{r} = \nabla'_{a_1} \dots \nabla'_{a_\ell} \frac{1}{r} \quad \text{bezestupý tenzor}$$

nejnižší členy

$$\nabla'_a r = -\frac{r_a}{r} = -e_a \quad \nabla'_a r_b = -q_{ab}$$

$$r^a = x^a - x'^a \quad r = \sqrt{r^a r^b q_{ab}}$$

$$l=0 \quad \frac{1}{r}$$

$$l=1 \quad \nabla'_a \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} r_a = \frac{1}{r^2} e_a$$

$$l=2 \quad \nabla'_a \nabla'_b \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} (r_a r_b - \frac{1}{3} r^2 q_{ab}) = \frac{3}{r^3} (e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab})$$

$$l=3 \quad \nabla'_a \nabla'_b \nabla'_c \frac{1}{r} = \frac{3 \cdot 5}{r^4} r_c (r_a r_b - \frac{1}{3} r^2 q_{ab}) + \frac{3}{r^5} (-q_{ac} r_b - q_{bc} r_a + \frac{2}{3} r_c q_{ab})$$

$$= \frac{15}{r^4} \left(r_a r_b r_c - \frac{1}{5} (r^2 r_a q_{bc} + r^2 r_b q_{ac} + r^2 r_c q_{ab}) \right)$$

$$= \frac{15}{r^4} (e_a e_b e_c - \frac{1}{5} (e_a q_{bc} + e_b q_{ac} + e_c q_{ab})) = \frac{15}{r^4} (e_a e_b e_c - \frac{3}{5} e_a q_{bc})$$

lze ověřit, že slovy jsou nulové

$$l=4 \quad \nabla'_a \nabla'_b \nabla'_c \nabla'_d \frac{1}{r} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{r^5} (e_a e_b e_c e_d - \frac{6}{7} e_a e_b q_{cd}) + \frac{3}{35} q_{ab} q_{cd})$$

Použitím operace "bezstopování" $\langle \rangle$ můžeme psát

$$\nabla_a' \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} e_{\langle a} \rangle = \frac{1}{r^2} e_a$$

$$\nabla_a \nabla_b' \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} e_{\langle a} e_b \rangle = \frac{3}{r^3} (e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab})$$

$$\nabla_a \nabla_b \nabla_c' \frac{1}{r} = \frac{3 \cdot 5}{r^4} e_{\langle a} e_b e_c \rangle = \frac{3 \cdot 5}{r^4} (e_a e_b e_c - \frac{3}{5} e_{\langle a} q_{bc} \rangle)$$

$$\nabla_a \nabla_b \nabla_c \nabla_d' \frac{1}{r} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{r^5} e_{\langle a} e_b e_c e_d \rangle = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{r^5} (e_a e_b e_c e_d - \frac{6}{7} e_{\langle a} e_b q_{cd} \rangle + \frac{3}{35} q_{\langle ab} q_{cd} \rangle)$$

obecně platí

$$\nabla_{a_1}' \dots \nabla_{a_l}' \frac{1}{r} = \frac{(2l-1)!!}{r^{l+1}} e_{\langle a_1} \dots e_{a_l} \rangle$$

lze dokázat indukcí

$$\begin{aligned} \nabla_{a_1}' \dots \nabla_{a_l}' \nabla_{a_{l+1}}' \frac{1}{r} &= (2l-1)!! \nabla_{\langle a_{l+1}}' \left(\frac{1}{r^{l+1}} \Pi_{a_1} \dots \Pi_{a_l} \right) = (2l-1)!! \left[\frac{2l+1}{r^{2l+3}} \Pi_{\langle a_1} \dots \Pi_{a_{l+1}} \rangle + \frac{1}{r^{2l+1}} \nabla_{\langle a_{l+1}}' (\Pi_{a_1} \dots \Pi_{a_l} \rangle) \right] \\ &= \frac{(2l+1)!!}{r^{2l+3}} \Pi_{\langle a_1} \dots \Pi_{a_{l+1}} \rangle - (2l-1)!! \cdot l \frac{1}{r^{2l+1}} \Pi_{\langle a_1} \dots \Pi_{a_{l+1}} q_{a_l a_{l+1}} \rangle = \frac{(2l+1)!!}{r^{2l+3}} \Pi_{\langle a_1} \dots \Pi_{a_{l+1}} \rangle \end{aligned}$$

