# Zákony zachování

**Energie v elektrostatice.**

Elektrostatický potenciál a potenciální energie. Interakční energie nábojů. Energie elektrostatického systému, vyjádření pomocí potenciálu a intenzity, lokalizace energie, positivita energie. Energie nabité koule, divergentní charakter energie bodového náboje, vztah celkové a interakční energie. Energie systému vodičů.

**Energie v magnetostatice.**

Vztahy pro magnetostatickou energii, energie systému smyček pomocí matice indukčnosti.

**Lokální zákony zachování.**

Lokální bilance veličiny, integrální vyjádření, diferenciální vyjádření, rovnice kontinuity, její prosotoročasová forma.

**Energie, hybnost a jejich toky.**

Hustota elektromagnetické energie, tok elektromagnetické energie, Poyntingův vektor, bilance energie – Poyntingova věta. Hustota hybnosti elektromagnetického pole, tenzor toku hybnosti, tenzor napětí, bilance hybnosti. Prostoročasová formulace, tenzor energie-hybnosti, lokální zákon zachování 4-hybnosti.

# Elektrostatická energie

## Potenciální energie a skalární potenciál

potenciální energie náboje v poli =

= práce, kterou musíme vykonat proti elektrickému poli na rozmístění nábojů

$$\Delta A_{\text{přesun náboje}} = -\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int q\vec{E}\cdot d\vec{s} = q\,\Delta\phi \qquad \Downarrow$$

změna energie

$$\Delta U = q\,\Delta\phi$$

potenciální energie

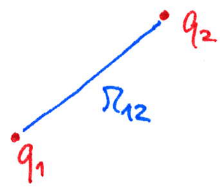
zvolíme potenciál v nekonečnu $\phi|_\infty = 0$

potenciální energie = přesun z nekonečna

$$U = q\phi$$

energie jednoho náboje v poli druhého

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$




- symetrické $1 \leftrightarrow 2$
- zahrnuje pouze interakční energii mezi náboji

interakční energie systému nábojů

$$U_{\text{interakční}} = \sum_{\text{páry } k,l} U_{kl} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l\\ k\neq l}} U_{kl} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{k,l\\ k\neq l}} \frac{q_k q_l}{r_{kl}}$$

spojité rozložení náboje

$$q_k \to dq|_X \to \rho(X)\,dV \qquad r_{kl} \to r(X|X')$$

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho(X)\,\rho(X')}{r(X|X')}\,dV\,dV'$$

"přidali" jsme "diagonálu" $X = X'$

pro 3D a 2D rozložení náboje je to zanedbatelný příspěvek,

pro 1D a 0D to je netriviální změna vedoucí obecně k divergenci alternativní výrazy pro energii

$$U_E = \frac{1}{2}\int \rho(X)\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(X')}{r(X|X')}dV'}_{\phi(X)}dV = \frac{1}{2}\int\rho(X)\phi(X)dV$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int(-\nabla^2\phi)\,\phi\,dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)dV - \frac{\varepsilon_0}{2}\int\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi)\,dV$$

$$= \int\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 dV \quad - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V}\underset{\frac{1}{r}}{\phi}\,\underset{\frac{1}{r^2}}{\vec{\nabla}\phi}\cdot \underset{r^2}{d\vec{S}} \to \frac{1}{r}\to 0$$ malé

$\partial V$ hranice v nekonečnu

$\Downarrow$

$$U_E = \frac{1}{2}\int\rho\phi\,dV$$

$$U_E = \int\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\,dV$$

lokalizace energie

odvozené výrazy lze interpretovat, že hustota energie je

$$\frac{1}{2}\rho\phi \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

v elektrostatice nelze rozhodnout, co je preferované.
požadavek lokálního zachování energie v plné teorii ukazuje, že správná volba pro hustotu energie je

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

positivita energie

$$U_E = \int\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\,dV$$

je explicitně positivní

ve vyjádření $U_E = \int\rho\phi\,dV$ to není vidět

interakční energie $U_{int} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,l\\k\neq l}}\frac{q_k q_l}{r_{kl}}$ není vždy pozitivní

- nezahrnuje vlastní energii bodových nábojů
- ta je pozitivní a divergující, celkové energie také je pozitivní (ale nekonečná)

