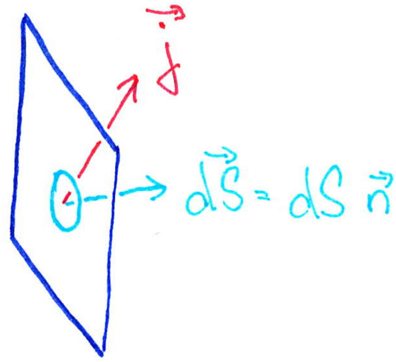
Tok náboje

hustota toku náboje

$\vec{j}$ množství náboje / čas / plochu + směr toku

proud skrze plochu S

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



zákon zachování náboje

náboj nevzniká a nezaniká
pouze se přemisťuje

oblast V (neměnná v čase) – změna za čas dt

$$\frac{dQ_{uvnitř}}{dt} = -I_{ven}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho \, dV = -\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$\Downarrow$ ⇐ konstantnost V v čase, Gaussova věta

$$\int_V \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dV = 0$$

$\Downarrow$ ⇐ platí pro každou oblast V

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

rovnice kontinuity – diferenciální verze zákona zach.

konvekční proud

$\vec{j} = \varrho \vec{v}$ pohyb nabitého média rychlostí $\vec{v}$

vícesložkové médium

$\varrho = \sum_j \varrho_j \qquad \vec{j} = \sum_j \varrho_j \vec{v}_j$

může být $\varrho = 0$ a $\vec{j} \neq 0$

stacionární situace

žádná veličina $\varrho, \vec{j}, \vec{E}, \vec{B}$ nezávisí na čase

může zahrnovat pohyb náboje - tok - ale konstantní v čase

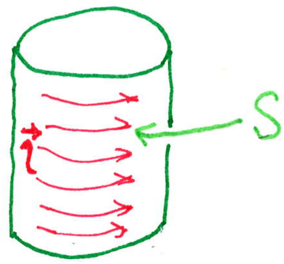
rovnice kontinuity $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

singulární zdroje

regulární proudová hustota

$\vec{j}$ hladké vektorové pole



plošné proudy

$$\vec{j}(X) = \vec{\imath}(X)\,\delta_S(X)$$

S plocha $\vec{\imath}$ tečné k S

distribuce δ_S lokalizuje integraci na 2D plochu S

$$\int \varphi\,\vec{j}\,dV = \int_S \varphi\,\vec{\imath}\,dS \qquad \varphi \text{ testovací fce}$$

krátce:

$$\vec{j}\,dV \to \vec{\imath}\,dS$$

tenké vodiče

$$\vec{j}(X) = I\,\vec{e}_\gamma\,\delta_\gamma(X)$$

distribuce lokalizující na křivku γ

jednotkový tečný vektor

proud ve vodiči

$$\int \varphi\,\vec{j}\,dV = \int_\gamma \varphi\,I\,d\vec{s} \qquad d\vec{s} = \vec{e}_\gamma\,ds$$

krátce

$$\vec{j}\,dV \to I\,d\vec{s}$$

zákon zachování + stacionarita $\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$$0 = \int \varphi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,dV = -\int(\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{j}\,dV = -\int I(\vec{\nabla}\varphi)\cdot d\vec{s} = \int \varphi(\vec{\nabla}I)\cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\gamma\cdot\vec{\nabla}I \equiv \frac{d}{ds}I = 0 \quad \Rightarrow \quad I \text{ konstantní podél } \gamma$$

Rozložení proudů ve vodičích

jaké je konkrétní rozložení toku náboje ve vodiči?
obecně složitá materiálová fyzika
závisí i na nestacionárních jevech (způsob přípravy)
standardní speciální případy

- volný pohyb nabitých částic v mag. poli
  řešíme pohybovou rovnici částic pod vlivem EM pole
  např. spirálový pohyb nabité částice v homog. mag. poli.
  vede např. k řešení pohybu plazmatu v EM poli
- supravodiče
  pohyb nosičů náboje bez odporu v prostředí
  ve stacionárním přiblížení volné náboje v supravodiči
  vždy stihnou vyrovnat jakékoli elektrické pole
  tj $\vec{E}=0$ v supravodiči - nekonečná vodivost (viz dále)
- ohmické vodiče
  nosiče nábojů se pohybují s odporem v prostředí vodiče

Přesun energie mezi EM polem a nosiči náboje

EM pole koná práci na nosičích náboje
- dodává se energie nosičům
- odebírá se energie EM poli

vícesložkový proud $\vec{j} = \sum_k \varrho_k \vec{v}_k$

ϱ_k a $\vec{v}_k$ hustota a rychlost k-té složky

objemová hustota práce na nosičích za čas dt

$$dW = \sum_k \vec{f}_k \cdot d\vec{s}_k = \sum_k \varrho_k (\vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}) \cdot \vec{v}_k \, dt = \left(\sum_k \varrho_k \vec{v}_k\right) \cdot \vec{E} \, dt = \vec{j} \cdot \vec{E} \, dt$$

rychlost přesunu energie (obj. hustota) $w = \frac{dW}{dt}$

$$w = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

= obj. hustota výkonu EM pole na nosičích náboje
= obj. hustota rychlosti úbytku EM energie

Ohmické vodiče

volné nosiče náboje (elektrony) v prostředí působícím odpor
(kovy: nepohyblivé ionty, plazma: těžké pomalé ionty, ...)
na volné nosiče náboje působí
- EM síla
- odpor prostředí
- restrikce materiálu (hranice vodiče)

Lokální Ohmův zákon
v ohmických vodičích se ustálí stacionární rovnováha kdy proud je korelován s intenzitou elektrického pole

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$ $\quad \gamma$ vodivost $\quad \varkappa = \frac{1}{\gamma}$ měrný odpor

typicky způsobené vyrovnáním elektr. a odporové síly

Drudeův model
klasický model vysvětlující odporovou sílu jako srážky nosičů náboje s prostředím
pohybová rovnice:

$$\frac{d}{dt}\Delta\vec{p} = \Delta\vec{f}_E + \Delta\vec{f}_{odpor}$$

stacionarita: $\frac{d}{dt}\Delta\vec{p} = 0$

elektrické působení je dominantní $\quad \Delta\vec{f}_E = \Delta Q\,\vec{E}$

odporová síla úměrná rychlosti $\quad \Delta\vec{f}_{odpor} = -\frac{1}{\tau}\Delta\vec{p}$

τ je charakteristická doba mezi srážkami
daná tepelným pohybem nosičů náboje $\quad v_{term} \gg v_{proud}$

vyjádřeno pomocí hustot na částici $m = \frac{\Delta M}{\Delta N}$ $q = \frac{\Delta Q}{\Delta N}$ a hust. část. $\nu = \frac{\Delta N}{\Delta V}$

hybnost $\quad \Delta\vec{p} = \Delta M\,\vec{v} = m\,\Delta N\,\vec{v}$

proud $\quad \Delta\vec{J} = \vec{j}\,\Delta V = \Delta Q\,\vec{v} = q\,\Delta N\,\vec{v} = \nu q\,\vec{v}\,\Delta V$

$\Downarrow$

$$0 = \Delta Q\,\vec{E} - \frac{1}{\tau}\Delta\vec{p}$$

$\Downarrow$

$$\vec{E} = \frac{m\Delta N}{\tau}\frac{1}{q\Delta N}\vec{v} = \frac{m}{\nu q^2\tau}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad \gamma = \frac{\nu q^2\tau}{m}$$

$$\frac{\Delta\vec{f}_{odpor}}{\Delta Q} = -\frac{1}{\tau}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta Q} = -\frac{m}{\nu q^2\tau}\vec{j} = -\varkappa\,\vec{j}$$