Dosažením do rozvoje $\frac{1}{r}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(x|x')} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} \Pi^{l a_1} \dots \Pi^{l a_l} e_{\langle a_1} \dots e_{a_l} \rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \underbrace{\frac{r^{l l}}{r^{l+1}} e_{\langle a_1} \dots e_{a_l} \rangle}_{\frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l} \underbrace{e_{\langle a_1} \dots e_{a_l} \rangle}_{\text{rozvoj } \sim \frac{r'}{r} \ll 1} \end{aligned}$$

jedna závorka lze vynechat

Tenzorové multipóly

dosažením rozvoje $1/r$ do potenciálu

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{i\mathbf{a}_1 \dots e^{i\mathbf{a}_l} \dots} (2l-1)!! \int \underbrace{r_{a_1}^1 \dots r_{a_l}^l}_{Q_{(l)a_1 \dots a_l} \text{ l-tý moment nábojového rozložení}} \rho(x') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{i\mathbf{a}_1 \dots e^{i\mathbf{a}_l} \dots} (2l-1)!! Q_{(l)a_1 \dots a_l} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{l+1}} e^{i\mathbf{a}_1 \dots e^{i\mathbf{a}_l} \dots} M_{(l)a_1 \dots a_l}\end{aligned}$$

$$M_{(l)a_1 \dots a_l} = (2l-1)!! Q_{(l)a_1 \dots a_l} \quad \text{l-tý multipól} = 2^l\text{-pól}$$

$$Q_{(l)a_1 \dots a_l} = \int r_{a_1}^1 \dots r_{a_l}^l \rho dV \quad \text{l-tý moment náboje}$$

elektrická intenzita 2^l -pólu

$$E^a = -\nabla^a \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l!} \frac{1}{r^{2l+1}} r_{a_1}^1 \dots r_{a_l}^l M_{(l)a_1 \dots a_l} \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l!} \left[(2l+1) \frac{1}{r^{2l+2}} \frac{r^a}{r} r_{a_1}^1 \dots r_{a_l}^l - \frac{l}{r^{2l+1}} \frac{\partial}{\partial r} (r_{a_1}^1 \dots r_{a_l}^l) \right] M_{(l)a_1 \dots a_l}$$

l-členů z derivace každého r^{a_i}
→ vede k symmetrizaci přes indexy $a_1 \dots a_l$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l+1}{l!} \frac{1}{r^{2l+2}} \left[e^a e_{a_1} \dots e_{a_l} M_{(l)a_1 \dots a_l} - \frac{l}{2l+1} e_{a_2} \dots e_{a_l} M_{(l)a_2 \dots a_l}^a \right]$$

medistribucím vyjádřit platný pro $r \neq 0$

Závislost multipólů na volbě počátku

obecně multipóly závisí na volbě P

nejnižší nenulový moment nezávisí na volbě počátku

necht' $Q_{(k)} = 0 \quad k=0, 1, \dots, k-1 \quad Q_{(k)} \neq 0$

posun počátku

$$\tilde{P} = P + \vec{d} \quad X = P + \vec{r} = \tilde{P} + \tilde{\vec{r}} \quad \tilde{\vec{r}} = \vec{r} - \vec{d}$$

moment vůči \tilde{P}

$$\tilde{Q}_{(k)}^{a_1 \dots a_k} = \int \tilde{r}^{a_1} \dots \tilde{r}^{a_k} \rho(x) dV = \int (r^{a_1} - d^{a_1}) \dots (r^{a_k} - d^{a_k}) \rho dV$$

$$= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m d^{(a_1 \dots a_m)} \underbrace{d^{a_{m+1}} \dots d^{a_k} \int r^{a_{m+1}} \dots r^{a_k} \rho dV}_{Q_{(k-m)} = 0 \text{ pro } m > 0}$$

$$= Q_{(k)}^{a_1 \dots a_k}$$

↓

nejnižší nenulový multipól nezávisí na volbě počátku
- charakterizuje dominantní chování vzdáleného pole

Monojól $l=0$

$$Q \equiv M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e}$$

Dipól $l=1$

$$p^a = M_{(1)}^a = Q_{(1)}^a = \int r^a \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} e^a p_a$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3e^a e^b p_b - p^a) \quad (\text{mimo samotný dipól})$$