Energie systému nabitých vodičů

systém vodičů popsán maticí kapacity

$$Q_k = \sum_l C_{kl} \Phi_l$$

energie

$$U_E = \frac{1}{2} \int \varrho \phi \, dV =$$

náboj lokalizovaný na povrchu vodičů
potenciál konstantní na vodičích $\phi|_{\partial V_k} = \Phi_k$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \int_{\partial V_k} \sigma_k \Phi_k \, dS_k = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \underbrace{\int_{\partial V_k} \sigma_k \, dS_k}_{Q_k}$$

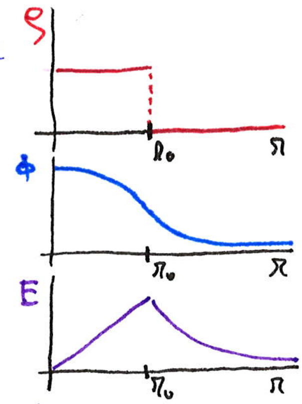
$$= \frac{1}{2} \sum_k Q_k \Phi_k$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,l} C_{kl} \Phi_k \Phi_l = \frac{1}{2} \sum_{k,l} C^{-1}_{kl} Q_k Q_l$$

energie je vždy kladná $\Rightarrow$

$C_{kl}$ positivně definitní matice

Př: energie homogenně nabité koule




$$\varrho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \text{konst} \qquad r < r_0$$

$$\varrho = 0 \qquad r > r_0$$

na cvičení jsme našli

$$\phi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^3}\right) \quad r < r_0 \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r_0^3}\vec{e}_r \quad r < r_0$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad r > r_0 \qquad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \quad r > r_0$$

energie

$$U = \frac{1}{2}\int_{r<r_0} \frac{3Q}{4\pi r_0^3}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{r_0} - \frac{r^2}{r_0^3}\right) r^2 dr \underbrace{4\pi}_{\int \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi} = \qquad \leftarrow \frac{1}{2}\int \varrho\phi \, dV$$

$$= \frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 r_0^5}\int_0^{r_0}(3r_0^2 r^2 - r^4)\,dr = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

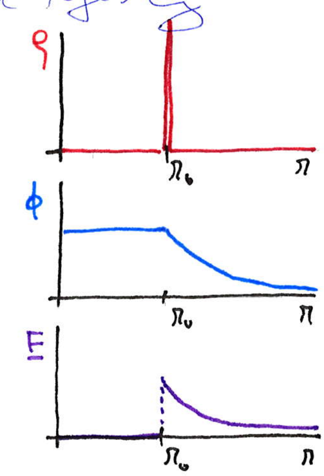
$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\int_{r<r_0}\frac{r^2}{r_0^6} r^2 dr\, 4\pi + \int_{r>r_0}\frac{1}{r^4} r^2 dr\, 4\pi\right) = \qquad \leftarrow \int \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[\frac{1}{5}\frac{r^5}{r_0^6}\right]_0^{r_0} + \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty}\right) = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

pro jiné sféricky symetrické rozložení náboje se dostane jiný numerický prefaktor

např. pro plošný náboj na povrchu sféry

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$



# Odhad velikosti samointerakční energie

při přechodu od bodových nábojů ke spojitému rozložení jsme změnili výraz pro interakční energii na plnou energii přidáním členu

$$\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k}\frac{q_k q_k}{r_{kk}} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{X\approx X'}\frac{\varrho(X)\varrho(X')}{r(X|X')}\,dV\,dV'$$

$r_{kk}=0$ čili $\frac{1}{r_{kk}}$ zjevně diverguje

ve spojité variantě divergence $\frac{1}{r}$ jde proti "malosti" nábojů $dq=\varrho\, dV$

odhadneme chování "diagonálního" členu diskretizací prostoru a aproximujeme samointerakční energii každé elementární buňky jako $\sim\frac{\Delta Q^2}{r}$ $\Delta Q$ náboj v buňce, $r$ velikost buňky (motivace samointerakční energie koule)

délku $L$ (velikost systému) rozdělíme na $N$ buněk a zajímá nás chování $N\to\infty$