Jouleovo teplo
odporová síla přeměňuje energii dodanou EM polem nosičům náboje na termální energii vodiče

$$w_{Joule} = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Elektrické pole pro stacionární proudy ve vodičích

Maxwellovy rovnice

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

materiálové vztahy

$\vec{j} = \gamma\vec{E}$ uvnitř ohmického vodiče

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ stacionarita

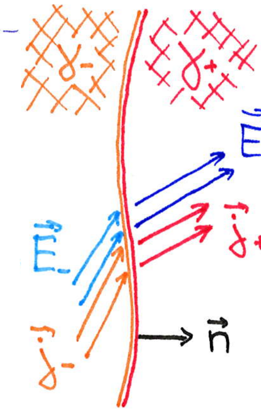
$\gamma = \text{konst}$ homogenní ohmický vodič

uvnitř vodiče

$0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \gamma\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\varrho \Rightarrow \varrho = 0$ uvnitř homog. vodiče

propustná hranice mezi dvěma vodiči s vodiv. γ_+ a γ_-

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{j}_+ - \vec{j}_-) = 0 \Rightarrow \gamma_+\vec{n}\cdot\vec{E}_+ = \gamma_-\vec{n}\cdot\vec{E}_-$



$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$

obecně nenulová hustota náboje na rozhraní odpovídající "nehomogennosti" vodivosti

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{n}\times(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma_+}\vec{n}\times\vec{j}_+ = \frac{1}{\gamma_-}\vec{n}\times\vec{j}_-$

spojitost tangenciálních složek intenzity

nespojitost proudů podél hranice

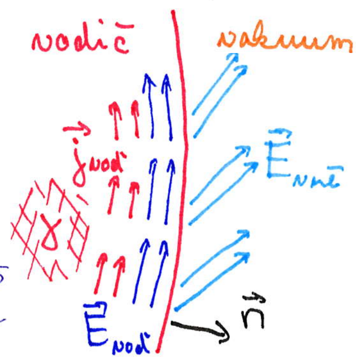
nepropustná hranice vodiče (hranice s vakuem)

$\vec{n}\cdot\vec{j}_{vod} = 0 \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{E}_{vod} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{n}\times(\vec{E}_{vně} - \vec{E}_{vod}) = 0$

spojité tangenciální složky intenzity

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \Rightarrow \vec{n}\cdot(\vec{E}_{vně} - \vec{E}_{vod}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{E}_{vně} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$



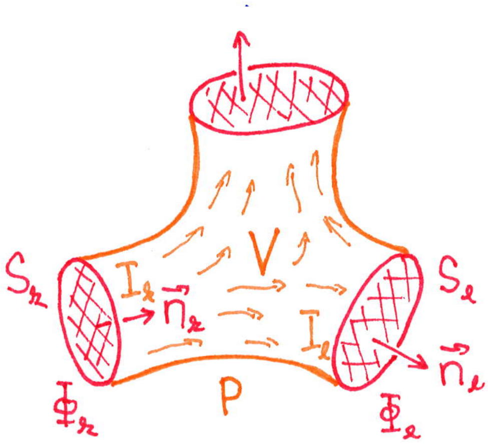
na hraně vodiče se obecně ustálí plošné "zajišťující" konzistentní ohmické pole a tok uvnitř vodiče

další detaily pro elektr. pole a proud uvnitř ohmick. vodiče

- poznámky o elektromotorické síle dále
- příklady na cvičení
- formulace potenciálové úlohy – následuje

Potenciál uvnitř homogenního vodiče

- homog. ohmický vodič v oblasti V
- ideálně vodivé elektrody S_k
- nepropustná hranice vodiče P



$$\partial V = P + \sum_k \pm S_k$$

↖ orientace normály

proud přes elektrodu

$$I_k = \int_{S_k} \vec{j}\cdot d\vec{S} = \gamma \underbrace{\int_{S_k} \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$ tok elektrického pole

rovnice pro potenciál

$$\Delta \phi = 0 \qquad \Leftarrow \varrho = 0 \text{ uvnitř vodiče}$$

elektrody S_k

$\phi|_{S_k} = \Phi_k$ konst. hodnota na ideálně vodivé elektrodě

$V_{kl} = \Phi_k - \Phi_l$ napětí mezi elektrodami

nepropustná hranice vodiče P

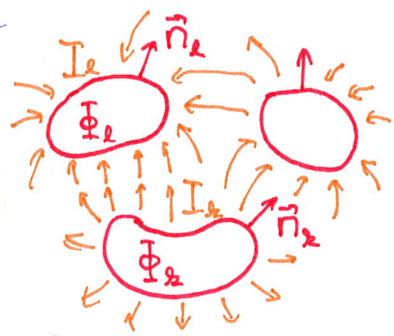
$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0$ Neumannovy okr. podm. $\Leftarrow \vec{n}\cdot\vec{E}_{vod}|_P = 0$

⇓ Laplaceova úloha se smíšenými okr. podm.

→ jednoznačné řešení

Rozsáhlý vodič (vyplňující celý prostor či velkou dutinu s uzemněn. ideálně vod. okrajem) s elektrodami uvnitř

matematicky stejná úloha jako pro kapacity



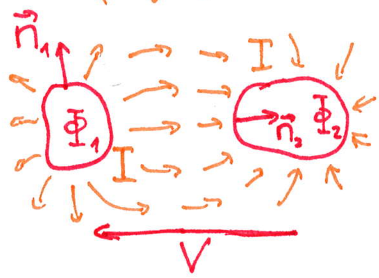
kapacita: $\sum_l C_{kl}\Phi_l = Q_k = \varepsilon_0 \int_{S_k} \vec{E}\cdot d\vec{S}$

vodič: $\sum_l \Gamma_{kl}\Phi_l = I_k = \gamma \int_{S_k} \vec{E}\cdot d\vec{S}$

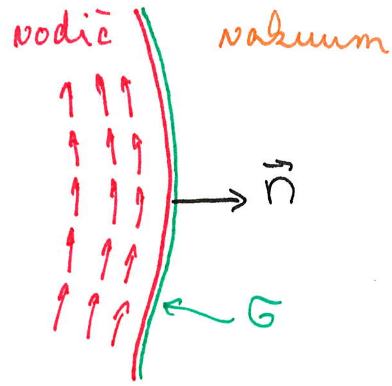
$\Rightarrow \Gamma_{kl} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} C_{kl}$ matice vodivosti

Př: 2 elektrody s proudem I mezi nimi

$\underset{\varepsilon_0 \text{ tok}}{Q} = C(\Phi_1 - \Phi_2) \qquad \underset{\gamma \text{ tok}}{I} = \frac{1}{R}(\Phi_1 - \Phi_2) \quad \Rightarrow \quad CR = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$



Potenciál vně vodičů



$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_{vně}$$

nepropustná hranice vodičů

$$-\frac{\partial \phi_{vně}}{\partial \vec n} = \vec n\cdot \vec E_{vně} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma$$

$\vec t\cdot\vec\nabla\phi_{vod} = \vec t\cdot\vec\nabla\phi_{vně}$ $\quad$ $\vec t$ tečný k hranici

⇓

ϕ spojité na hranici, ale obecně nehladký
(skok v normálové derivaci)

vyřešení úlohy ve vodičích ⇒
zadá hodnotu potenciálu na okraji pro úlohu vně vod.