Kvadrupól $l=2$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3 Q_{(2)}^{ab} = \int (3r^a r^b - r^2 q^{ab}) \rho \, dV$$

$$Q_{(2)}^{ab} = \int r^a r^b \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} e^a e^b K_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} r^a r^b K_{ab}$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{5}{r^6} \frac{r^a}{r} \frac{1}{2} r^b r^c K_{bc} - \frac{1}{r^5} r^b K_{ab}^a \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \left[\frac{5}{2} e^a e^b e^c K_{bc} - K_{ab}^a e^b \right]$$

Oktajól $l=3$

$$M_{(3)}^{abc} = 15 Q_{(3)}^{abc} = 15 \int (r^a r^b r^c - \frac{3}{5} r^2 r^{(a} q^{bc)}) \rho \, dV$$

$$Q_{(3)}^{abc} = \int r^a r^b r^c \rho \, dV$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \frac{1}{3!} e^a e^b e^c M_{(3)abc}$$

$$E^a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[\frac{7}{6} e^a e^b e^c e^d M_{(3)bcd} - \frac{1}{2} M_{(3)bc}^a e^b e^c \right]$$

Příklady

$$1) \quad Q = M_{(0)} = Q_{(0)} = \int \rho \, dV = q - q = 0$$

$$\vec{p} = \vec{M}_{(0)} = \vec{Q}_{(0)} = \int \vec{r} \rho \, dV = q \frac{\vec{u}}{2} - q \left(-\frac{\vec{u}}{2} \right) = q \vec{u}$$

$$2) \quad Q = q + q - q - q = 0$$

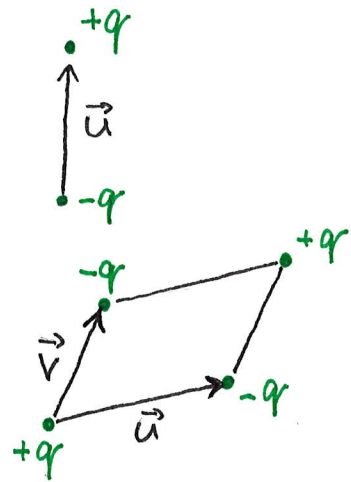
$$\vec{p} = q \left(-\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2} \right) + q \left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2} \right) - q \left(\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2} \right) - q \left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2} \right) = 0$$

$$Q^{ab} = \frac{q}{4} \left[(-u-v)^a (-u-v)^b + (u+v)^a (u+v)^b - (u-v)^a (u-v)^b - (-u+v)^a (-u+v)^b \right]$$

$$= q \left[u^a v^b + v^a u^b \right] = 2q u^{(a} v^{b)}$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3Q_{(2)}^{ab} = 6q u^{(a} v^{b)} = 6q \left(u^{(a} v^{b)} - \frac{1}{3} q^{ab} u^m v_m \right)$$

$$\vec{K} = 6q \langle \vec{u} \vec{v} \rangle = 6q \left(\frac{1}{2} (\vec{u} \vec{v} + \vec{v} \vec{u}) - \frac{1}{3} q \vec{u} \cdot \vec{v} \right)$$



$$3) \quad Q = 4q - q - q - q - q = 0$$

$$\vec{p} = -qs \vec{e}_x - q(-s \vec{e}_x) - qs \vec{e}_y - q(-s \vec{e}_y) = 0$$

$$Q_{(2)} = -qs^2 \left[\vec{e}_x \vec{e}_x + (-\vec{e}_x)(-\vec{e}_x) + \vec{e}_y \vec{e}_y + (-\vec{e}_y)(-\vec{e}_y) \right]$$

$$= -2qs^2 (\vec{e}_x \vec{e}_x + \vec{e}_y \vec{e}_y) = 2qs^2 (\vec{e}_z \vec{e}_z - \tilde{q})$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3Q_{(2)}^{ab} = 6qs^2 e_z^a e_z^b = 2qs^2 (2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b)$$

upřesnět vzhledem k $\vec{p} = P - s \vec{e}_x$

$$Q_{(2)}^{ab} = qs^2 \left(4 \vec{e}_x \vec{e}_x - (2\vec{e}_x)(2\vec{e}_x) - (\vec{e}_x + \vec{e}_y)(\vec{e}_x + \vec{e}_y) - (\vec{e}_x - \vec{e}_y)(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \right)$$

$$= -2qs^2 (\vec{e}_x \vec{e}_x + \vec{e}_y \vec{e}_y) \quad \leftarrow \text{stejně jako uúú P}$$