| charakter zdroje | náboj v buňce | energie na diagonále |
|---|---|---|
| 3D | $\Delta Q\sim\frac{Q}{N^3}$ | $\sum_{3D}\frac{\Delta Q^2}{r}\sim N^3\left(\frac{Q}{N^3}\right)^2\frac{1}{L/N}\sim\frac{1}{N^2}\to 0$ |
| 2D | $\Delta Q\sim\frac{Q}{N^2}$ | $\sum_{2D}\frac{\Delta Q^2}{r}\sim N^2\left(\frac{Q}{N^2}\right)^2\frac{1}{L/N}\sim\frac{1}{N}\to 0$ |
| 1D | $\Delta Q\sim\frac{Q}{N}$ | $\sum_{1D}\frac{\Delta Q^2}{r}\sim N\left(\frac{Q}{N}\right)^2\frac{1}{L/N}\sim 1$ netriviální |
| 0D | $\Delta Q\sim Q$ | $\frac{\Delta Q^2}{r}\sim Q^2\frac{1}{L/N}\sim N$ divergující |

interakční energie je ekvivalentní plné energii pro zdroje 3D a 2D charakteru

pro zdroje 1D a 0D se tyto energie liší a

pro 0D plná energie diverguje

# Magnetostatická energie

Povaha magnetostatické energie
chtěli bychom definovat
energie = práce konaná proti poli potřebná
k ustanovení proudů a jejich magnetických polí

nelze provést v čisté magnetostatice
- je nutno pohybovat "smyčkami" proudů
- změna proudů, i když pomalé, jde za hranici magnetostatiky
- potřeba alespoň kvazistacionární přiblížení
viz diskuze kvazistac. přiblížení a Faradayova zák.

Magnetostatická energie

$$U_M = \int \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2 dV \qquad u_M = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2$$

celková energie hustota energie

- viz postup zmíněný výše
- viz bilance energie v plné teorii (dále)

Alternativní výrazy pro energii

$$U_M = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int B^2 dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\, dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int\left(\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\right)dV$$

$$= \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\, dV + \int_{\partial V}(\vec{A}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\, dV$$

hranice v nekonečnu → malé

$$\Downarrow$$

$$U_M = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\, dV$$

Systém proudových smyček

systém smyček je popsán maticí indukčnosti

$$\Psi_k = \sum_l L_{kl} I_l$$

energie

$$U_M = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot\vec{j}\, dV =$$

přiblížení tenkých vodičů – smyčky $\gamma_k$
proud $I_k$ konstantní – lze vytknout

$$= \frac{1}{2}\sum_k I_k \int_{\gamma_k = \partial S_k} \vec{A}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\sum_k I_k \int_{S_k} \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{\vec{B}}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \Psi_k I_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,l} L_{kl} I_k I_l$$

obecné proudové rozložení lze chápat jako superpozice tenkých smyček s elementárním proudem $dI$

vskutku, podmínka stacionarity $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ říká, že orbity proudu nezačínají a nekončí, tj. tvoří (zobecněné) smyčky

energii pak můžeme psát

$$U_M = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \underbrace{\Psi_{\text{skrze } \gamma_k \text{ od pole smyčky } \gamma_l}}_{L_{kl} I_l} I_k$$

tento vzorec je odvozován výpočtem práce vykonané na systému pomocí kvazistacionárního přiblížení

# Lokální zákony zachování

veličina se lokálně zachovává, pokud v každé prostoročasové oblasti platí bilance:

veličina na konci − veličina na začátku

+ množství veličiny, která uteče z oblasti pryč

= množství veličiny, které vzniklo

$$\int_V w|_{t_K}\, dV - \int_V w|_{t_Z}\, dV + \int_{t_Z}^{t_K}\int_{\partial V} \vec{w}\cdot d\vec{S}\, dt = \int_{t_Z}^{t_K}\int_V s\, dV\, dt$$