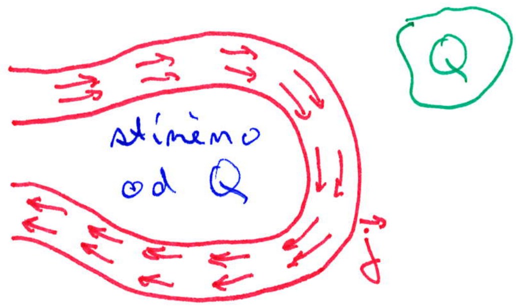
dutina ve vodiči ve kterém teče proud
žádné náboje v dutině

⇓

$\Delta\phi_{dut.} = 0 \qquad \phi_{dut.}\big|_{hranice} = \phi_{vod}\big|_{hranice}$

⇓ jednoznačnost řešení

nezávisí na rozložení nábojů vně vodiče (pokud nezmění proudy ve vodiči)



Elektromotorická síla (EMS)

(není síla, též elektromotorické napětí)

proč teče proud v ohmickém vodiči proti odporové síle?
pro stacionaritu proudu je potřeba zdroj
zdroj - síla působící někde v obvodu na náboj
- chemický (baterie)
- mechanický (piezokrystaly)
- elektromagnetický = EM za hranicí stacionarity
  (generátory, EM indukce)

charakteristika zdroje = úhrnný účinek zdroje v celé smyčce
= elektromotorická síla zdroje

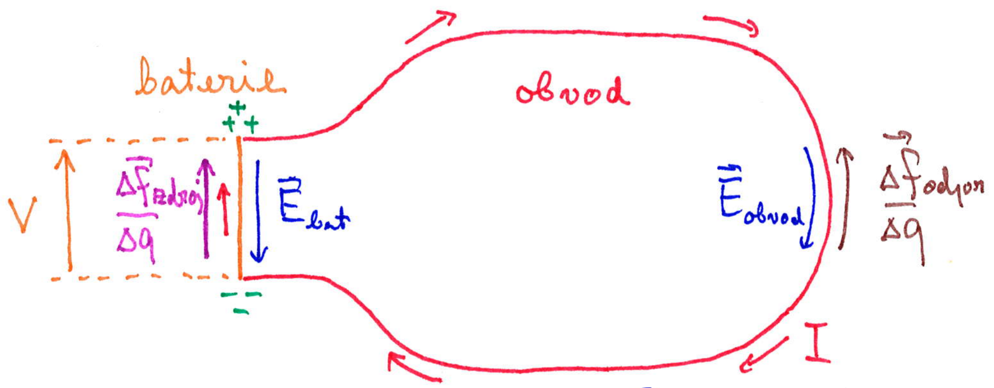
$$\mathcal{E} = \int_\gamma \frac{\Delta\vec{f}_{zdroj}}{\Delta q} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ – směr podél smyčky γ

$\frac{\Delta\vec{f}_{zdroj}}{\Delta q}$ – síla zdroje podél smyčky na jednotkový náboj

= práce zdroje podél smyčky na jednotkový náboj

obvod se zdrojem a ohmickým vodičem



rovnováha v baterii

$$\vec{E}_{bat} + \frac{\Delta\vec{f}_{zdroj}}{\Delta q} = 0$$

napětí baterie

$$V = -\int_{bat} \vec{E}_{bat} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \frac{\Delta\vec{f}_{zdroj}}{\Delta q} \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$$

lokalizované pouze v bat.

rovnováha ve vodiči

$$\vec{E}_{obvod} + \frac{\Delta\vec{f}}{\Delta q} = 0$$

Ohmův zákon

$$\frac{\Delta\vec{f}_{odpor}}{\Delta q} = -\varkappa\vec{j} \qquad \Downarrow \int_{průřez} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{průřez} \vec{E}_{obv.} \cdot d\vec{S} = \varkappa \int_{průřez} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \varkappa I \qquad \Downarrow \int_{vodič} ds$$

$$S \int_{vodič} \vec{E}_{obv.} \cdot d\vec{s} = \varkappa I \int_{vodič} ds = \varkappa l I$$

$\Downarrow$

$$V = RI \qquad R = \frac{\varkappa l}{S}$$

Formulace magnetostatiky

Maxwellovy rovnice ve stacionární situaci

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} \qquad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$$

Lorentzova magnetická síla

hustota síly vnějšího pole $\vec{B}$ na tok $\vec{j}$

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \rho \vec{v} \times \vec{B}$$

↑ konvekční proud

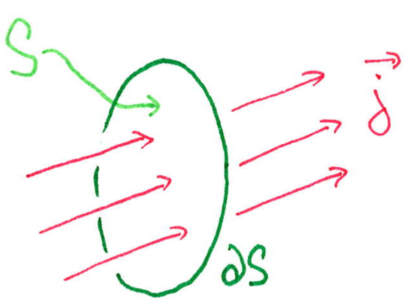
indukční čáry

orbity magnetické indukce $\vec{B}$

magnetický tok skrze plochu S

měří "množství" indukčních čar

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Ampérův zákon

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad / \int_S d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow \qquad \Leftarrow \text{Stokesova věta + definice proudu}$$

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

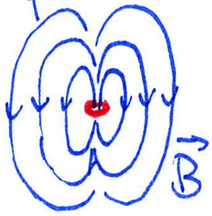
proud skrze S působí cirkulaci $\vec{B}$ okolo ∂S

Magnetická indukce je bezdivergentní

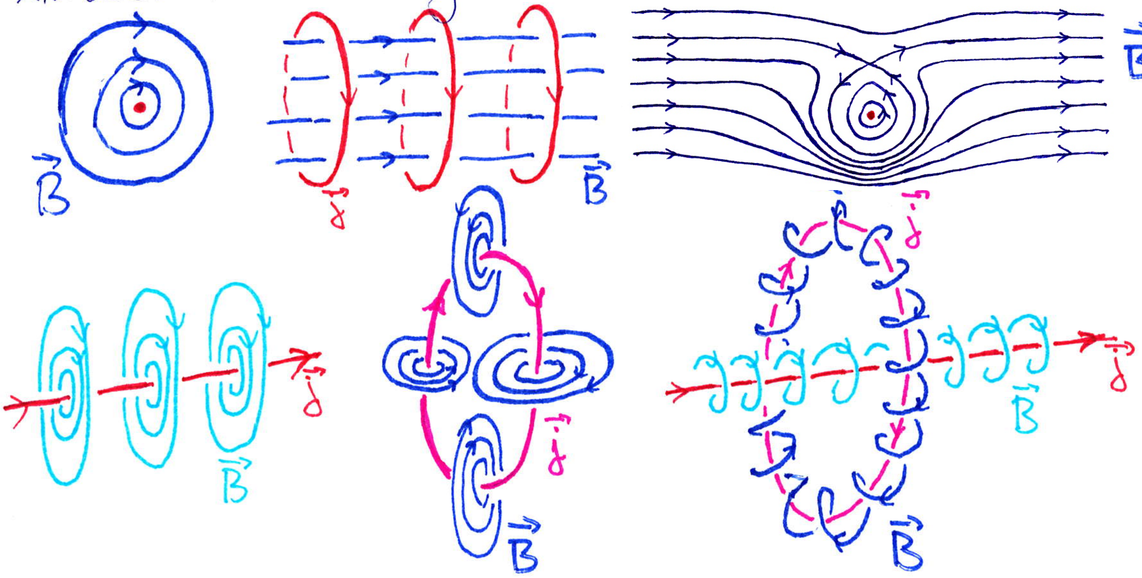
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

neexistují magnetické monopóly

lokalizované magnetické zdroje mají dipólový charakter



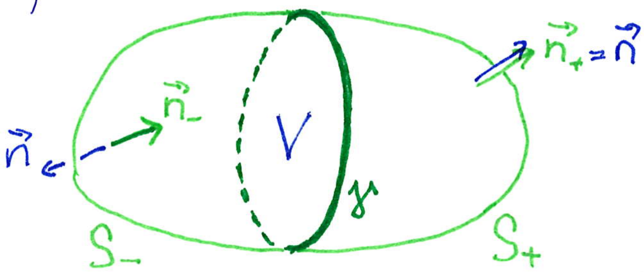
indukční čáry nezačínají a nekončí



tok magnetického pole nezávisí na výběru plochy napnuté na smyčce

$\gamma = \partial S_- = \partial S_+$

$\partial V = -S_- \cup S_+ \qquad \vec{n} = \pm\vec{n}_\pm$



$$0 = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = \int_{\partial V = -S_- \cup S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S} =$$

$$= -\int_{S_-} \vec{B}\cdot d\vec{S}_- + \int_{S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S}_+ = -\Psi_{S_-} + \Psi_{S_+}$$