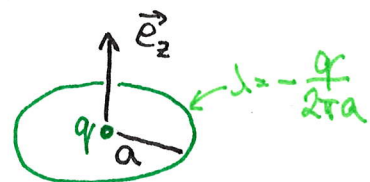
$$4) \quad Q = q + \int \lambda \, ds = q - q = 0$$

$$\vec{p} = \int \vec{r} \lambda \, ds = 0$$

$$Q_{(2)}^{ab} = \int r^a r^b \lambda \, ds = \frac{2\pi a}{3} \lambda a^2 q_{\perp}^{ab} \quad \Leftarrow \int e^a e^b \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} q^{ab} \Leftarrow \text{symetrie stopy}$$

$$= -\frac{1}{3} qa^2 (e_x^a e_x^b + e_y^a e_y^b) = \frac{1}{3} qa^2 (e_z^a e_z^b - q^{ab})$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3Q_{(2)}^{ab} = qa^2 e_z^a e_z^b = \frac{1}{3} qa^2 (2e_z^a e_z^b - e_x^a e_x^b - e_y^a e_y^b)$$

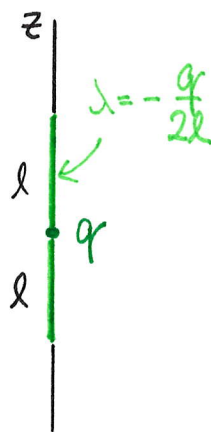


$$5) Q = q + \int \lambda ds = q - q = 0$$

$$\vec{p} = \int \vec{r} \lambda ds = 0$$

$$\vec{Q}_{(2)} = \lambda \vec{e}_z \vec{e}_z \int_{-l}^l z^2 dz = -\frac{q}{2l} \frac{2}{3} l^3 \vec{e}_z \vec{e}_z = -\frac{1}{3} q l^2 \vec{e}_z \vec{e}_z$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3 \vec{Q}_{(2)}^{(ab)} = -q l^2 \langle \vec{e}_z^a \vec{e}_z^b \rangle \\ = -\frac{1}{3} q l^2 (2 e_z^c e_z^b - e_x^c e_x^b - e_y^c e_y^b)$$



$$6) Q = 0$$

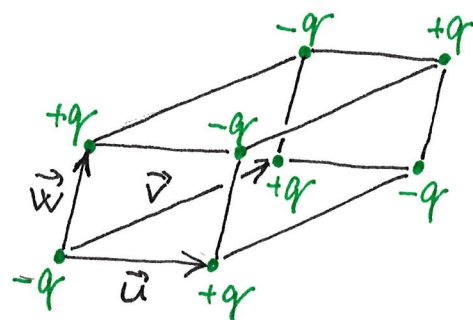
$$\vec{p} = \vec{M}_{(1)} = \vec{Q}_{(1)} = \frac{1}{2} q [(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) - (-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}) \\ - (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + (-\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) \\ - (\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \\ - (-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + (\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})] = 0$$

$$Q_{(2)}^{ab} = \frac{q}{4} [(u+v+w)^a (u+v+w)^b - (-u-v-w)^a (-u-v-w)^b \\ - (u+v-w)^a (u+v-w)^b + (-u-v+w)^a (-u-v+w)^b \\ - (u-v+w)^a (u-v+w)^b + (-u+v-w)^a (-u+v-w)^b \\ - (-u+v+w)^a (-u+v+w)^b + (u-v-w)^a (u-v-w)^b] = 0$$

$$K^{ab} = M_{(2)}^{ab} = 3 Q_{(2)}^{ab} = 0$$

$$Q_{(3)}^{abc} = \frac{q}{8} [(u+v+w)^a (u+v+w)^b (u+v+w)^c - (-u-v-w)^a (-u-v-w)^b (-u-v-w)^c \\ - (u+v-w)^a (u+v-w)^b (u+v-w)^c + \dots \\ - (u-v+w)^a (u-v+w)^b (u-v+w)^c + \dots \\ - (u+v+w)^a (-u+v+w)^b (-u+v+w)^c + \dots] = \\ = 6q u^a v^b w^c$$

$$M_{(3)}^{abc} = 15 Q_{(3)}^{abc} = 90 q u^a v^b w^c$$



Kanoničká reprezentace multipólů

neexistuje jednodušší kanoničká reprezentace
vyšších multipólů

pro $l=1,2,3$ viz příklady 1) 2) 6)