$w$ objemová hustota veličiny

$\vec{w}$ hustota toku

$s$ objemová hustota tvorby veličiny

$$\Downarrow \quad \int_{t_Z}^{t_K}\int_V \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right) dV\, dt = \int_{t_Z}^{t_K}\int_V s\, dV\, dt$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{w} = s$$

rovnice kontinuity

relativistická formulace

$$\nabla_\mu w^\mu = s \qquad w^\mu = \begin{bmatrix} cw \\ \vec{w} \end{bmatrix} \quad \text{4-tok veličiny}$$

zákon zachování náboje

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

náboj nevzniká a neprávě nezaniká se $\Rightarrow s = 0$

$$\nabla_\mu j^\mu = 0$$

plyne z Maxwellových rovnic

$$\nabla_\mu j^\mu = \varepsilon_0 c^2 \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad \text{díky symetrii } \nabla_\mu\nabla_\nu \text{ a antisym. } F^{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}} + c^2 \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{0} - \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} = 0$$

# Energie, hybnost a jejich toky

bilance energie a hybnosti v plné teorii

Maxwellovy rovnice

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

bilance energie EM pole

hustota práce konané proti Lorentzově síle

náboji a proudy vázanými na (neelektromagnetický) mechanický systém

= energie dodaná do EM pole

$= -\vec{j}\cdot\vec{E} = -w$

$$-w = -\vec{j}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 c^2\left(-\vec{\nabla}\times\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E} =$$

$$= \varepsilon_0 c^2\left(\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial}{\partial t}E^2\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2\right] + \varepsilon_0 c^2\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2$ hustota energie EM pole

$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2\,\vec{E}\times\vec{B}$ tok energie EM pole – Poyntingův vektor

$-w = -\vec{j}\cdot\vec{E}$ hustota tvorby EM energie

= úbytek energie mechanického systému

$U_{EM} = \int\left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2\right)dV$ celková energie

$\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S}$ rychlost toku energie skrze plochu S

$\int_{t_z}^{t_k}\int_S \vec{S}\cdot d\vec{S}\,dt$ energie proteklá skrze plochu S za čas $\langle t_z, t_k\rangle$

bilance hybnosti EM pole

hustota síly potřebné proti Lorentzově síle ze strany (neelektromagnetického) mechanického systému

$$= -\vec{f} = -(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$$

$$= -\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0 c^2(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$$

$$= -\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0 c^2\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{0}\vec{B} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \varepsilon_0\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \varepsilon_0 c^2\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\vec{E} + \varepsilon_0(\vec{\nabla}\vec{E})\cdot\vec{E} - \varepsilon_0 c^2(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B} - \varepsilon_0 c^2\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\vec{B} + \varepsilon_0 c^2(\vec{\nabla}\vec{B})\cdot\vec{B}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}(E^2 + c^2B^2)\overleftrightarrow{1}\right]$$

$$= \frac{\partial\vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}$$

$\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$ hustota hybnosti

$\overleftrightarrow{T} = -\overleftrightarrow{\tau} = -\varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}(E^2+c^2B^2)\overleftrightarrow{1}\right)$ tenzor toku hybnosti

$\overleftrightarrow{\tau}$ Maxwellův tenzor napětí

$-\vec{f}$ změna hybnosti EM pole

# Prostoročasový zápis

metrický tenzor energie-hybnosti

$$T_{EM}^{\mu\alpha} = \begin{bmatrix} u & c\vec{g} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & \overleftrightarrow{T} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{hustota 4-hybnosti} \\ \leftarrow \text{tok hustoty 4-hybnosti} \end{array}$$

bilance hustoty 4-hybnosti

$$\nabla_\mu T_{EM}^{\mu\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right) \\ \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} w/c \\ \vec{f} \end{bmatrix} = -\underbrace{\Phi^\mu}_{\text{hustota 4-síly}} = -F^\mu{}_\nu j^\nu$$

zápis pomocí Maxwellova tenzoru $F_{\mu\nu}$

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \varepsilon_0 c^2 \left( F^{\mu\kappa} F^{\nu\lambda} g_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} \right)$$

lze dostat variací akce podle metriky

$$T_{EM}^{\mu\nu} = 2c \frac{\delta S_{EM}}{\delta g_{\mu\nu}}$$

Pozn: pokud $d^4\Omega$ zahrnujeme do variace tak $T_{EM}^{\mu\nu} = \frac{2c}{d^4\Omega} \frac{\delta S_{EM}}{\delta g_{\mu\nu}}$