$\Downarrow$

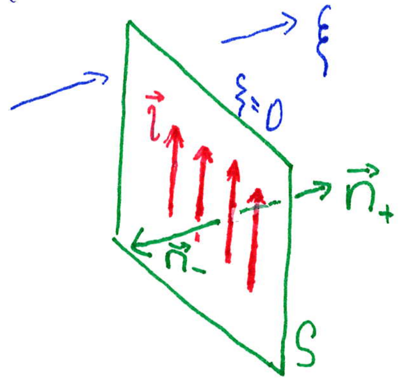
$$\Psi_{S_-} = \Psi_{S_+}$$

Magnetická indukce pro plošné zdroje

uvažujme tok typu

$$\vec{j} = \vec{j}_{3D} + \vec{j}_{2D} \qquad \vec{j}_{2D} = \vec{\imath}\,\delta_S$$

plošný zdroj indukuje nespojitost v $\vec{B}$



$$\vec{B} = \vec{B}_- \chi_- + \vec{B}_+ \chi_+$$

$$S = -\partial V_- = \partial V_+$$

platí

$$\vec{\nabla}\chi_\pm = \vec{n}_\pm \delta_S$$

vskutku

$$\vec{\nabla}\chi_+ = \vec{\nabla}\Theta(\xi) = \delta(\xi)\,\vec{\nabla}\xi = h_\xi^{-1}\delta(\xi)\,\vec{n}_+ = \delta_S \vec{n}_+$$

podmínky navázání

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_+)\chi_+}_{\text{klasické derivace}} + \underbrace{\vec{B}_-\cdot\vec{n}_-\,\delta_S + \vec{B}_+\cdot\vec{n}_+\,\delta_S}_{(\vec{B}_+-\vec{B}_-)\cdot\vec{n}_+\,\delta_S}$$

$$\Downarrow \qquad \Rightarrow (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_+)\chi_+ = 0 \qquad \Rightarrow (\vec{B}_+-\vec{B}_-)\cdot\vec{n} = 0$$

$$(\vec{B}_+-\vec{B}_-)\cdot\vec{n} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = (\vec{\nabla}\times\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\times\vec{B}_+)\chi_+ + (\vec{n}_-\times\vec{B}_-)\,\delta_S + (\vec{n}_+\times\vec{B}_+)\,\delta_S$$

$$= \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B}_-)\chi_- + (\vec{\nabla}\times\vec{B}_+)\chi_+}_{\mu_0\vec{j}_{3D}} + \underbrace{\vec{n}\times(\vec{B}_+-\vec{B}_-)\,\delta_S}_{\mu_0\vec{j}_{2D}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{n}\times(\vec{B}_+-\vec{B}_-) = \mu_0\vec{\imath}$$

Vektorový potenciál

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

lze vyřešit zavedením vekt. potenciálu

zaručuje existenci vekt. potenciálu

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

souvislost s magnetickým tokem

$$\int_{\partial S}\vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_S(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_S\vec{B}\cdot d\vec{S} = \Psi_S$$

cirkulace $\vec{A}$ = tok $\vec{B}$

nejednoznačnost vekt. potenciálu

lze nalézt explicitní vztah pro $\vec{A}$ podobný vztahu pro skalární potenciál $\phi(x) = -\int_{x_0}^{x}\vec{E}\cdot d\vec{s}$

závisí ale na volbě integrační cesty

lze dostat značně odlišné $\vec{A}$ pro stejné $\vec{B}$

$\Rightarrow$ nejednoznačnost $\vec{A}$ – jak je velká?

$\vec{A} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{a}$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\vec{a} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \vec{\nabla}\psi$

potenciály dávající stejné $\vec{B}$ se musí lišit o $\vec{\nabla}\psi$

kalibrační volnost

$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$

kalibrační podmínka

volnost lze využít ke splnění dodatečné podmínky

Coulombova kalibrace (statická)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

lze vždy zaručit kalibrační transformací

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \alpha \neq 0 \quad$ nalezneme $\quad \Delta\psi = \alpha$

pak $\vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla}\psi$ splňuje $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' - \Delta\psi = \alpha - \alpha = 0$

Rovnice pro vektorový potenciál

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{0 \leftarrow \text{Coulombova kalibrace}}) = \mu_0\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

pozn: konzistence podmínky stacionarity $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$
a Coulomb. kalibrace $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

$$0 = -\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \vec{\nabla}\cdot\Delta\vec{A} = \Delta\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

Poissonova úloha pro vektorové pole

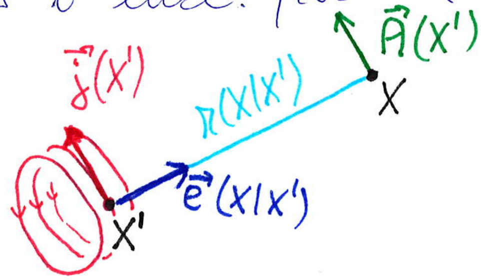
$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

v plochém prostoru lze zvolit kartézskou bázi
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ konstantní
vektorová rovnice ekvivalentní rovnicím pro složky

$$\Delta A^k = -\mu_0 j^k \qquad k = x,y,z$$

použitím Greenovy funkce pro Δ v eukl. prostoru

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{1}{r(X|X')}\,\vec{j}(X')\,dV'$$



pozn: tento vekt. potenciál automaticky splňuje Coulombovu kalibrační podmínku na jejímž základě byl odvozen

$$\vec{\nabla} r(X|X') = -\vec{\nabla}' r(X|X')$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla\frac{1}{r(X|X')}\right)\cdot\vec{j}(X')\,dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\nabla'\frac{1}{r(X|X')}\right)\cdot\vec{j}(X')\,dV' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r(X|X')}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{\text{stacionarita}\Rightarrow 0}(X')\,dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V = \text{celý prostor}}\nabla'\cdot\left(\frac{1}{r(X|X')}\vec{j}(X')\right)dV' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\partial V}\frac{1}{r(X'|X)}\,\vec{j}(X')\cdot d\vec{S}' = 0$$

lokalizované nebo alespoň omezené zdroje v nekonečnu ∂V

Biotův-Savartův zákon

$$\vec{B}(X) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int\frac{1}{r(X|X')}\vec{j}(X')\,dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r(X|X')}\right)\times\vec{j}(X')\,dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')}\times\vec{j}(X')\,dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(X')\times\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')}\,dV'$$

pro tenké vodiče ~~- systém vodičů lokaliz~~
systém vodičů lokalizovaný na vodičích popsaných křivkou γ_K s proudy I_K

$$\vec{B}(X) = \sum_K \frac{\mu_0 I_K}{4\pi}\int_{\gamma_K}\frac{d\vec{s}'\times\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')} \qquad \vec{j}dV\to I d\vec{s}$$

svádí k formulaci, že $\vec{B}$ je dáno superpozicí od příspěvků "elementárních proudů" $\vec{j}dV = Id\vec{s}$
(v analogii s elektr. intenzitou

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(X')\vec{e}(X|X')}{r^2(X|X')}\,dV'$$

která je superpozice příspěvků od ρdV
ale $\vec{j}dV$ nesplňuje zákon zachování a tak pole tohoto zdroje nemá smysl
smysl má pouze celý integrál přes úplný zdroj

Poissonova úloha pro $\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{-\Delta\vec{B}+\vec{\nabla}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0}} = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\vec{B} = -\mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

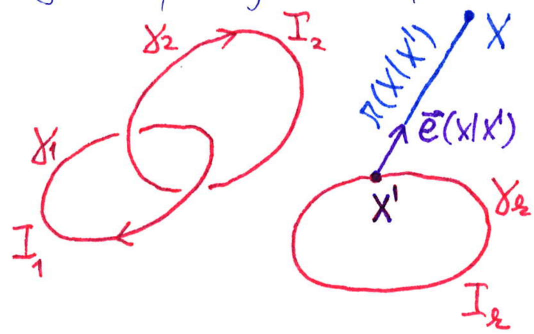
důsledek - nerotační toky $\vec{\nabla}\times\vec{j}=0$ nebudí magnetické pole, tj. $\vec{B}=0$ splňuje rov. pro $\vec{B}$ za vhodných okraj. podmínkách jednoznačně!