matematické reprezentace

libovolný symetrický bezstopý tenzor stupně l lze
parametrizovat velikostí a l jednotkovými směry

$$M_{(l)}^{a_1 \dots a_l} = M \langle e_1^{a_1} \dots e_l^{a_l} \rangle$$

$$\vec{M}_{(l)} = M \langle \vec{e}_1 \dots \vec{e}_l \rangle$$

kde

M "velikost" - 1 parametr

\vec{e}_j jednotkový vektor - 2 parametry θ_j, φ_j

\Downarrow
 $2l+1$ nezávislých parametrů

obtížné dokázat
nemí moc užitečné

Nezávislé komponenty multipólu

zvolme komplexní bázi

$$\vec{f}_0 = \vec{e}_z \quad \vec{f}_0^2 = 1$$

$$\vec{f}_+ = \vec{e}_x + i\vec{e}_y \quad \vec{f}_+^2 = \vec{e}_x^2 - \vec{e}_y^2 = 0$$

$$\vec{f}_- = \vec{e}_x - i\vec{e}_y \quad \vec{f}_-^2 = \vec{e}_x^2 - \vec{e}_y^2 = 0$$

$$\vec{f}_0 \cdot \vec{f}_+ = \vec{f}_0 \cdot \vec{f}_- = 0 \quad \vec{f}_- \cdot \vec{f}_+ = \vec{e}_x^2 + \vec{e}_y^2 = 2$$

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g^{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

neortogonální báze!
tj. "nulová" báze

stopa symetrického tenzoru

$$T_{ab} g^{ab} = T_{00} + \frac{1}{2} T_{+-} + \frac{1}{2} T_{-+} = T_{00} + T_{-+}$$

pro bezestopý tenzor

$$0 = T_{00} + T_{-+} \Rightarrow T_{-+} = T_{+-} = -T_{00}$$

nezávislé složky symetrického bezestopého tenzoru

$$T_{\dots 0 \dots 0} \quad T_{0 \dots 0} \quad T_{++ \dots + 0 \dots 0}$$

všechny ostatní lze na tyto převést

$T_{0 \dots 0}$ reálné

$T_{\dots 0 \dots 0}$, $T_{++ \dots + 0 \dots 0}$ komplexní $T_{\underbrace{++ \dots +}_m 0 \dots 0} = T_{\underbrace{\dots 0 \dots 0}_m}^*$

pro stupeň l máme $2l+1$ reálných složek

značení pro multipóly

$$M_l^m = \left\{ \begin{array}{ll} m > 0 & \square M_{(l) \underbrace{++ \dots +}_m 0 \dots 0} \\ m = 0 & \square M_{(l) 0 \dots 0} \\ m < 0 & \square M_{(l) \underbrace{\dots 0 \dots 0}_{-m}} \end{array} \right\} \text{ pro } m = -l, \dots, l$$

Legendreovy polynomy

Polynomy $P_l(\zeta)$ stupně $l \in \mathbb{N}_0$ definované na intervalu $\zeta \in (-1, 1)$.

Explicitní vyjádření:

$$P_l(\zeta) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \leq l}} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2l-n)!}{n!(l-n)!(l-2n)!} \zeta^{l-2n}$$

Rodriguesova formule:

$$P_l(\zeta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\zeta^l} (\zeta^2 - 1)^l$$

Legendreova rovnice:

$$(1 - \zeta^2) \frac{d^2 P_l}{d\zeta^2}(\zeta) - 2\zeta \frac{dP_l}{d\zeta}(\zeta) + l(l+1)P_l(\zeta) = 0$$

Legendreovy polynomy jako vlastní funkce operátoru:

$$-\frac{d}{d\zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} \right] P_l(\zeta) = l(l+1) P_l(\zeta)$$

Rekurentní vztah:

$$P_l(\zeta) = \frac{2l-1}{l} \zeta P_{l-1}(\zeta) - \frac{l-1}{l} P_{l-2}(\zeta) \quad P_0(\zeta) = 1 \quad P_1(\zeta) = \zeta$$

Generující funkce:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta t + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\zeta) t^l$$

Krajní hodnoty:

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^1 P_l(\zeta) P_{l'}(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad \int_0^\pi P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Relace úplnosti:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\zeta) P_l(\zeta') = \delta(\zeta - \zeta') \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta')$$