potřeba znát

$$\delta\, d^4\Omega = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \delta g_{\kappa\lambda}\, d^4\Omega \qquad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \delta g_{\kappa\lambda}$$

$$S = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d^4\Omega = -\frac{\varepsilon_0 c}{4} \int F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda}\, d^4\Omega$$

pozor na polohu indexů
$F_{\mu\nu}$ neobsahuje metriku

$$\delta S = \frac{\varepsilon_0 c}{4} \int \left[ -2 F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \delta g^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \right] d^4\Omega$$

$$= \frac{\varepsilon_0 c}{2} \int \left[ F_{\mu\kappa} F_{\nu\lambda} g^{\mu\nu} g^{\kappa\alpha} g^{\lambda\beta} - \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} g^{\alpha\beta} \right] \delta g_{\alpha\beta}\, d^4\Omega$$

$$\Rightarrow T_{EM}^{\alpha\beta} = 2c \frac{\delta S_{EM}}{\delta g_{\alpha\beta}} = \varepsilon_0 c^2 \left[ F^{\alpha\kappa} F^{\beta\lambda} g_{\kappa\lambda} - \frac{1}{4} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} g^{\alpha\beta} \right]$$

Lokální zákon zachování 4-hybnosti
jako důsledek kovariance akce

celková akce invariantní vůči transformaci "všeho"
pomocí difeomorfismu naindukujeme změnu
všech fyzikálních polí
změníme též metriku (kinematická struktura v STR)

kovariance akce - při takovéto změně se akce nezmění
jedná se v podstatě o "přečíslování" bodů

difeomorfismus
spojité posunutí podél vektorového pole $\delta\xi^\mu$
indukuje změnu všech polí

$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \delta A_\mu$

$\psi \to \psi' = \psi + \delta\psi$

atd.

$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$

dáno Lieovou derivací pole podél $\delta\xi$

$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu}\delta\xi^{\nu)}$ ← pro metriku

změna akce

$$S(A_\mu, \psi, \dots; g_{\mu\nu})$$

$$\delta S_{dif} = \int \underbrace{\frac{\delta S}{\delta A_\mu}}_{0} \delta A_\mu \, d^4\Omega + \int \underbrace{\frac{\delta S}{\delta \psi}}_{0} \delta\psi \, d^4\Omega + \dots + \int \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \, d^4\Omega = 0$$

⇓ pohybové rovnice pro $A_\mu, \psi, \dots$

$$0 = \int \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_{(\mu}\delta\xi_{\nu)} \, d^4\Omega = -\int \left(\nabla_\mu \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\right) \delta\xi_\nu \, d^4\Omega$$

⇓

$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ $\qquad T^{\mu\nu} = 2c \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$ metrický tenzor energie-hybnosti

tenzor energie hybnosti
skládá se z příspěvků od různých druhů hmoty

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{EM} + T^{\mu\nu}_{SP} + \dots$$

energie jednoho druhu se může přeměňovat na
energii jiného druhu hmoty

$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{EM} + \nabla_\mu T^{\mu\nu}_{ostatní} = 0$ $\qquad \nabla_\mu T^{\mu\nu}_{ostatní} = f^\nu_{EM}$

# Interakce s jinými systémy

Celkový zákon zachování energie-hybnosti

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{\text{celkové}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{EM} + \nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{\text{ostatní}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\alpha}_{\text{ostatní}} = \Phi^\alpha = F^{\alpha\mu} j_\mu$$ hustota Lorentz. síly

Nekoherentní prach

$$T^{\mu\nu}_{\text{prach}} = \mu_{00} u^\mu u^\nu = u^\mu \pi^\nu$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & c\vec{\pi} \\ \frac{\vec{v}}{c}\varepsilon & \vec{v}\vec{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu c^2 & c\mu\vec{v} \\ c\mu\vec{v} & \mu\vec{v}\vec{v} \end{bmatrix}$$ ← hustota 4-hybnosti ← tok hust. 4-hybnosti

pohybové rovnice dané zákonem zachování

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\varepsilon) = w = \varrho \vec{v}\cdot\vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\vec{\pi}) = \vec{f} = \varrho\vec{E} + \varrho\vec{v}\times\vec{B}$$

podrobnosti viz dodatek