Zápočtový problém č. 2

NOFY126 – Klasická elektrodynamika, LS 2022

termín odevzdání: 20. 5. 2022

Koaxiální vlnovod

Uvažujme velmi dlouhý (nekonečný) přímý koaxiální kabel orientovaný podél osy z, jehož vnitřní vodič je tvořen vodivým válcem poloměru R_- a vnější vodič vodivou válcovou plochou vnitřního poloměru R_+. Vnitřní i vnější vodič jsou ideálního vodiče. Prostor mezi vnitřním a vnějším vodičem tvoří přímý vlnovod s průřezem daným mezikružím o poloměrech $R_- < R_+$.

V tomto vlnovodu chceme zkoumat tzv. transverzální elektromagnetické (TEM) pole. To znamená, že elektrické pole $\boldsymbol{E}$ a magnetické pole $\boldsymbol{B}$ nemá podélnou složku ve směru z. V samotných ideálních vodičích budou pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ nulová.

Pole budeme popisovat pomocí skalárního potenciálu ϕ a vektorového potenciálu $\boldsymbol{A}$. Vektorový potenciál uvažujme ve tvaru $\boldsymbol{A} = A\,\boldsymbol{e}_z$, kde $\boldsymbol{e}_z$ je jednotkový vektor ve směru vlnovodu.

Pole ve vodičích

Potenciály v ideálních vodičích uvažujme závislé pouze na souřadnicích t a z

$$\phi\big|_{\text{vnitřní vodič}} = \phi_-(t,z)\ , \qquad \phi\big|_{\text{vnější vodič}} = \phi_+(t,z)\ ,$$
$$A\big|_{\text{vnitřní vodič}} = A_-(t,z)\ , \qquad A\big|_{\text{vnější vodič}} = A_+(t,z)\ .$$

(i) Vyjádřete elektrickou intenzitu $\boldsymbol{E}$ a magnetickou indukci $\boldsymbol{B}$ pomocí potenciálů a určete podmínky pro funkce $\phi_\pm$ a $A_\pm$ zajišťující vymizení $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ ve vodičích.

Potenciály ϕ a $\boldsymbol{A}$ musí mimo zdroje splňovat homogenní vlnové rovnice. Jelikož směr $\boldsymbol{e}_z$ vektorového potenciálu uvažujeme konstantní, vlnovou rovnici můžeme napsat přímo pro skalár A:

$$\Box\phi = 0\ , \qquad \Box A = 0\ .$$

Vlnový operátor $\Box$ se nám v cylindrických souřadnicích $\{z,\, R,\, \varphi\}$ separuje do tvaru

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \triangle\ , \qquad \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

kde $\triangle$ je Laplaceův operátor v rovině $z = \text{konst.}$.

Uvnitř vodičů se nám tak vlnové rovnice omezí pouze na podmínky ve směrech t, z

$$\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi_\pm = 0\ , \qquad \left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]A_\pm = 0\ .$$

(ii) Napište řešení ve tvaru vlny obecného profilu $f_\pm(z)$ šířící se v kladném směru osy z. Zde profilem míníme tvar vlny v čase $t = 0$, tj.

$$\phi_\pm(0,z) = f_\pm(z)\ .$$

Napište jak potenciál $\phi_\pm(t,z)$, tak potenciál $A_\pm(t,z)$. Integrační konstanty položte rovny nule.

Nalezené potenciály v ideálních vodičích jsou samozřejmě kalibračně triviální – vedou na nulová pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$. Musí tak být možné je vygenerovat kalibrační transformací danou funkcí $\psi(t,z)$,

$$\phi_\pm = -\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t}\ , \qquad A_\pm = \frac{\partial\psi_\pm}{\partial z}\ .$$

Druhá rovnice plyne z obecného vztahu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\psi$ a našich předpokladů o směru $\boldsymbol{A}$ a prostorové závislosti ψ.

(iii) Vyjádřete $\psi_\pm$ pomocí primitivní funkce $F_\pm$ profilové funkce (tj. $f_\pm = F'_\pm$).

Pole ve vlnovodu

Přestože jsou potenciály ve vodičích kalibračně triviální, hrají důležitou roli okrajových podmínek pro úlohu uvnitř vlnovodu. O potenciálech ϕ a A uvnitř vlnovodu ($R_- < R < R_+$) budeme předpokládat, že splňují transverzální Lapalaceovu úlohu

$$\triangle\, \phi = 0\ , \qquad \triangle\, A = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$\phi\big|_{R=R_\pm} = \phi_\pm\ , \qquad A\big|_{R=R_\pm} = A_\pm$$

a to pro každé t a z.

(iv) Nalezněte potenciály ϕ a A ve vlnovodu v závislosti na $\phi_\pm$ a $A_\pm$ (ty již máme vyjádřené pomocí $f_\pm$). Využijte vyjádření $\triangle$ v cylindrických souřadnicích výše a fakt, že okrajové podmínky nezávisejí na úhlové souřadnici φ. Zkontrolujte, že potenciály splňují i plnou homogenní vlnovou rovnici.

(v) Nalezněte odpovídající pole $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ uvnitř vlnovodu.