Separace úhlu:

$$\int P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}_1) P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}_2) d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)$$

Legendreovy polynomy pro $l \leq 4$:

$$P_0(\zeta) = 1$$

$$P_1(\zeta) = \zeta$$

$$P_2(\zeta) = \frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\zeta) = \frac{5}{2}\zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta$$

$$P_4(\zeta) = \frac{35}{8}\zeta^4 - \frac{15}{4}\zeta^2 + \frac{3}{8}$$

Přidružené Legendreovy polynomy

Obecná Legendreova rovnice pro přidružené Legendreovy funkce:

$$\frac{d}{d\zeta} \left((1 - \zeta^2) \frac{dP_l^m}{d\zeta}(\zeta) \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \zeta^2} \right) P_l^m(\zeta) = 0$$

Přidružené Legendreovy "polynomy" - celočíselné parametry $l = 0, 1, \dots$, $m = -l, \dots, l$:

$$P_l^m(\zeta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\zeta^{l+m}} (\zeta^2 - 1)^l$$

Vztah k Legendreovým polynomům:

$$P_l^m(\zeta) = (-1)^m (1 - \zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\zeta^m} P_l(\zeta) \quad m \geq 0 \quad P_l^0(\zeta) = P_l(\zeta)$$

Vztah pro opačné m :

$$P_l^{-m}(\zeta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\zeta)$$

Relace ortogonality:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\zeta) P_{l'}^m(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad \int_{-1}^1 P_l^m(\zeta) P_{l'}^{m'}(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2} = \frac{1}{m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

Kulové funkce (sférické harmoniky)

Parametrizace jednotkového vektoru \vec{e} pomocí sférických úhlů:

$$\vec{e} = \cos \vartheta \vec{e}_z + \sin \vartheta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$$

Integrační element na jednotkové sféře:

$$d\Omega \equiv d\vec{e} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = d\zeta d\varphi \quad \zeta = \cos \vartheta$$

2D δ -funkce na jednotkové sféře:

$$\delta^{(2)}(\vec{e} | \vec{e}') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \delta(\zeta - \zeta') \delta(\varphi - \varphi')$$

$$f(\vec{e}) = \int \delta^{(2)}(\vec{e} | \vec{e}') f(\vec{e}') d\Omega' = \int \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') f(\vartheta', \varphi') \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

Kulové funkce - komplexní funkce na jednotkové sféře ($l = 0, 1, \dots$, $m = -l, \dots, l$):

$$Y_l^m(\vec{e}) \equiv Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi)$$

Komplexně sdružené funkce:

$$Y_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\vec{e})$$

Kulové funkce jako vlastní funkce operátoru:

$$-\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_l^m(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m \quad -i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m = m Y_l^m$$

Relace ortogonality a úplnosti:

$$\int Y_l^m(\vec{e}) Y_{l'}^{m'}(\vec{e})^* d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^* = \delta^{(2)}(\vec{e} | \vec{e}')$$

Rozklad Legendreova polynomu:

$$\sum_{m=-l}^l Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^* = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}')$$

Rozklad faktoru $\frac{1}{r}$ do Legendreových polynomů

máme

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{r^l}{r^{2l+1}} e^{a_1} \dots e^{a_l} e'_{a_1} \dots e'_{a_l}$$

$$e^{a_1} \dots e^{a_l} \left(e'_{a_1} \dots e'_{a_l} - \alpha_1 q_{a_1 a_2} e'_{a_3} \dots e'_{a_l} - \alpha_2 q_{a_1 a_2} q_{a_3 a_4} e'_{a_5} \dots e'_{a_l} - \dots \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{2l+1}} P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}')$$

kte $P_l(\eta)$ jsou Legendreovy polynomy

- polynomy stupně l s mocniny $l, l-2, l-4, \dots$
 - $P_l(\eta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\eta^l} (\eta^2 - 1)^l$
- více viz tabulka

dostáváme tak

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r^{2l+1}} P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}')$$