Systém smyček

Proudové smyčky

budeme uvažovat situaci, kdy všechny proudy jsou lokalizované v tenkých smyčkách

proudová smyčka lze chápat jako "elementární" zdroj magnetického pole – neexistují monopóly, stacionární zdroje jsou bezdivergentní a tak proudové čáry nikde nezačínají a nikde nekončí – lze je chápat jako superpozici tenkých smyček



pole smyček

$$\vec B(X) = -\sum_k \frac{\mu_0 I_k}{4\pi}\int_{\gamma_k} \frac{\vec e(X|X')\times d\vec s'}{r^2(X|X')}$$

skalární magnetický potenciál

mimo proudové smyčky $\vec B$ splňuje

$$\vec\nabla\times\vec B = 0 \qquad \vec\nabla\cdot\vec B = 0$$

$\Downarrow$

lze zavést magnetický skalární potenciál

$$\vec B = -\vec\nabla\psi \qquad \text{(mimo proudové smyčky)}$$

rovnice pro mag. potenciál

$$\Delta\psi = 0$$ Laplaceova úloha v prostoru mimo smyčky

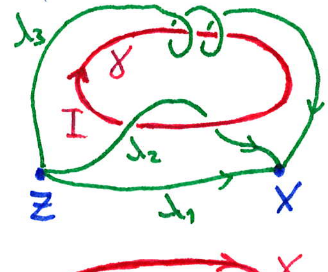
nejednoznačnost skal. mag. potenciálu

prostor bez smyček není topologicky triviální

$\Rightarrow$ neplatí Poincarého lema zajišťující existenci potenciálu

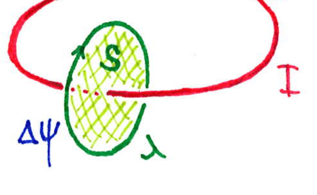
vzorec pro potenciál

$$\psi(X) = -\int_Z^X \vec B\cdot d\vec s$$



vede na víceznačnou funkci závisející na cestě po které jdu ze Z do X – závisí na počtu oběhnutí proudových smyček

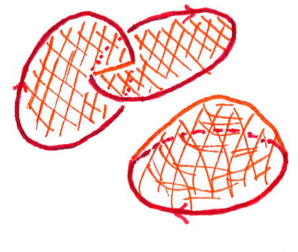
jeden oběh kolem proudové smyčky dává



$$\Delta\psi = -\int_{\lambda=\partial S}\vec B\cdot d\vec s = -\int_S(\vec\nabla\times\vec B)\cdot d\vec S = -\mu_0\int_S \vec j\cdot d\vec S = -\mu_0 I$$

řešení: zamezíme možnosti obíhat proud. smyčky

na každou smyčku napneme plochu a tu "vyjmeme" z prostoru, kde řešíme Laplaceovu úlohu – ve vzniklém prostoru je již magn. potenciál ψ jednoznačný



Síla mezi 2 smyčkami - Ampérův zákon

síla na smyčku ve vnější poli $\vec{B}$

$$\vec{F}_{\text{na smyčku } \gamma} = \int \vec{j} \times \vec{B}\, dV = I \int_\gamma d\vec{s} \times \vec{B} \qquad (\vec{j}\, dV \to I\, d\vec{s})$$

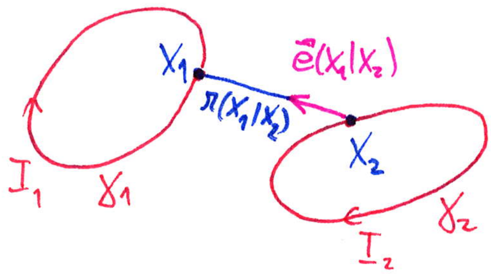
působení smyčky γ_2 na smyčku γ_1

$$\vec{F}_{\text{na 1 od 2}} = I_1 \int_{\gamma_1} d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2 \underset{\text{Biot-Savart}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times \vec{e}(X_1|X_2))}{r^2(X_1|X_2)} \underset{\text{bac-cab}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \left[\frac{-\vec{e}(X_1|X_2)\, d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r^2(X_1|X_2)} + d\vec{s}_1 \cdot \frac{\vec{e}(X_1|X_2)}{r^2(X_1|X_2)}\, d\vec{s}_2 \right]$$

$$\int_{\gamma_1} d\vec{s}_1 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r(X_1|X_2)} \overset{\text{Newt. vzorec}}{=} \frac{1}{r(K|X_2)} - \frac{1}{r(Z|X_2)} \overset{Z=K}{=} 0 \Leftarrow -\vec{\nabla}\frac{1}{r(X_1|X_2)}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \vec{e}(X_1|X_2) \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r^2(X_1|X_2)}$$



symetrické při záměně γ_1 a γ_2

$$\vec{F}_{\text{na 1 od 2}} = -\vec{F}_{\text{na 2 od 1}}$$

akce a reakce ve stacionární situaci
(nezáleží na šíření interakce konečnou rychlostí)

Indukčnost

magnetický tok skrze smyčku γ_1 od pole smyčky γ_2

$$\Psi_{\text{skrze}\,\gamma_1\,\text{od}\,\gamma_2} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \int_{\gamma_1=\partial S_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{s}_1 =$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{r(X_1|X_2)} \, d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1 \right] I_2 = L_{12} I_2$$

vzájemná indukčnost

$$L_{12} \, (\equiv M_{12}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{1}{r(X_1|X_2)} \, d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

- geometrické veličiny závisející na tvaru a poloze smyček
- symetrické při záměně smyček $L_{12} = L_{21}$

pro netenké vodiče závisí na přesném rozložení proudu
(např. proud vytlačen do tenké vrstvy na povrchu vodiče
nebo objemově rozložený proud napříč celým průřezem vodiče)

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2} \iint \frac{1}{r(X_1|X_2)} \, \vec{j}(X_1) \cdot \vec{j}(X_2) \, dV_1 dV_2$$

$\vec{j}(X_1)$, $\vec{j}(X_2)$ – rozložení proudu ve vodiči

dV_1, dV_2 – trubice tvořící vodič

I_1, I_2 – celkový proud ve vodiči

výsledek nebude záviset na celkových proudech I_1, I_2

samoindukce

smyčka generuje magnetické pole a tedy i tok skrze sebe

$$\Psi_{\text{skrze}\,\gamma\,\text{od}\,\gamma} = L\, I$$

pro tenký vodič diverguje

↑ magnetické pole blízko tenkého vodiče $\sim \ln R$ – diverguje

potřeba uvažovat vodič konečného průřezu

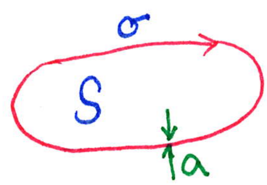
$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \iint \frac{1}{r(X|X')} \, \vec{j}(X) \cdot \vec{j}(X') \, dV \, dV'$$

obvykle počítáme skrze energii – viz dále

lze nalézt „charakteristické" chování

$$L \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \, \sigma \left(\ln \frac{S}{a^2} + \frac{1}{2} + \varepsilon \right)$$