Napětí a magnetický tok

Jelikož skalární potenciál splňuje v transverzálním směru elektrostatickou rovnici a transverzální složky elektrické intenzity $\boldsymbol{E}$ jsou dány pouze gradientem ϕ, má smysl zavést napětí mezi oběma vodiči

$$V(t,z) = \phi_+(t,z) - \phi_-(t,z)\ .$$

Magnetické pole $\boldsymbol{B}$ by mělo vyjít v tangenciálním směru $\boldsymbol{e}_\varphi$. Můžeme tak napočítat magnetický tok Ψ skrze smyčku v rovině $\varphi =$ konst. mající dvě strany délky ℓ ve směru $\boldsymbol{e}_z$, jedna vedoucí vnitřním vodičem a druhá vnějším vodičem, a zbývající dvě strany ve směru $\boldsymbol{e}_R$. Magnetický tok lze převést na cirkulaci vektorového potenciálu podél smyčky. Jelikož vektorový potenciál $\boldsymbol{A}$ má pouze složku ve směru osy z, dostáváme

$$\Psi = \int\limits_S \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dS} = \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{ds} = (A_+ - A_-)\ell\ .$$

Zavedeme-li lineární hustotu magnetického toku $\tilde{\Psi} = \Psi/\ell$, můžeme psát

$$\tilde{\Psi}(t,z) = A_+(t,z) - A_-(t,z)\ .$$

Náboj a kapacita

Podmínky navázání elektrického pole na okraji vlnovodu říkají

$$\boldsymbol{n}_\pm\cdot\boldsymbol{E}\big|_{R=R_\pm} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_\pm\ , \qquad \boldsymbol{n}_\pm\times\boldsymbol{E}\big|_{R=R_\pm} = 0\ ,$$

kde $\sigma_\pm$ je plošná nábojová hustota na povrchu vodiče a $\boldsymbol{n}_\pm$ normála k povrchu vodiče směřující do vlnovodu, $\boldsymbol{n}_\pm = \mp\boldsymbol{e}_R$. Lineární hustota $\lambda_\pm$ náboje na vodiči je pak daná integrálem plošné hustoty $\sigma_\pm$ v řezu vodiče $z =$ konst.,

$$\lambda_\pm = \int \sigma_\pm ds = \int\limits_0^{2\pi} \sigma_\pm R_\pm d\varphi = 2\pi R_\pm \sigma_\pm\ .$$

(vi) Dosazením výše nalezených polí do podmínky navázání nalezněte $\sigma_\pm$ a vyjádřete hustoty λ_+ a λ_- pomocí napětí V. Měli byste dostat, že celkový náboj v každém řezu koaxiálního vodiče je nulový, tj.

$$\lambda_+ + \lambda_- = 0 \qquad \text{neboli} \qquad \lambda_\pm = \pm\lambda\ .$$

Určete lineární hustotu kapacity koaxiálního vodiče $\tilde{C}$ danou vztahem

$$\lambda = \tilde{C}\,V\ .$$

Proud a indukčnost

Podmínky navázání magnetického pole na okraji vlnovodu jsou

$$\boldsymbol{n}_\pm \cdot \boldsymbol{B}\big|_{R=R_\pm} = 0 \;, \qquad \boldsymbol{n}_\pm \times \boldsymbol{B}\big|_{R=R_\pm} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\, \boldsymbol{\iota}_\pm \;,$$

kde $\boldsymbol{\iota}_\pm$ je plošná proudová hustota na povrchu vodiče.

(vii) Dosazením nalezeného pole $\boldsymbol{B}$ do podmínky navázání ukažte, že proudová hustota na povrchu vodičů nemá složku ve směru $\boldsymbol{e}_\varphi$,

$$\boldsymbol{\iota}_\pm = \iota_\pm\, \boldsymbol{e}_z$$

Ukažte pak, že celkové proudy vodiči skrze řez $z =$ konst. I_- a I_+

$$I_\pm = \int \iota_\pm ds = \int_0^{2\pi} \iota_\pm R_\pm d\varphi = 2\pi R_\pm \iota_\pm$$

jsou navzájem opačné

$$I_- + I_+ = 0 \qquad \text{neboli} \qquad I_\pm = \pm I \;.$$

Vyjádřete proud I pomocí lineární hustoty magnetického toku $\tilde{\Psi}$. Určete lineární hustotu indukčnosti koaxiálního vodiče $\tilde{L}$ danou vztahem

$$\tilde{\Psi} = \tilde{L}\, I \;.$$

Odpor obvodu

(viii) Vyjádřete napětí $V(t, z)$ pomocí proudu $I(t, z)$ (vzpomeňte na vyjádření pomocí profilových funkcí) a nalezněte lineární hustotu efektivní resistance $\tilde{R}$ obvodu

$$V = \tilde{R}\, I \;.$$

Zkuste rozmyslet, kam ‘odchází’ energie efektivně ‘spotřebovávaná’ Jouleovým teplem příslušícím odporu $\tilde{R}$, když obvod neobsahuje žádné ohmické vodiče, kde by se mohla přetvářet na teplo.

Kontrola: Veličiny $\sqrt{\dfrac{\tilde{L}}{\tilde{C}}}$ a $\dfrac{1}{\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}}$ by měly vyjít povědomě.

Tok energie vlnovodem

(ix) Vyjádřete hustotu elektromagnetické energie u ve vlnovodu pomocí součinu napětí a proudu VI.

(x) Nalezněte Poyntingův vektor $\boldsymbol{S}$ uvnitř vlnovodu opět pomocí součinu VI.

Kontrola: Jaká vychází ‘rychlost toku’ $\boldsymbol{v}$ elektromagnetické energie intuitivně daná vztahem $\boldsymbol{S} = u\,\boldsymbol{v}$?