z geometrie $r(X|X') = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma)$$

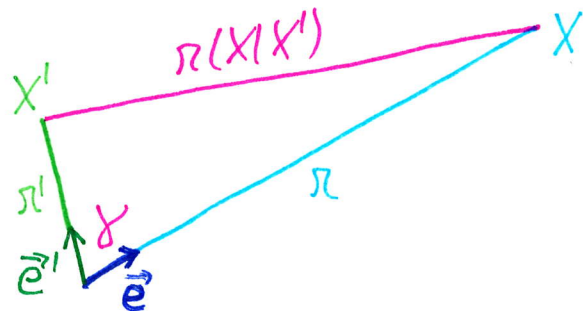
vztahující se pro Legendreovy polynomy

konkrétně ($\eta = \vec{e} \cdot \vec{e}'$)

$$\frac{1}{r(X|X')} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1} \frac{r'}{r^2} e^a e'_a + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \frac{r'^2}{r^3} e^a e^b (e'_a e'_b - \frac{1}{3} q_{ab}) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{r'^3}{r^4} e^a e^b e^c (e'_a e'_b e'_c - \frac{3}{5} e'_a q_{bc}) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{r'^4}{r^5} e^a e^b e^c e^d (e'_a e'_b e'_c e'_d - \frac{6}{7} e'_a e'_b q_{cd} + \frac{3}{35} q_{ab} q_{cd}) + \dots$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \vec{e} \cdot \vec{e}' + \frac{r'^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} (\vec{e} \cdot \vec{e}')^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{r'^3}{r^4} \left(\frac{5}{2} (\vec{e} \cdot \vec{e}')^3 - \frac{3}{2} (\vec{e} \cdot \vec{e}') \right) + \frac{r'^4}{r^5} \left(\frac{35}{8} (\vec{e} \cdot \vec{e}')^4 - \frac{15}{4} (\vec{e} \cdot \vec{e}')^2 + \frac{3}{8} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{r} P_0(\eta) + \frac{r'}{r^2} P_1(\eta) + \frac{r'^2}{r^3} P_2(\eta) + \frac{r'^3}{r^4} P_3(\eta) + \frac{r'^4}{r^5} P_4(\eta) + \dots$$



dostáváme

$$P_0(\eta) = 1$$

$$P_1(\eta) = \eta$$

$$P_2(\eta) = \frac{3}{2} \eta^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\eta) = \frac{5}{2} \eta^3 - \frac{3}{2} \eta$$

$$P_4(\eta) = \frac{35}{8} \eta^4 - \frac{15}{4} \eta^2 + \frac{3}{8}$$

Rozklad faktorů $\frac{1}{r}$ do sférických harmonik

máme

$$\frac{1}{r(x|x')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!} \frac{r'^l}{r^{l+1}} \underbrace{e_{\langle a_1 \dots a_l \rangle} e'_{\langle b_1 \dots b_l \rangle} q^{a_1 b_1} \dots q^{a_l b_l}}_{\text{vyjádříme v bázi } \vec{f}_0, \vec{f}_+, \vec{f}_-}$$

vyjádříme v bázi $\vec{f}_0, \vec{f}_+, \vec{f}_-$
součet přes komponenty bude obsahovat

$$q^{ab} = \begin{matrix} & 0 & + & - \\ + & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \longrightarrow$$

$\langle ++ \dots 0+ \rangle \langle -- \dots 0- \rangle$
vždy doplnkové znaménka
všechny komponenty lze převést na
 $\langle \dots 0 \dots 0 \rangle \langle 0 \dots 0 \rangle \langle + \dots + 0 \dots 0 \rangle$
dostáváme

$$\vec{f}_0 = \vec{e}_z$$

$$\vec{f}_{\pm} = \vec{e}_x \pm i\vec{e}_y$$

$$\sum_{m=-l}^l \boxed{l, m} E_l^m E_l^{l-m}$$

↑
numerický faktor včetně počet divalentních komponent

zde

$$E_l^m = \begin{cases} m \geq 0 & \underbrace{e_{\langle + \dots + e_0 \dots e_0 \rangle}}_m = e_{\langle a_1 \dots a_l \rangle} f_{+}^{a_1} \dots f_{+}^{a_m} f_0^{a_{m+1}} \dots f_0^{a_l} \\ m \leq 0 & \underbrace{e_{\langle - \dots - e_0 \dots e_0 \rangle}}_{-m} = e_{\langle a_1 \dots a_l \rangle} f_{-}^{a_1} \dots f_{-}^{a_m} f_0^{a_{m+1}} \dots f_0^{a_l} \end{cases}$$

maří:

$$E_2^{-1} = (e_a e_b - \frac{1}{3} q_{ab}) \underbrace{f_{-}^a f_0^b}_2 = (\vec{e} \cdot \vec{f}_0) (\vec{e} \cdot \vec{f}_-)$$

$$E_4^2 = (e_a e_b e_c e_d - \frac{6}{7} e_a e_b q_{cd}) + \frac{3}{35} q_{(ab} q_{cd}) \underbrace{f_{+}^a f_{+}^b f_0^c f_0^d}_4$$

$$= (\text{polynom v } \vec{e} \cdot \vec{f}_0) \cdot (\vec{e} \cdot \vec{f}_+)^2$$

díky $\vec{f}_+^a f_+^b q_{ab} = 0 \quad \vec{f}_+^a f_0^b q_{ab} = 0$

platí $\vec{e} \cdot \vec{f}_{\pm} = \sin \vartheta \exp(\pm i\varphi) \iff \vec{e} = \cos \vartheta \vec{e}_z + \sin \vartheta (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y)$
 $\vec{e} \cdot \vec{f}_0 = \cos \vartheta \quad \vec{e} \cdot \vec{f}_{\pm} = \sin \vartheta (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) = \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$

obecně

$$E_l^m = \boxed{l, m} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(im\varphi) = \boxed{l, m} Y_l^m(\vec{e})$$

↑
normalizace funkce pouze φ -závislá část
 $\cos \vartheta = \vec{e} \cdot \vec{f}_0 \quad (\vec{e} \cdot \vec{f}_{\pm})^m$

dosažením do rozvoje $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r(x|x')} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{r^{l2}}{r^{2l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^* \leftarrow \text{plyno } P_l \\ E_l^{l-m} = E_l^{lm*}$$

zde Y_l^m jsou kulové funkce (sférické harmoniky)

$$Y_l^m(\vec{e}) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \exp(im\varphi)$$

zde P_l^m jsou předružené Legendreovy polynomy

$$P_l^m(\eta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-\eta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\eta^{l+m}} (\eta^2-1)^l$$

platí

$$Y_l^m(\vec{e})^* = (-1)^m Y_l^{-m}(\vec{e})$$

více viz tabulka

dostáváme též

$$P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}') = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_l^m(\vec{e}) Y_l^m(\vec{e}')^*$$

Multipólový rozvoj ve sférických harmonických
dosazením rozkladu $1/r$ do potenciálu

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} Y_l^m(\vec{e}) \underbrace{\left[\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r'^l Y_l^{m*}(\vec{e}') \rho(x') dV' \right]}_{\text{sférický multipól } M_l^m}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\vec{e}) M_l^m$$

kde sférický multipól je

$$M_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r'^l Y_l^{m*}(\vec{e}') \rho(x) dV$$

Axiálně symetrické pole

necht' nábojové rozložení závisí na φ
(axiálně symetrické rozložení)

$$\varphi(x) = \varphi(r, \vartheta)$$

pro sférický multipól dostáváme

$$M_l^m = \boxed{l, m} \int r^{l+2} P_l^m(\cos \vartheta) \exp(-im\varphi) \varrho(r, \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

můžeme vytknout integrál přes φ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi) d\varphi = \begin{cases} m \neq 0 & \left[\frac{i}{m} \exp(-im\varphi) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ m = 0 & [1]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi \end{cases}$$

↓

$$M_l^m = 0 \quad \text{pro } m \neq 0$$

$$\begin{aligned} M_l^0 &= \int r^l P_l(\cos \vartheta) \varrho(r, \vartheta) \overbrace{r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi}^{dV} \\ &= 2\pi \int r^{l+2} P_l(\zeta) \varrho(r, \zeta) dr d\zeta \quad \zeta = \cos \vartheta \end{aligned}$$

potenciál

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta) M_l^0$$

rozvoj potenciálu podél osy pro velič $z = \frac{1}{\eta}$

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{z^{l+1}} M_l^0 \quad \text{na ose}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{d^l \phi}{dz^l} \Big|_{z=0} \frac{1}{z} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} \frac{d^{l+1} \phi}{dz^{l+1}} \Big|_{z=0} \frac{1}{z^{l+1}}$$

porovnáním dostaneme multipóly ze znalosti
potenciálu na ose

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} M_l^0 = \frac{1}{(l+1)!} \frac{d^{l+1} \phi}{dz^{l+1}} \Big|_{z=0} \quad \eta = \frac{1}{z}$$