σ – obvod smyčky
S – plocha smyčky
a – poloměr průřezu vodiče
ε – malá konstanta



systém několika smyček

celkové mag. pole je superpozice polí od smyček

$$\vec{B} = \sum_{l} \vec{B}_l$$

tok mag. pole skrze k-tou smyčku

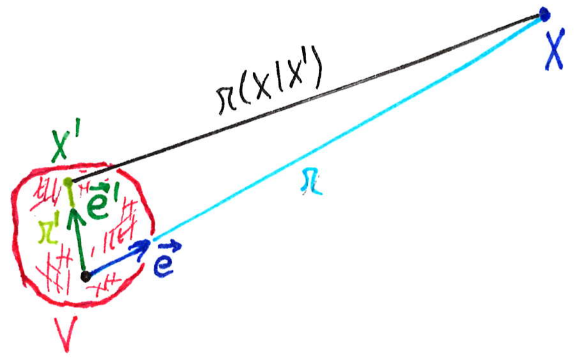
$$\Psi_k = \sum_{l} L_{kl} I_l$$

L_{kl} matice indukčnosti

$k \neq l$ vzájemná indukčnost

$k = l$ samoindukčnost

Multipólový rozvoj magnetického pole



pole daleko od lokalizovaného pole

- rozvoj $\vec{A}$ podobně jako rozvoj ϕ

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(X|X')}{r(X|X')}\,dV'$$

$$\frac{1}{r(X|X')} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{l!}\frac{r'^{\,l}}{r^{l+1}}\, e^{\langle a_1} \cdots e^{a_l\rangle} e'_{\langle a_1} \cdots e'_{a_l\rangle}$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{r'}{r}\,\vec{e}\cdot\vec{e}\,' + \dots$$

$\Downarrow$

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V \vec{j}(X')\,dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\,\vec{e}\cdot\int_V \vec{r}\,'\,\vec{j}(X')\,dV' + \dots$$

monopól dipól

pomocné výpočty

$$\int_V \vec{j}\,dV = \int_V \Big(\vec{j}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{r}}_{\overleftrightarrow{I}} + \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{0}\,\vec{r}\Big)dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{j}\,\vec{r})\,dV = \int_{\partial V} \vec{r}\,\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\uparrow \vec{j} = 0$ na ∂V

$$\int_V (\vec{r}\,\vec{j} + \vec{j}\,\vec{r})\,dV = \int_V \Big(\vec{r}\,\vec{j}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{r})}_{\overleftrightarrow{I}} + \vec{j}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{r})}_{\overleftrightarrow{I}}\,\vec{r} + \vec{r}\,\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})}_{0}\,\vec{r}\Big)dV = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{j}\,\vec{r}\,\vec{r})\,dV = \int_{\partial V}\vec{r}\,\vec{r}\,\vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\uparrow 0$ na ∂V

$\Downarrow$

$$\int_V r^a j^b\,dV = \int_V r^{[a} j^{b]}\,dV = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{mnc}\int_V r^m j^n\,dV = \varepsilon^{abc}\underbrace{\frac{1}{2}\int(\vec{r}\times\vec{j})_c\,dV}_{m_c} = \varepsilon^{abc} m_c$$

kde definujeme $\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{j}\,dV$

použili jsme vekt. identitu $\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon_{mnc} = \delta^{[a}_{[m}\delta^{b]}_{n]}$ – "jednotka" na antisymetrických tenzorech

$\Downarrow$

$$e_m\int_V r^m j^a\,dV = e_m\,\varepsilon^{man} m_n = (\vec{m}\times\vec{e})^a \quad \text{tj.} \quad \vec{e}\cdot\int\vec{r}\,\vec{j}\,dV = \vec{m}\times\vec{e}$$

vektorový potenciál

$$\vec{A}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{e}}{r^2} \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}\int\vec{r}\times\vec{j}\,dV$$

magnetická indukce

$$\vec{B}(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{e}\,\vec{e}\cdot\vec{m} - \vec{m}}{r^3}$$

vše platí pro X mimo zdroje

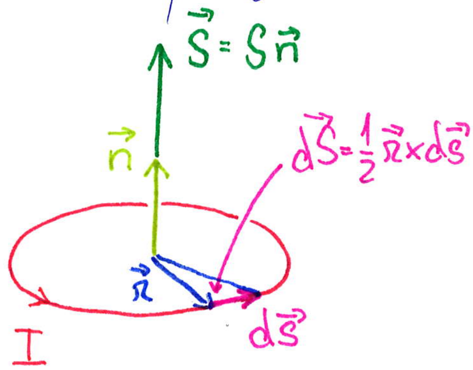
viz cvičení

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\Big[-3\frac{1}{r}\,\vec{e}\times(\vec{m}\times\vec{r}) + \frac{\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\vec{r})}{r^3}\Big]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\Big[-3\vec{m}\,\vec{e}\cdot\vec{e} + 3\vec{e}\,\vec{e}\cdot\vec{m} + \vec{m}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}_{3} - \vec{m}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\vec{r}}_{\overleftrightarrow{I}}\Big] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{e}\,\vec{e}\cdot\vec{m} - \vec{m}}{r^3}$$

Kanonické reprezentace magnetického dipólu

malá rovinná smyčka



$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{j}\,dV = \frac{I}{2}\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{s} =$$

$$= I\int_{\partial S} d\vec{S} = I\vec{S} = IS\vec{n}$$

„bodový dipól" = limita malé plochy a velkého proudu

tak, že $m = \lim_{S\to 0} IS = \text{konst}$

Síla na dipól ve vnějším poli

$$\vec{F} = \int \vec{j}\times\vec{B}\,dV$$

$\vec{B}$ ← vnější pole

$\vec{j}$ ← proudová hustota lokaliz. systému na který síla působí

$$= \int \vec{j}\times\left(\vec{B}|_{x_0} + \vec{r}\cdot\vec{\nabla}\vec{B}|_{x_0} + \dots\right)dV$$

rozvoj okolo x_0 díky tomu, že systém je lokalizovaný

$$= \int \vec{j}\,dV\times\vec{B}|_{x_0} + \int \vec{j}\times\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\vec{B}|_{x_0}\right)dV + \dots$$

$\Downarrow$

$$F_a = \int \varepsilon_{abc}\, j^b\, r^m \nabla_m B^c|_{x_0}\,dV = \varepsilon_{abc}\underbrace{\left[\int r^m j^b\,dV\right]}_{\varepsilon^{mbn}m_n \text{ viz výše}}\nabla_m B^c|_{x_0} =$$

$\varepsilon\varepsilon = \delta\delta - \delta\delta$ viz výše

$$= \left(\delta_a^m\delta_c^n - \delta_a^n\delta_c^m\right) m_n \nabla_m B^c|_{x_0} =$$

$$= \left(\nabla_a B^n m_n - m_a \underbrace{\nabla_n B^n}_{0}\right)\Big|_{x_0} = \nabla_a\left(B^n m_n\right)\Big|_{x_0}$$

m_n ← konst.

$\Downarrow$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\vec{m})$$

Moment síly vnějšího pole na dipól

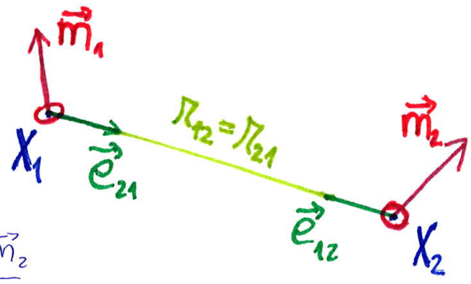
$$\vec{M} = \int \vec{r}\times(\vec{j}\times\vec{B})\,dV = \int \vec{r}\times\left(\vec{j}\times\vec{B}|_{x_0}\right)dV + \dots$$

$$= \int\left(\vec{j}\,\vec{r}\cdot\vec{B}|_{x_0} - \vec{B}|_{x_0}\,\vec{r}\cdot\vec{j}\right)dV =$$

$$= \underbrace{\left(\int \vec{j}\,\vec{r}\,dV\right)\cdot\vec{B}|_{x_0}}_{\vec{m}\times\vec{B} \text{ viz } \int\vec{r}\vec{j}dV \text{ výše}} - \underbrace{\left(\int \vec{r}\cdot\vec{j}\,dV\right)}_{0}\vec{B}|_{x_0}$$

$0 \Leftarrow \int(\vec{r}\,\vec{j} + \vec{j}\,\vec{r})\,dV = 0$

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$$



Dipól-dipólová interakce

síla dipólu 2 na dipól 1

$$\vec F_{na1od2} = \vec\nabla(\vec B_2\cdot\vec m_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec\nabla\frac{3\vec m_1\cdot\vec e_{12}\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2 - \vec m_1\cdot\vec m_2}{r_{12}^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec\nabla\left(3\frac{\vec m_1\cdot\vec r_{12}\,\vec r_{12}\cdot\vec m_2}{r_{12}^5} - \frac{\vec m_1\cdot\vec m_2}{r_{12}^3}\right) =$$

působí na argument X_1

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi}\left(-5\frac{\vec m_1\cdot\vec r_{12}\,\vec r_{12}\cdot\vec m_2}{r_{12}^7}\vec r_{12} + \frac{\vec m_1\,\vec r_{12}\cdot\vec m_2}{r_{12}^5} + \frac{\vec m_1\cdot\vec r_{12}\,\vec m_2}{r_{12}^5} + \frac{\vec m_1\cdot\vec m_2}{r_{12}^5}\vec r_{12}\right)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^4}\left(\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12} + \vec m_1\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2 + \vec m_1\cdot\vec e_{12}\,\vec m_2 - 5\,\vec m_1\cdot\vec e_{12}\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}\right)$$

$$= \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^4}\left((\vec e_{12}\times\vec m_1)\times\vec m_2 + (\vec e_{12}\times\vec m_2)\times\vec m_1 - 2\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12} + 5(\vec e_{12}\times\vec m_1)\cdot(\vec e_{12}\times\vec m_2)\,\vec e_{12}\right)$$

přímočaré použití bac-cab

platí "akce a reakce"

$$\vec F_{na1od2} = -\vec F_{na2od1}$$

klesá jako $\frac{1}{r^4}$ – rychleji než podintegrální výraz v Ampérově zákonu, který odpovídá klesání jako $\frac{1}{r^2}$
důsledek dipólového charakteru obou na sebe působících syst.

moment síly na dipól 2 od dipólu 1

$$\vec M_{na1od2} = \vec m_1\times\vec B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^3}\left(3(\vec m_1\times\vec e_{12})(\vec e_{12}\cdot\vec m_2) - \vec m_1\times\vec m_2\right)$$

pozor – nesymetrické vůči záměně $1\leftrightarrow 2$

$$\vec M_{na1od2} \neq -\vec M_{na2od1}$$

ale platí, že celkový moment síly je nulový

$$\vec r_{12}\times\vec F_{na1od2} + \vec M_{na1od2} + \vec M_{na2od1} = 0$$

= moment síly vůči poloze mag. momentu $\vec m_2$

$$\vec r_{21}\times\vec F_{na2od1} + \vec M_{na2od1} + \vec M_{na1od2} = 0$$

= moment síly vůči poloze mag momentu $\vec m_1$

↓

zákon zachování momentu hybnosti

$$\vec{r}_{12}\times\vec{F}_{ma1od2}+\vec{M}_{ma1od2}+\vec{M}_{ma2od1} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^3}\Big(3(\vec e_{12}\times\vec m_1)(\vec e_{12}\cdot\vec m_2)+3(\vec m_1\cdot\vec e_{12})(\vec e_{12}\times\vec m_2)+3(\vec m_1\times\vec e_{12})(\vec e_{12}\cdot\vec m_2)-\vec m_1\times\vec m_2$$

$$+3(\vec m_2\times\vec e_{12})(\vec e_{12}\cdot\vec m_1)-\vec m_2\times\vec m_1\Big)$$

$\vec e_{21}=-\vec e_{12}$

$$=0$$

$$(\vec e_{12}\times\vec m_1)\times\vec m_2+(\vec e_{12}\times\vec m_2)\times\vec m_1-2\,\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}+5\,(\vec e_{12}\times\vec m_1)\cdot(\vec e_{12}\times\vec m_2)\,\vec e_{12}=$$

$$=\vec m_1\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2-\vec e_{12}\,\vec m_1\cdot\vec m_2+\vec m_2\,\vec e_{12}\cdot\vec m_1-\vec e_{12}\,\vec m_1\cdot\vec m_2-2\,\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}+5(\vec m_1\times(\vec e_{12}\times\vec m_2))\cdot\vec e_{12}\,\vec e_{12}$$

$$=\vec m_1\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2+\vec m_2\,\vec e_{12}\cdot\vec m_1-4\,\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}+5\,\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}\cdot\vec e_{12}\,\vec e_{12}-5\,\vec m_1\cdot\vec e_{12}\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}$$

$$=\vec m_1\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}+\vec m_1\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2+\vec m_1\cdot\vec e_{12}\,\vec m_2-5\,\vec m_1\cdot\vec e_{12}\,\vec e_{12}\cdot\vec m_2\,\vec e_{12}$$

Kvazistacionární přiblížení a energie systému smyček

musíme připustit proměnné pole $\vec{B}$

budeme uvažovat pouze velmi pomalé změny proudů

magnetické pole se stačí efektivně okamžitě přizpůsobit změně proudů (ignorujeme konečnost rychlosti šíření změny $\vec{B}$

to znamená uvažovat další člen z Maxwellových rovnic

kvazistacionární Maxwellovy rovnice:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

nový člen závislý na změně $\vec{B}$

potřeba změnit definici skalárního potenciálu

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \exists\phi \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \phi = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

více viz plná teorie

Faradayův zákon - proměnné mag pole

proměnné magnetické pole indukuje elektrickou intenzitu

tu můžeme chápat jako dodatečnou sílu působící ve smyčce

efektivně popisujeme jako elektromotorickou sílu

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$$

integrál přes časově konstantní plochu!

$$-\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{\Psi} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$$

$\vec{E} = \frac{d\vec{f}_E}{dq}$ "elektrická" síla na jedn. náboj

$$-\frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{E}$$

Faradayův zákon pro elektromotorickou sílu způsobenou proměnným magnetickým polem

Faradayův zákon – proměnná smyčka

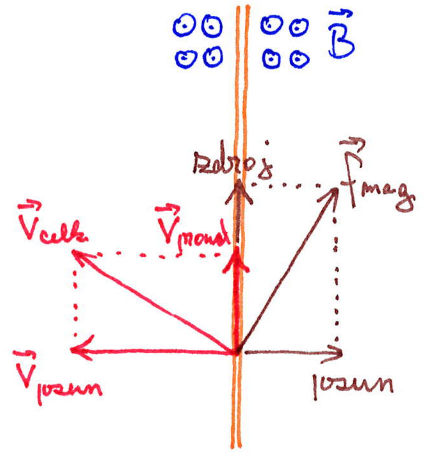
uvažujme pohyb smyčky v daném magnetickém poli
proud ve smyčce $\Rightarrow$ magnetická síla $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ tendence změny proudu ve smyčce
úhrnný vliv mag. síly na proud v celé smyčce
= tzv. elektromotorická síla magnetického pole
= práce vykonaná na jednotkový náboj podél smyčky

$$\mathcal{E} = \int_\gamma \frac{d\vec{f}_m}{dq} \cdot d\vec{s}$$

↑ podél smyčky

$$= \int_\gamma (\vec{v}_{celk} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

$\vec{v}_{celk} \to \vec{v}_{smyčka} + \vec{v}_{proud}$ ← nepřispívá! $\Leftarrow \vec{v}_{proud} \parallel d\vec{s}$



pohybující smyčka obejme mezi časy t_z a t_k oblast Ω

$$0 = \int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{B}\, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \Phi_K - \Phi_z + \int_{plášť\,P} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

podél smyčky, pohyb smyčky: $d\vec{S} = d\vec{s} \times d\vec{r}$

$$= \Delta\Phi + \int_z^k \int_\gamma \vec{B} \cdot (d\vec{s} \times d\vec{r})$$

$d\vec{r} = \vec{v}_{smyčka}\, dt$

$$= \Delta\Phi + \int_{t_z}^{t_k} \int_\gamma (\vec{v}_{smyčka} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

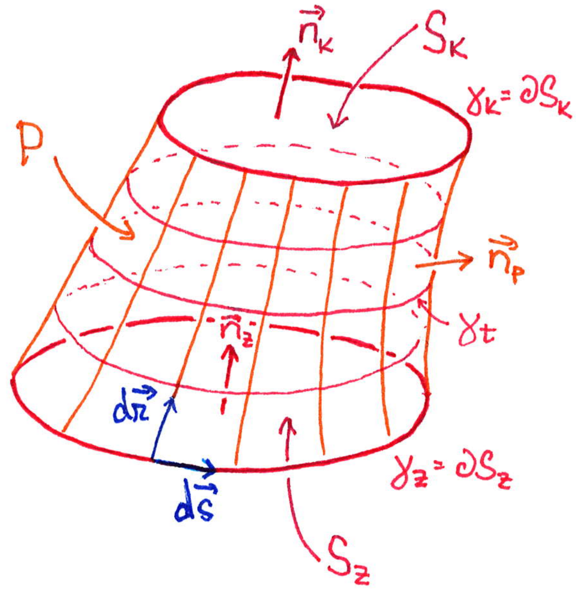
↑ lze přidat $\vec{v}_{proud}$

$$= \Delta\Phi + \int_{t_z}^{t_k} \mathcal{E}\, dt$$

za malý čas Δt

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}$$

Faradayův zákon pro elektromotorickou sílu způsobenou pohybem smyčky



přesun smyčky z polohy $\gamma_z = \partial S_K$ do polohy $\gamma_K = \partial S_K$ uzavře objem Ω s hranicí $\partial\Omega = \partial S_K - \partial S_z + P$ kde znaménko "−" indikuje opačnou volbu vnější normály $\partial\Omega$ a normály S_z

body smyčky se posouvají ve směru elementárního posunu $d\vec{r}$
posouvající smyčka vytvoří plochu P
plošný element na P je dán

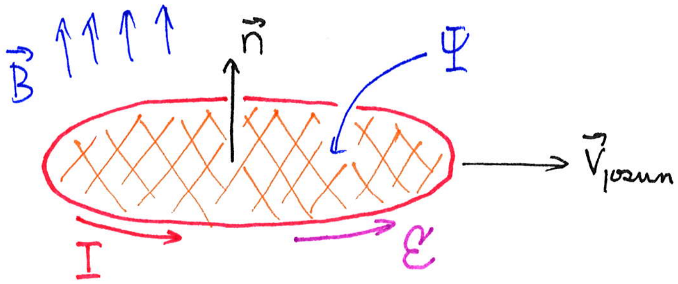
$$d\vec{S} = d\vec{s} \times d\vec{r}$$

Faradayův zákon – celkově

$$-\frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{E} \overset{def}{=} \int_\gamma \frac{d\vec{F}_{EM}}{dq}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \left(\frac{d\vec{F}_E}{dq} + \frac{d\vec{F}_M}{dq}\right)\cdot d\vec{s} = \int_\gamma (\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$$

platí i pro pohybující se smyčku v proměnném poli

Lenzovo pravidlo: EMS proti změně magnetického toku
nutno zvolit konzistentní orientace



Ψ i $\mathcal{E}$ závisí na volbě orientace $\vec{n}$

Práce vykonaná zdrojem proudu ve smyčce
mějme zdroj udržující proud I ve smyčce
při posunu smyčky či změně pole musí zdroj vykonat práci proti indukované elektromotorické síle

$$\frac{dA_{zdroj}}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zdroj působí proti} \\ \text{EM síle}}}{=} - \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{I} \mathcal{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Faradayův} \\ \text{zákon}}}{=} I\frac{d\Psi}{dt}$$

práce potřebná k udržení konstantního proudu z integrace

$$\Delta A_{zdroj} = I\,\Delta\Psi$$

energie jedné smyčky γ_s o samoindukčnosti L_{ss}
energie = práce zdroje potřebná k rozpohybování proudu proti vlastnímu poli (samoindukčnost)
fixovaná smyčka a pomalu se měnící proud

$$\frac{dU_s}{dt} = \frac{dA_{zdroj}}{dt} = I_s\frac{d\Psi_s}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \Psi_s = L_{ss}I_s}}{=} L_{ss} I_s \frac{dI_s}{dt}$$

$\Downarrow$

$$U_s = \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2$$

pro $I_s = 0$ předpokládáme $U_s = 0$

Magnetická energie systému smyček

magnetická energie systému smyček γ_k $k=1\dots N$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l = \frac{1}{2}\sum_k I_k \Psi_{\text{skrze } \gamma_k}$$

důkaz indukcí

- pro jednu smyčku se redukuje na odvozený vztah
- indukční krok

  uvažujme systém smyček γ_k $k=1\dots N$

  a přidejme další smyčku γ_s

v každý okamžik jsou toky a proudy vztaženy

$$\Psi_s = L_{ss} I_s + \sum_l L_{sl} I_l$$

$$\Psi_k = L_{ks} I_s + \sum_l L_{kl} I_l$$

smyčky γ_k i γ_s se nemění

$\Rightarrow$ matice indukčnosti je konstantní

$$\frac{dL_{kl}}{dt} = 0 \qquad \frac{dL_{sk}}{dt} = 0 \qquad \frac{dL_{ss}}{dt} = 0$$

měníme pouze proud I_s

$$\frac{dI_k}{dt} = 0$$

změna energie při zapínání proudu I_s

= práce vykonaná elektromotorickou silou ve smyčkách

$$\frac{dA}{dt} = -\mathcal{E}_s I_s - \sum_k \mathcal{E}_k I_k = I_s \frac{d\Psi_{\text{skrze } \gamma_s}}{dt} + \sum_k I_k \frac{d\Psi_{\text{skrze } \gamma_k}}{dt}$$

$$\Downarrow \quad = I_s L_{ss} \frac{dI_s}{dt} + \sum_k I_k L_{ks} \frac{dI_s}{dt}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2 + \sum_k I_k \underbrace{L_{ks}}_{\frac{1}{2}(L_{ks}+L_{sk})} I_s$$

zapnutí proudu I_s: $0 \to I_s$

magnetická energie

$$U_{\text{systém } \gamma_k + \gamma_s} = U_{\text{systém } \gamma_k} + \Delta A =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l + \frac{1}{2}\sum_k L_{ks} I_k I_s + \frac{1}{2}\sum_l L_{sl} I_s I_l + \frac{1}{2} L_{ss} I_s^2$$

což jsme chtěli ukázat